



**HAL**  
open science

## Stratégie optimale pour la réduction de la variance de la prime ajustée. application en assurance automobile

Kmar Fersi, Kamel Boukhetala, Samir Ben Ammou

### ► To cite this version:

Kmar Fersi, Kamel Boukhetala, Samir Ben Ammou. Stratégie optimale pour la réduction de la variance de la prime ajustée. application en assurance automobile. 2011. hal-00625684v1

**HAL Id: hal-00625684**

**<https://hal.science/hal-00625684v1>**

Submitted on 22 Sep 2011 (v1), last revised 26 Feb 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stratégie optimale pour la réduction de la variance de la prime ajustée. application en assurance automobile

Kmar Fersi\*, Kamel Boukhetala\*\*  
Samir Ben Ammou\*\*\*

\*Institut Supérieur de Gestion Sousse, & Computational Mathematics Laboratory,  
Route de Kairouan, 5019 Monastir, Tunisia  
fersi.gmar@yahoo.fr

\*\* Faculté de Mathématiques Bp. 32, El-Alia,  
Bab-Ezzouar, USTHB Alger, Algeria

\*\*\* Computational Mathematics Laboratory, Route de Kairouan, 5019 Monastir, Tunisia

**Abstract.** The estimator of the adjusted premium developed by Necir and Boukhetala (2004) is considered. The problem of reducing the variance of this estimator is formulated as an optimization program with nonlinear stochastic constraints. An hybrid genetic algorithm is used for finding global optimal solutions, statistically explicable. An application to automobile insurance is developed.

## 1 Introduction

Les risques extrêmes sont, aujourd'hui, caractérisés par le fait qu'ils sont abstraits et complexes, (Picard (2002), Chemarin, Henry & Michel-Kerjan (2005)). Les ouragans, les tremblements de terre ou même les accidents de la route sont des risques majeurs, massifs et pourtant cernés, donc appréhendables, acceptés et contre lesquels les assureurs et les réassureurs ont démontré une certaine discipline de réactivité tarifaire, (Denuit & Charpentier (2005) et Charpentier (2009)). Cet exemple illustre l'importance cruciale pour les assurés et les réassureurs d'une évaluation correcte du potentiel de sinistre inhérent à des catastrophes certes rares, mais tout à fait envisageables, (Griselda & Guillaume (2006) et Centen & Guerra (2010)).

Au regard des réformes de la solvabilité II, la réglementation des assurances passe à des règles complexes par la mise en place d'un modèle interne, (EMB (2009-2010) et Optimind (2007)). Ce qui constitue un développement majeur par rapport à la solvabilité I. Ces réformes encouragent les compagnies à adopter la démarche ERM (Enterprise Risk Management) pour qu'elles soient en mesure par elles mêmes d'apprécier et mesurer leurs risques, (COSO (2009)). Donc, l'approche par le modèle interne permet de dégager des stratégies alternatives. Dans ce travail, on propose une approche de couverture des risques extrêmes en assurance. Pour cela, on est amené à déterminer un intervalle de confiance optimal pour la prime de risque. Cette optimalité est obtenue grâce à la résolution d'un programme de minimisation de la variance de

l'estimateur de la prime ajustée par des algorithmes génétiques hybridés.

Cette approche permet de contribuer à la réalisation des objectifs stratégiques d'optimalité et d'adaptation de la tarification aux exigences de l'assureur et l'assuré. La démarche du calcul d'une variance minimale pour l'estimateur de la prime pure contribue aussi à la mise en place d'un reporting efficace et au respect de la conformité aux lois et réglementations en vigueur. En bref, grâce au déploiement de cette approche, une société d'assurance est mieux armée pour atteindre un système de tarification raisonnable en présence des sinistres extrêmes et pour éviter les écueils et les impondérables.

Cet article se présente de la manière suivante : une première section traite l'utilité de la réassurance en matière d'assurabilité des risques extrêmes et on a introduit l'estimateur de la prime ajustée proposée par Necir & Boukhetala (2004). En deuxième section, on a défini le problème général de la réduction de la variance de l'estimateur de la prime ajustée sous forme d'un programme d'optimisation non linéaire avec contraintes stochastiques. Le caractère aléatoire complexe de ce problème nous a incité à adapter un algorithme génétique hybride (AGS) efficace pour la recherche de solutions optimales, statistiquement exploitables. Nous proposons l'ébauche d'un modèle de calcul d'une prime ajustée raisonnable et nécessaire à la couverture des risques extrêmes en assurance non vie (assurance RC-Automobile). Enfin on a étudié l'évolution de cette approche de résolution du problème en utilisant les coûts des sinistres extrêmes détectés par la théorie des valeurs extrêmes (Fersi & al. (Soumis (2011))). On propose une stratégie de calcul d'une prime raisonnable et favorable pour les assurés qui ont une sinistralité extrêmes.

## 2 Sinistralités extrêmes et réassurance

Les risques extrêmes se définissent comme les risques dont on ne sait pas si le système d'assurance sera capable de les supporter. Daykin & al. (1994), Dickson (2005), Tosetti (2002), Petauton (2004) ont proposé le système de réassurance pour faciliter l'assurabilité de ces risques. Ceci conduit à bien tarifier et couvrir ces risques.

### 2.1 Besoin de réassurance en matière de risques extrêmes

La réassurance fournit des capacités supplémentaires pour indemniser les sinistres extrêmes. En stabilisant les résultats techniques, en réduisant le sinistre moyen et le sinistre maximum ainsi qu'en allégeant la charge du capital, la réassurance rend la couverture plus abordable.

#### *Risques exceptionnels en assurance non vie*

L'assurance non vie est marquée par la survenance des sinistres très élevées (Cummins (1992)). Ces sinistres se caractérisent par l'ampleur des pertes qu'ils ont causées et leur petite fréquence. Pour cela, les statistiques traditionnelles qui étudient un phénomène à travers son comportement moyen, caractérisent mal ces extrêmes. Elles fournissent uniquement des indications sur la distribution générale d'un phénomène. McNeil & al. (1997) et Rootzen &

Tajvidi (1997) montrent que l'application de la théorie des valeurs extrêmes donne un cadre plus systématique, rigoureux et cohérent que les méthodes classiques.

En effet, cette méthode permet de déduire la distribution des extrêmes à partir de la distribution totale, sans traiter séparément les extrêmes des risques récurrents. Ces événements appartiennent à ce que l'on appelle "la queue de distribution", ce qui veut dire que l'on dispose de très peu d'observations pour caractériser les distributions de probabilité. Donc il est important de bien modéliser les queues de distribution pour éviter les erreurs grossières de tarification.

Généralement, l'activité d'assurance est basée sur la loi des grands nombres qui nous assure que la moyenne empirique de la charge de sinistre d'un portefeuille de risques indépendants et identiquement distribués tend vers le sinistre moyen d'une police lorsque le nombre de polices tend vers l'infini. La loi de grands nombres peut ne pas fonctionner correctement lorsque le portefeuille contient des risques hétérogènes, et donc non identiquement distribués. L'assureur doit, dès lors, réaliser des compensations dans le temps, dans l'espace, et limiter ses souscriptions de manière à conserver un portefeuille homogène.

En pratique, il n'est pas aisé d'obtenir ces compensations, ni de limiter sa souscription. Donc le système de partage et de transfert des risques permet d'absorber les destructions des risques potentiels (Chiappori (1996) et Eeckhoudt & Gollier (1995)). Blondeau & Partrat (2003) ont montré que la réassurance offre une solution attrayante à ces problèmes.

#### *Réassurance et incitation à la prévention*

La réassurance est un système de partage des risques qui a pour objectif de faciliter l'assurabilité de risques lourds, c'est-à-dire ceux pour lesquels la survenance d'un sinistre, que l'on peut qualifier exceptionnel, aurait une incidence sur le taux de prime pure moyen des sous-portefeuilles et mettrait à mal les résultats de la société d'assurance (Centeno & Guerra (2010) et Griselda & Guillaume (2006)).

En assurance, notamment en non vie, le système actuel est basé sur le principe de solidarité: chaque assuré paie le même taux de prime (en montant) et les assureurs sont indemnisés d'après le montant des dommages de leurs assurés (François & Constant (2009)). Ce système permet donc une couverture complète des assureurs. Dans ce cas, l'intérêt immédiat de l'assuré est de ne faire aucun effort. L'assureur est donc contraint, pour équilibrer son budget, de proposer la prime actuarielle correspondante au risque élevé (Kunreuther & al. (1995)). Cette situation est en général inefficace.

Cependant, le critère uniforme de la prime d'assurance crée une distorsion qui lui induit une moindre incitation à la prévention et génère un surcoût pour la société. En effet, l'utilisation d'une couverture partielle peut inciter les assurés à adopter un comportement prudent et donc diminuer les charges de l'assureur qui peut ainsi pratiquer des primes plus faibles (voir par exemple Wills & Sherris (2010)). D'où, la pratique de la prime de réassurance permet d'opérer une différenciation des produits par le biais d'un jeu de niveaux de couverture différents. Autrement dit, elle suggère de discriminer entre les assurés au moyen d'une tarification non linéaire reliant la prime et la quantité d'assurance achetée. Ce qui nous permet de constater que le système de réassurance crée une bonne incitation transmise aux assurés par l'intermédiaire des assureurs.

## 2.2 stratégie de tarification pour les risques majeurs

L'avenir des assurances dépend-il des risques extrêmes? A l'évidence oui. L'augmentation du coût cumulé des grands sinistres est plus importante depuis 20 ans que les quarante années précédentes. C'est donc l'intérêt des assureurs et des réassureurs de recourir à des modèles scientifiques pour élaborer un système de tarification adéquat et efficace. S'inspirant du principe de Wang (1996) et LIN (2005). Necir & Boukhetala (2004) ont introduit une nouvelle approche du problème du calcul de prime de réassurance. Associé au système d'information statistique de l'assurance automobile, ce principe est mis en œuvre sous forme d'un logiciel permettant un calcul automatique d'estimation de primes de réassurance par intervalle de confiance.

*Principe de la prime ajustée Wang (1996)*

Soit  $X, X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variable aléatoires de risque indépendantes et identiquement distribuées avec une fonction de répartition commune  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in R$ . Pour une tarification raisonnable des risques extrêmes, Wang (1996) propose un nouveau procédé de calcul de primes en appliquant une transformation à la fonction de survie. Il obtient alors la prime ajustée au risque suivante:

$$\pi(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Le paramètre  $p \geq 1$  est appelé coefficient de distorsion ou le coefficient d'aversion au risque. Donc la prime ajustée pour un seuil élevé  $u > 0$  est donnée par:

$$\pi_u(X) = \int_u^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Notant que le seuil  $u$  doit être grand et dépend de la taille de l'échantillon ( $n \geq 1$ ). Pour cette raison on va supposer que  $u = u_n \forall n \geq 1$ . Ce qui conduit à récrire  $\pi_u(X)$  comme suit:

$$\pi_{u_n}(X) = \int_{u_n}^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

*Estimation non paramétrique de la prime ajustée*

Soit  $k = k_n$  une suite d'entier satisfaisant  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \rightarrow \infty$  and  $k/n \rightarrow 0$  tel que  $u_n := Q(1 - k/n)$ , où

$$Q(s) := \inf\{t \in R, F(t) \geq s\}, \quad 0 \leq s < 1,$$

est la fonction quantile ou l'inverse généralisée de  $F$ , alors  $\pi_{u_n}(X)$  s'écrira:

$$\pi_{u_n}(X) = \int_{Q(1-k/n)}^{\infty} (1 - F(s))^{\frac{1}{p}} ds.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  la statistique d'ordre de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ . En remplaçant  $Q(1 - k/n)$  et  $F(\cdot)$  par leurs estimateurs appropriés, on obtiendra un estimateur

de la prime ajustée

$$\hat{\pi}_{u_n}(X) = \int_{X_{n-k,n}}^{\infty} (1 - F_n(s))^{\frac{1}{p}} ds, \quad (1)$$

où  $F_n(x) = n^{-1} \text{card}\{X_i \leq x : 1 \leq i \leq n\}$ ,  $\forall x \in R$ , est la distribution empirique de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

Le quantile empirique correspondant est défini par

$$\begin{aligned} Q_n &= \inf\{t \in R, F_n(t) \geq s\}, 0 < s \leq 1 \\ &= X_{i,n}, \quad (i-1)/n < s \leq i/n, i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

avec  $Q_n(0) = X_{1,n}$ .

On peut montrer que:

$$\hat{\pi}_{u_n} = - \int_0^{k/n} s^{1/p} dQ_n(1-s).$$

En intégrant par partie, on trouve

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{u_n} &= p^{-1} \int_0^{k/n} s^{1/p-1} Q_n(1-s) ds - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} \\ &= p^{-1} \sum_{i=1}^k \left( \int_{(i-1)/n}^{i/n} s^{1/p-1} ds \right) X_{n-i+1,n} - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ \left( \frac{i}{n} \right)^{1/p} - \left( \frac{i-1}{n} \right)^{1/p} \right\} X_{n-i+1,n} - (k/n)^{1/p} X_{n-k,n} \end{aligned}$$

On peut déduire:

$$\hat{\pi}_{u_n} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{i}{n} \right)^{1/p} \{X_{n-i+1,n} - X_{n-i,n}\}, \quad p \geq 1. \quad (2)$$

Pour  $p = 1$ , la statistique  $n\hat{\pi}_{u_n}$  correspond au traité de réassurance ECOMOR (excédent du coût moyen relatif) introduit par Thépaut (1950). Sous l'hypothèse que la queue de distribution  $1 - F$  est à variation régulière du second ordre, avec  $-1/\xi$  le premier paramètre et le deuxième paramètre  $\rho \leq 0$ , c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $A(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ , de

Prime des risques extrêmes

signe constant, tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (A(t))^{-1} \left\{ \frac{Q(1-tx)}{Q(1-t)} - x^{-\xi} \right\} = x^{-\xi} \frac{x^{\rho\xi} - 1}{\rho\xi}, \quad \text{for any } x > 0. \quad (3)$$

On va énoncer, le théorème suivant qui donne la normalité asymptotique de  $\hat{\pi}_{u_n}$ .

**Théorème.1 ( Necir A. & Boukhetala K. (2004))**

Supposons que (3) est vraie et  $s^{1/p}Q(1-s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$  pour  $\xi - 1/2 < 1/p \leq 1$ . Soit  $k = k_n$  tel que  $k \rightarrow \infty$ ,  $k/n \rightarrow 0$  et  $(k/n)^{1/2}A(k/n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1-k/n)} \{ \hat{\pi}_{u_n} - \pi_{u_n} \} \rightarrow^D \mathcal{N}(0, \sigma^2(p, \xi)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où

$$\sigma^2(p, \xi) := \begin{cases} p^{-2} \xi^2 \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda(\lambda + 1)}, & \text{pour } 1/p \neq \xi, \\ 1, & \text{pour } 1/p = \xi, \end{cases}$$

avec  $\lambda := 1/p - \xi$

(démonstration du théorème voir annexe A)

*Estimation paramétrique de la prime ajustée:*

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite de risques indépendants et identiquement distribués, de distribution commune  $F$ , telle que

$$\bar{F}(x) = cx^{-\frac{1}{\xi}}(1 + x^{-\beta}L(x)) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \quad (4)$$

pour  $\xi \in [0, 1]$ ,  $\beta > 0$ , une constante  $c$  et  $L(\cdot)$  une fonction à variation lente.

Pour les valeurs extrêmes des sinistres, Pickands (1975) montre que la distribution des excès au-delà d'un seuil  $u$  est asymptotiquement une loi de Pareto généralisé de paramètres  $\xi$  et  $\beta$ .

L'estimation de ces paramètres est déterminée par les solutions du système d'équations suivant:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \xi \frac{x_i}{\sigma}\right) = \xi \quad (5)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i/\sigma}{1 + \xi x_i/\sigma} = \frac{1}{1 + \xi} \quad (6)$$

Pour plus de détails voir annexe B.

Inspirant du théorème de Pickands, On peut déterminer l'estimateur de la prime ajustée, définie

dans l'équation (1), par

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{\frac{1}{p}} \frac{\hat{\beta}}{\frac{1}{p} - \hat{\xi}} \quad \hat{\xi} \leq \frac{1}{p} \leq 1 \quad (7)$$

(pour plus de détails voir annexe C)

Le théorème suivant décrit la normalité asymptotique de  $\hat{\pi}_u(X)$

**Théorème.2 ( Necir A. & Boukhetala K. (2004))**

Supposons que (4) est vraie pour  $\xi \in [1/2, 1]$  et  $\delta > 0$ , si  $x \rightarrow x^{-\delta}L(x)$  est une fonction décroissante. Soit  $u = u_n$  tel que  $u \rightarrow \infty$  et  $\sqrt{nu}^{-\delta}L(u) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\pi}_u(X) - \pi_u(X))}{\sqrt{\lambda^{2/p-1}(1-\lambda)}} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\pi^2), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

où

$$\sigma_\pi^2 = \frac{(1+\xi)\beta^2}{(\frac{1}{p}-\xi)^2} \left( \frac{(1/p-1)^2}{1+\xi} + \frac{(1+\xi)}{(\frac{1}{p}-\xi)^2} - \frac{2}{(\frac{1}{p}-\xi)} + 2 \right)$$

L'un des atouts de cette approche de tarification est sa robustesse assez grande en cas de survenance de sinistres d'un montant exceptionnel. Donc, on peut chercher une méthode d'optimisation fiable qui nous permet d'obtenir un intervalle de confiance optimal pour cet estimateur de la prime ajustée.

### 3 Formulation mathématique du problème d'optimisation

Analytiquement il est souvent difficile de déterminer le calcul de la prime ajustée par une forme exacte. Cependant l'estimateur asymptotique, proposé par Necir & Boukhetala (2004), nous permet de déterminer un intervalle de confiance optimal pour une prime raisonnable. Ce qui donne un outil souple et interactif pour la conception d'un système d'aide à la tarification pour des situations de risque exceptionnel.

#### 3.1 Discription du problème

Nous pouvons trouver une variance minimale  $\sigma_\pi^2$  de l'estimateur de la prime ajustée, en résolvant le problème suivant:

$$(Q) = \begin{cases} \min_{\xi, \beta, p} \sigma^2(\xi, \beta, p) = \frac{(1+\xi)\beta^2}{(\frac{1}{p}-\xi)^2} \left[ \frac{(1/p-1)^2}{1+\xi} + \frac{1+\xi}{(\frac{1}{p}-\xi)^2} - \frac{2}{1/p-\xi} + 2 \right] \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log(1 + \xi \frac{y_i}{\beta}) = \xi \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log \frac{y_i/\beta}{1+y_i/\beta} = \frac{1}{1+\xi} \\ \frac{1}{2} \leq \xi < \frac{1}{p}, \quad 2 > p \geq 1, \quad \beta > 0 \end{cases}$$

avec  $y_1, \dots, y_M$ : sont les observations réelles  $X_i$  qui dépassent le seuil  $u$ .



La méthode des extrema liés peut être utilisée pour trouver un minimum local.

### 3.2 Recherche d'une solution globale

Alternativement et pour la recherche d'un minimum global général, la méthode génétique ou celle de recuit simulé peuvent être également utilisées pour résoudre ce problème. Nous proposons dans le paragraphe suivant un algorithme génétique adapté pour déterminer un optimum global  $(\xi^*, \beta^*, p^*)$  pour le problème (Q).

Pour pouvoir employer une approche heuristique, telle que l'Algorithme Génétique (AG) ou l'AG combiné recuit Simulé (AGS), nous reformulons le problème (Q) comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\xi, \beta, p} \sigma^2(\xi, \beta, p) = \frac{(1+\xi)\beta^2}{(1/p-\xi)^2} \left[ \frac{(1/p-1)^2}{1+\xi} + \frac{1+\xi}{(1/p-\xi)^2} - \frac{2}{1/p-\xi} + 2 \right] \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log(1 + \xi \frac{y_i}{\beta}) = \xi \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log \frac{y_i/\beta}{1+y_i/\beta} = \frac{1}{1+\xi} \\ p = \psi_\alpha(u) \\ g_1 = \frac{1}{2} - \xi \leq 0 \\ g_2 = \xi - \frac{1}{p} \leq 0 \\ g_3 = 1 - p \leq 0 \\ g_4 = p - 2 < 0 \\ g_5 = \beta > 0 \end{array} \right.$$

Nous proposons d'illustrer l'intérêt d'une approche bayésienne dans le cadre de l'évaluation de ce problème d'optimisation, réalisé le plus souvent à l'aide de paramètres  $(\xi, \beta, p)$ . En pratique, un grand nombre de problèmes réels n'est pas optimisable efficacement par des approches classiques. Il convient donc de rendre compte des incertitudes sur ses paramètres, ce qui permet à l'utilisateur de gérer ces problèmes de façon assez adéquate (Gollier, Hilton & Raufaste (2003)). L'incertitude renforce cette stratégie et pose en des termes nouveaux la problématique de la pertinence d'une approche normative dans un tel contexte.

Cependant, pour les paramètres  $(\xi, \beta)$ , nous n'avons aucune incertitude, ils sont étalonnés (équations (5) et (6)). Notre incertitude ne porte que sur le paramètre  $p$ . Donc la démarche poursuivie présente deux cas.

- cas 1:  $p$  est déterministe
- cas 2:  $p$  est aléatoire;

$$p = \psi_\alpha(u) = 1 + u^\alpha$$

avec  $u$ : variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Bien que les problèmes d'optimisations combinatoires soient souvent faciles à définir, ils sont généralement difficiles à résoudre.

En effet, ce problème appartient à la classe des problèmes NP-difficile et ne possède donc pas de solution algorithmique efficace valable pour toutes les données (Gard (1979)).

## 4 Approche de résolution

Etant donnée l'importance du problème de minimisation de la variance de l'estimateur de la prime ajustée sous contraintes stochastiques de difficulté croissante, on a proposé de développer l'hybridation de méthodes des algorithmes génétiques. Ces dernières sont fondées principalement sur diverses heuristiques, souvent spécifiques à un type de problème.

### 4.1 Approche combinatoire: AGS

Les méta-heuristiques sont représentées essentiellement par les méthodes de voisinage et les algorithmes évolutifs. Ils constituent une classe de méthodes approchées adaptables à un très grand nombre de problèmes combinatoires et de problèmes d'affectation sous contraintes. Ces méthodes sont généralement rapides mais fournissent le plus souvent des solutions de qualité. Cependant, pour la majorité des problèmes d'optimisation combinatoire, il existe des éléments de la population qui sont relativement de mauvaise qualité, ce qui peut conduire à une convergence prématurée vers un optimum local. Afin de remédier à ce problème, certains de ces éléments doivent être convenablement mutés, par comparaison à leurs parents. Kirkpatrick & al. (1983) a été proposé d'associer la règle d'acceptation de Métropolis relative à l'algorithme Recuit Simulé (RS) (Youssef, Sadiq & Adiche (2001)), à celui de l'AG. Ceci donne un algorithme désigné AGS, où la règle de Métropolis opère en parallèle pour le choix des individus candidats à une opération de mutation qui réduit considérablement le risque de convergence prématurée vers un optimum local. Un tel algorithme a une grande popularité en optimisation, dans le cas où la forme de la fonction objectif ne se prête pas bien aux méthodes classiques connues, telles que les méthodes: Quasi-Newton, extrema liés et autres.

#### *Principe*

La particularité de l'algorithme AGS est l'exploration de l'espace de solutions réalisables, par la conception d'opérateurs de reproduction, croisement et mutation. Ces opérateurs agissent, à chaque génération, sur la population formée de solutions. Ce qui apporte des modifications qualitatives pouvant aller jusqu'à la satisfaction d'un critère de convergence prédéfini (convergence vers une meilleure solution). Afin d'introduire l'algorithme AGS, on présente certains concepts de base qui sont nécessaires à la compréhension de ses mécanismes de fonctionnement.

#### *Amélioration de l'opérateur mutation*

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, cette opération peut être couplée à la règle d'acceptation de Métropolis de l'algorithme RS. Ce qui permet d'éviter une convergence prématurée vers une solution locale. Cette règle permet d'aider à choisir d'une façon plus cohérente les individus pour mutation, selon leur degré de contribution à l'ajout de l'information permettant l'amélioration de la qualité de la population courante. En effet, dans un voisinage de deux chromosomes parents sélectionnés, deux autres chromosomes seront produits en utilisant les opérateurs de croisement et de mutation. Un enfant et un parent sont résultats de quatre chromosomes arbitraires.

On peut observer les deux cas de figures suivants:

La valeur d'aptitude de l'enfant est meilleure que celle du parent, alors l'enfant est choisi et

Prime des risques extrêmes

utilisé pour générer un nouveau chromosome pour la génération suivante

La valeur d'aptitude de l'enfant est inférieure à celle du parent, l'enfant peut être choisi, si pour un nombre aléatoire  $r \in [0, 1]$  est inférieur à  $P = \exp\left(\frac{(F_{Parent}^* - F_{Enfant}^*)}{T}\right)$ , où  $T$  est le paramètre "température courante" utilisé par l'AGS. Cette règle est connue sous le nom de "Règle de Métropolis"

Cette procédure est également appliquée aux autres paires d'enfants et de parents.

D'une génération à une autre, le paramètre température évolue suivant la formule  $T_k = \rho T_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, NG$ , où  $NG$  est le nombre de générations prédéterminé et  $\rho$  est le taux de refroidissement relatif à l'algorithme AGS.

La température initiale peut être choisie par la formule  $T_0 = \frac{1}{L_d} \sum_{i=1}^{L_d} \frac{(F_i^* - F_{i-1}^*)}{\log(P_0)}$   $L_d$  (rep.  $L_m$ ) est le nombre de descentes (rep. montées) relatif au mouvement au voisinage d'une solution courante.  $P_0 \approx 1$ ,  $P_0 = 0.999$ .

**Critère d'arrêt:** L'algorithme de recherche globale s'arrête lorsque le nombre de générations prédéfini  $NG$ , est entièrement épuisé, ou bien la température finale  $T_{NG} < 0.001$ .

## 4.2 Algorithme et implémentation:

Donc, nous sommes en mesure de décrire l'algorithme AGS suivant:

*Initialiser  $P(0)$  de taille  $M$ , initialiser  $T_0, NG = 0$ ,*

***Tant Que** critère d'arrêt non satisfait faire*

*Evaluer l'aptitude de la population  $P(NG)$*

***Pour**  $j = 1$  à  $NG$  **Faire***

*Selectionner aléatoirement deux chromosomes  $P^*(NG)$  à partir de  $P(NG)$*

*Appliquer l'opérateur de croisement sur  $P^*(NG)$  pour produire  $P^{**}(NG)$*

*Executer l'opérateur de mutation sur  $P^{**}(NG)$  pour produire  $P^{***}(NG)$*

*Evaluer l'aptitude des chromosomes  $P^{***}(NG)$*

*Executer la règle de Metropolis pour  $P^{***}(NG)$  et  $P^*(NG)$  pour générer deux chromosomes de la génération suivante  $P(NG+1)$ .*

***Fin Pour***

*$NG = NG + 1$   $T_{NG} = \rho T_{NG-1}$*

***Fin Tant Que.***

Une mise en oeuvre du problème a été effectuée à l'aide d'une implémentation informatique développée sous l'environnement Excel.

## 5 Application numérique en assurance automobile

*Description de l'échantillon de données*

La base de données concerne un échantillon aléatoire de 50000 observations pour des véhicules 4 roues de tourisme durant l'année 2004, issu du portefeuille d'une mutuelle d'assurance française. La variable étudiée correspond aux coûts des sinistres.

Rappelons que le montant d'un sinistre inclut l'indemnisation directe de la victime, les frais de

gestion internes à la société ainsi que les frais externes (expertise, frais judiciaires) afférents à ce sinistre. Il n'inclut pas les frais d'acquisition de contrats.

En assurance automobile, ce montant est inconnu. Il est donc la réalisation d'une variable aléatoire réelle positive ou nulle.

On remarque aussi que le montant du sinistre est différent du coût à la charge de l'assureur puisque l'assureur déduit le montant de la franchise fixé dans le contrat. Cette franchise est presque nulle pour un contrat tous risques. Dans ce travail on utilise le montant d'évaluation cumulé qui reflète le mieux la charge de sinistres extrêmes détectée par la théorie des valeurs extrême TVE (Fersi & al. (2011)).

*Interprétation des résultats*

La recherche d'optimums globaux pour le problème général stochastique (Q) sous contraintes, en utilisant l'algorithme AGS, donne des résultats consistants de la variance. Mais? les valeurs optimales obtenues sont relativement élevées, comme l'indique le graphique 1, pour une seule exécution. Pour 100 réalisations effectuées par l'algorithme AGS, on engendre

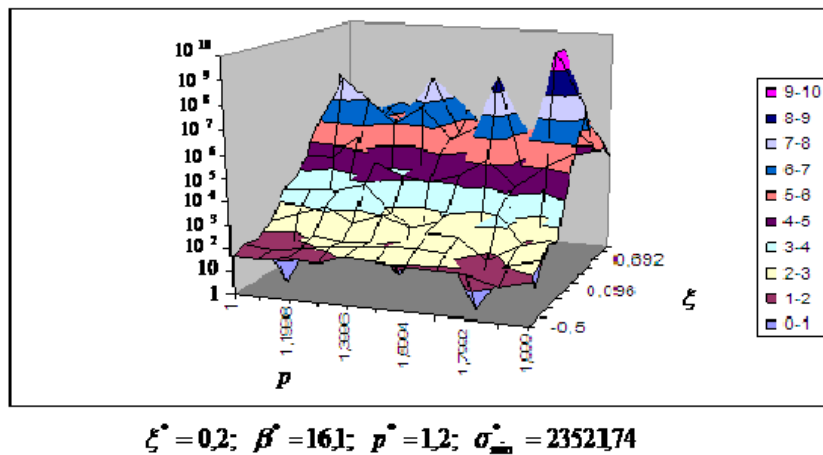


FIG. 1 – Courbe de la variance de l'estimateur de la prime ajustée conditionnellement à un comportement aléatoire du paramètre ;  $p = \psi(u)$ ,  $u \sim \mathcal{L}(U^{[0,1]})$ ;  $U^{[0,1]}$ : est la loi uniforme sur  $[0, 1]$

un échantillon de solutions optimales  $\{\xi_i^*, \beta_i^*, p_i^*\}_{i=1..100}$  et de variances minimales correspondantes de la prime ajustée  $(\sigma_{min})_i, i = 1..100$ , donnés par le tableau 1. Ceci correspond à une centaine de situations réelles identiques, conditionnellement à un choix aléatoire du paramètre  $p$ . Un tel choix doit tenir compte de l'asymétrie de l'information assuré-assureur. Il peut être également lié à un environnement économique incertain ne permettant pas de déterminer avec exactitude les valeurs de ce paramètre. C'est ce qui a motivé notre choix de supposer que  $p$  est aléatoire, prenant ses valeurs possibles dans un ensemble vérifiant les hypothèses du théorème de Nicer & Boukhtela (2004).

Dans certains cas rares, la meilleure configuration trouvée peut ne pas vérifier les contraintes

Prime des risques extrêmes

N° réalisation	$\xi^*$	$\beta^*$	$p^*$	$\tilde{\sigma}_{min}$
1	0,89	2,49	1,3	18077,56
2	0,55	1,19	1,14	1129073,25
3	0,85	2,74	1,3	34163,63
4	0,51	2,69	1,01	-409226,48
5	0,73	1,93	1,74	1107202,66
6	0,68	2,31	1,2	55253,22
7	0,59	1,21	1,96	3985069,54
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
100	0,72	2,19	1,27	363670,29

TAB. 1 – Résultats des variances optimales de 100 réalisations obtenus par l’AGS

et engendrer des résultats négatifs (tableau 1), du fait que le problème d’optimisation stochastique (Q) est traité en mode  $P$ –presque sûr ( $P$ : indique Probabilité 1). Pour remédier à ce problème, on utilise des techniques de filtrage ou de sélection de résultats obtenus par l’AGS, donnant que des valeurs positives de la variance. On remarque pendant l’exécution de l’AGS que très peu de valeurs négatives sont obtenues, ce qui correspond à un ensemble d’éventualités provenant de l’environnement hasardeux, de pourcentage très faible. La performance de cette procédure de filtrage (nettoyage des résultats) dépend largement du schéma d’évolution de la variance en fonction de  $p$ , variable aléatoire, et est représentée par le graphique 2:

Cette variabilité élevée de la variance produit une certaine incertitude dans le calcul de la

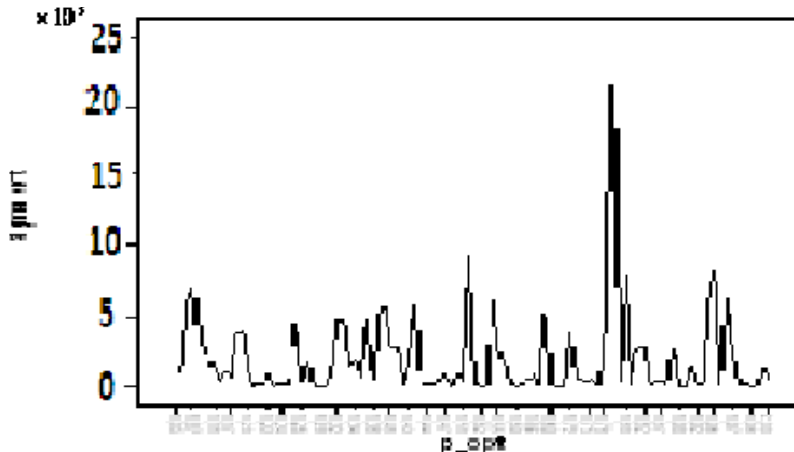


FIG. 2 – Evolution des optima de la variance en fonction des optima du paramètre aléatoire  $p$  prime et pourrait créer une certaine méfiance chez l’utilisateur (assureur/réassureur). Donc ce

dernier doit être plus prudent par le biais d'une telle stratégie, requise par l'usage du régulateur aléatoire, et pouvant conduire à un calcul de prime de risque répondant à des normes économiquement souhaitables en matière de tarification des risques extrêmes. De fait que la prise en compte comme contrainte, dans le programme (Q), de la charge de sinistres extrêmes risque d'augmenter la variance de l'estimateur de la prime, on a décidé de multiplier ces valeurs par un coefficient de pondération afin de condenser les échelles et de pouvoir normaliser la modélisation de ces événements (exceptionnels). En pratique, ceci peut être vu comme conséquence de la mise en place d'une stratégie de prévention adéquate; conduisant à une sinistralité relativement réduite, où on remplace  $y_i$  dans (Q) par  $y'_i = C_i y_i$ , les  $C_i$  sont estimés en présence de l'information statistique ou supposés aléatoires en absence de cette information. Ce dernier cas est supposé pour notre problème, où les  $C_i$  sont de loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ ; c'est le cas de situations se comportant dans un environnement économique complexe et en absence de systèmes d'information statistique approprié. Comme résultats de cette approche obtenus par 100 réalisations du problème (Q) par l'AGS, nous présentons les distributions en "box plot" des variables aléatoires  $\xi_i^*, \beta_i^*, p_i^*$  et  $\sigma_i$ , ainsi que les résultats de l'application du test d'équation Kolmogorov-Smirnov pour chacune de ces variables.

Représentation en Box-plot de la distribution des paramètres:  $\xi_i^*, \beta_i^*, p_i^*$  et  $\sigma_i$

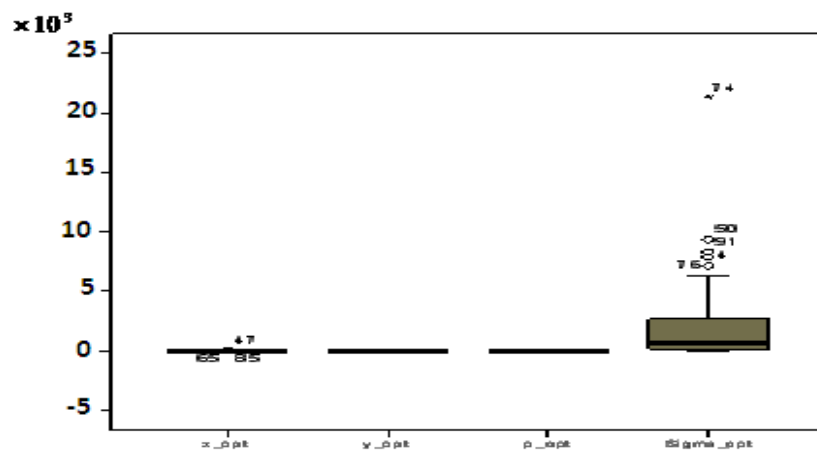


FIG. 3 – Box-plot de la distribution des paramètres

On peut tracer l'histogramme (graphique 4) des résultats de la variance obtenus par l'AGS et la densité de probabilité pour mieux visualiser la loi de probabilité associée.

La variabilité intrinsèque des résultats de la variance de l'estimateur de la prime ajustée n'est pas significativement de la loi normale, comme en témoigne le qq-plot. Cela qualifie l'incertitude sur le paramètre  $p$  qui pourra donner une représentation plus adaptée à la réalité, en présence des événements "rares" (tableau 2). Quand on trouve une déformation anormale de la courbe, c'est aussi une information importante qui nous dirige à déterminer une stratégie implicite de prévention. En se basant sur l'analyse empirique, on prouve que la répartition

Prime des risques extrêmes

		$\xi^*$	$\beta^*$	$p^*$	Variance
N		100	100	100	100
Normal Parameters(a,b)	Mean	,3648	1,8995	1,5379	1890,94122
	Std. Deviation	,30946	,60891	,28529	2970,400882
Most Extreme differences	Absolute	,088	,108	,093	,262
	Positive	,088	,108	,064	,217
	Negative	-,082	-,085	-,093	-,262
Kolmogorov-Smirnov Z		,880	1,082	,928	2,622
Asymp. Sig. (2-tailed)		,420	,192	,356	,000

a: Test distribution is Normal.  
b: Calculated from data.

TAB. 2 – Résultats des tests statistiques

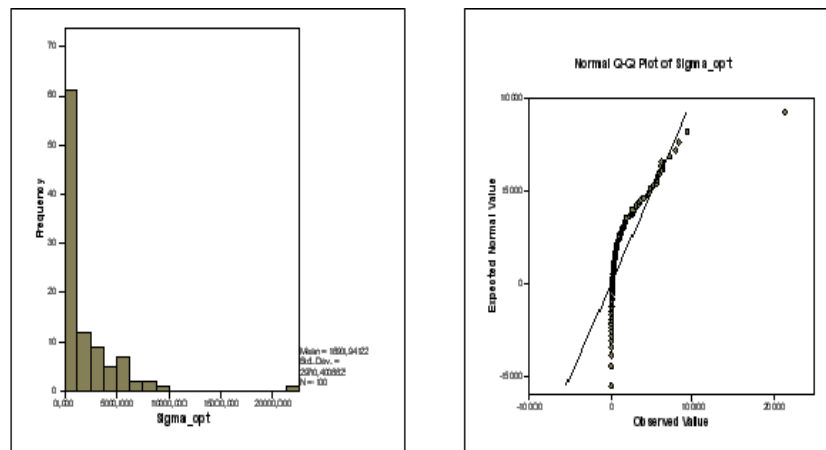


FIG. 4 – Répartition de la variance de l'estimateur de la prime ajustée optimale

statistique de la variance suit la loi de Pareto. Intuitivement cela se justifie par le graphique 5: Ces graphiques montrent que l'ajustement est licite en ce qui concerne le test graphique.

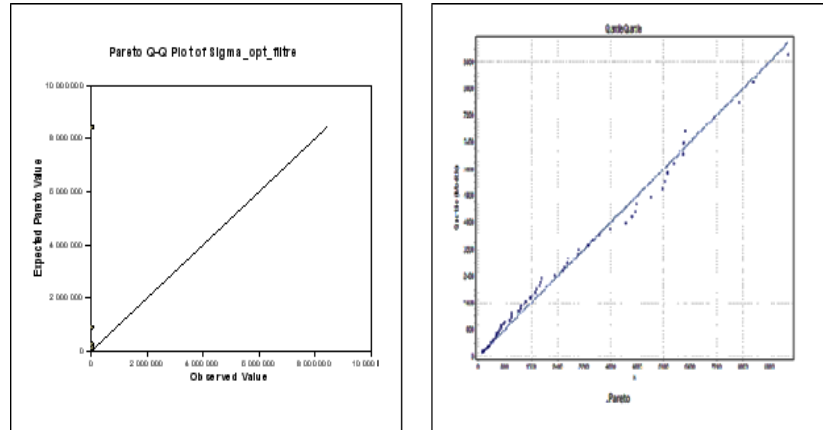


FIG. 5 – Pareto Q-Qplot

Le diagramme de Paréto (graphique 6) est utilisé pour résumer et afficher graphiquement l'importance relative des différences entre groupes de données. Ce diagramme est construit en segmentant les données en groupes. Il permet d'identifier les catégories de risques qui nécessitent la mise en place de stratégies de préventions et modes de calculs de la prime ajusté distincts. Cette loi permet aussi d'analyser l'évolution des degrés de l'incertitude des assureurs en fonction des valeurs de la variance. En effet, la représentation graphique montre qu'au-dessus d'une certaine valeur  $x_0$ , la répartition cumulative des résultats de la variance obtenus par l'AGS, une fois tracée sur un graphique Log-Log, forme une ligne presque droite. Cela conforter l'idée qu'il y a plus de risques avec une faible variance que de risques avec une variance élevée. Ce qui corrobore aussi la remarque de Gustav H. K. (1925); la répartition de Pareto se retrouve curieusement sur les grands risques, où 20% des sinistres pouvaient représenter 80% de la charge totale. Dans ce cas, les conclusions que nous avons obtenus de l'analyse statistique sont claires et montrent qu'il y a une situation favorable si les valeurs de la variance sont faibles et situation défavorable dans le cas contraire. Ces résultats (variances élevées) peuvent ne pas intéresser l'utilisateur, en matière de calcul de prime et suscitent l'utilisation d'une autre stratégie de réduction de celle-ci, plus adéquate. Etant donnée l'importance de ce problème, on propose une stratégie avantageuse de réduction de la variance afin de minimiser le souci de l'utilisateur. Cependant, la réduction de la variance peut être déterminée en introduisant une variance ciblée (qui correspond à la valeur retenue à partir du quelle la courbe de la distribution forme presque une droite), en cherchant à minimiser l'écart entre la vraie variance et une variance attractive déterminée selon le principe de Paréto, dans notre cas, et par lecture direct sur le graphique de Pareto, on a retenu la valeur  $x_0 = 7900$ . Puis, on conditionne la valeur  $p_i^*$  par les écarts réduits qui ne dépassant pas un certain seuil fixé  $e_0$  déterminé selon des considérations statistiques et économiques. Cette stratégie est présentée au cours du paragraphe suivant.



## Prime des risques extrêmes

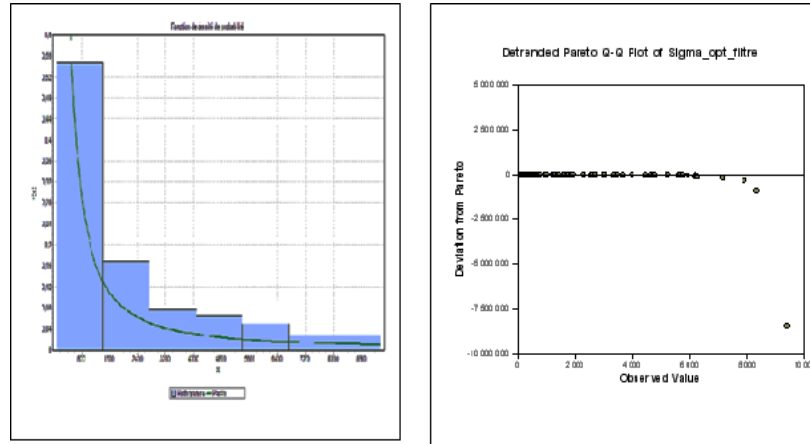


FIG. 6 – Fonction de densité de la loi de Paréto

Stratégie de choix optimal du paramètre  $p_i$  avec variance réduite de l'estimateur de la prime ajustée:

Afin d'obtenir des optima globaux correspondants à une variance de la prime ajustée, en présence d'une valeur ciblée désirable, nous proposons de résoudre un problème d'optimisation stochastique, constituant une autre variante du problème (Q), qui est donné par:

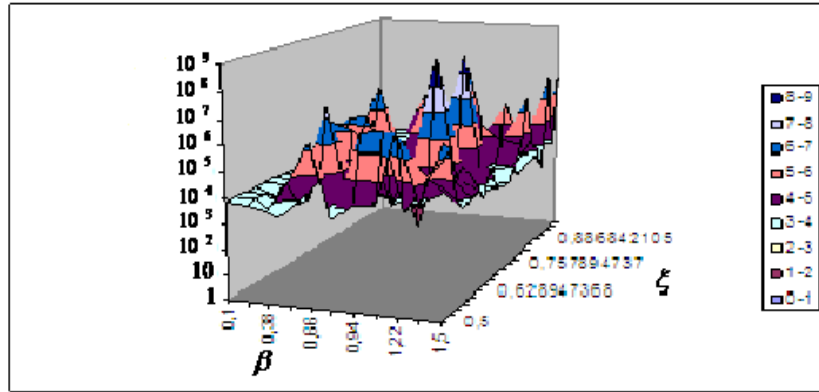
$$\min_{\xi, \beta, p} \{ \tilde{\sigma}^2(\xi, \beta, p) = |\sigma^2(\xi, \beta, p) - V_{attractive}| \}$$

où  $V_{attractive}$  est une valeur de la variance désirable. Les contraintes restent inchangées.

Cette formule commode permet de déterminer la variation minimale entre la vraie variance et la variance ciblée, quand on trouve des résultats de la variance de la prime ajustée très élevés. Si, par exemple, on suppose que la variance ciblée est égale à  $x_0$ , une réalisation probable de la solution optimale est donnée par: ( $p^* = 1.06$ ,  $\xi^* = -0.54$ , et  $\beta^* = 0,18$ ) et  $\tilde{\sigma}_{min}^2$  est de l'ordre de 7890 qui est relativement réduite par comparaison à la valeur ciblée de l'ordre de 7900, comme le montre les graphiques 7 et 8.

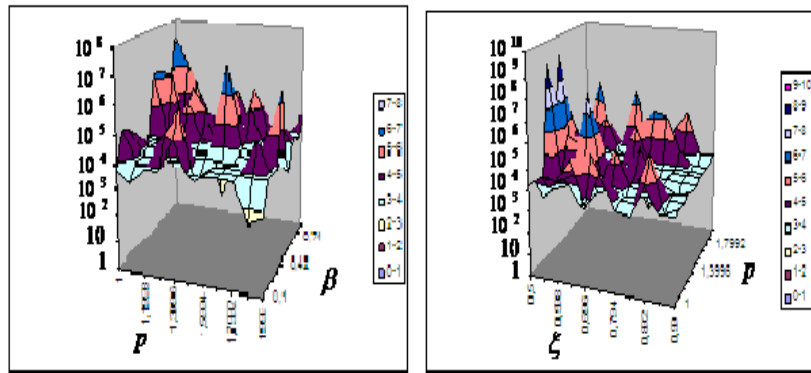
Ceci signifie que le problème stochastique de minimisation de l'écart absolu rend en même temps toutes les variances minimums presque stables et limitées par le seuil  $x_0$ , compte tenu des contraintes imposées.

Bien que les formules soient partiellement exactes, il est clair que  $\tilde{\sigma}_i^2$  est suffisamment petit (tableau 3), c'est la valeur de la variance ciblée qui est désirable et l'on voit qu'on peut trouver des valeurs d'écarts qui tendent à faire diminuer et presque stabiliser le niveau de l'incertitude de l'utilisateur. Il y a d'ailleurs un optimum que notre problème général ne permet pas de calculer, et il est intéressant de noter ici l'incidence de l'introduction de la variance attractive sur la stratégie du calcul de la prime ajustée pour les risques exceptionnels.



$$\xi^* = 0.5; \beta^* = 0.1; p^* = 106; \bar{\sigma}_{min}^2 = 7890.21$$

FIG. 7 – Courbes de configurations optimales des écarts stochastiques  $\bar{\sigma}_{min}^2(\xi^*, \beta^*, p^*)$  pour la variance ciblée à l'ordre de  $x_0$



$$\xi^* = 0.7; \beta^* = 0.4; p^* = 1.1; \bar{\sigma}_{min}^2 = 1952.54$$

$$\xi^* = 0.5; \beta^* = 0.3; p^* = 1.3; \bar{\sigma}_{min}^2 = 7891.72$$

FIG. 8 – Courbes de configurations optimales des écarts stochastiques  $\bar{\sigma}_{min}^2(\xi^*, \beta^*, p^*)$  pour la variance ciblée à l'ordre de  $x_0$

Prime des risques extrêmes

N° réalisation	$\xi^*$	$\beta^*$	$p^*$	$\tilde{\sigma}_{min}$	$\log(\log(\tilde{\sigma}))$
1	0,6	0,41	1,9	7570,55	0,58
2	0,58	0,43	1,98	7829,58	0,58
3	0,95	0,33	1,49	7846,94	0,57
4	0,64	0,1	1,64	7875,34	0,59
5	0,96	0,39	1,97	7812,07	0,58
6	0,54	0,35	1,98	57639,29	0,49
7	0,67	0,76	1,27	6431,72	0,53
8	0,8	0,85	1,34	7375,97	0,57
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
100	0,74	0,33	1,99	7738,82	0,58

TAB. 3 – Résultats des écarts absolues optimales de 100 réalisations obtenus par l'AGS

Il est utile d'étudier en détail les résultats empiriques obtenus (graphique 9) pour une stratégie

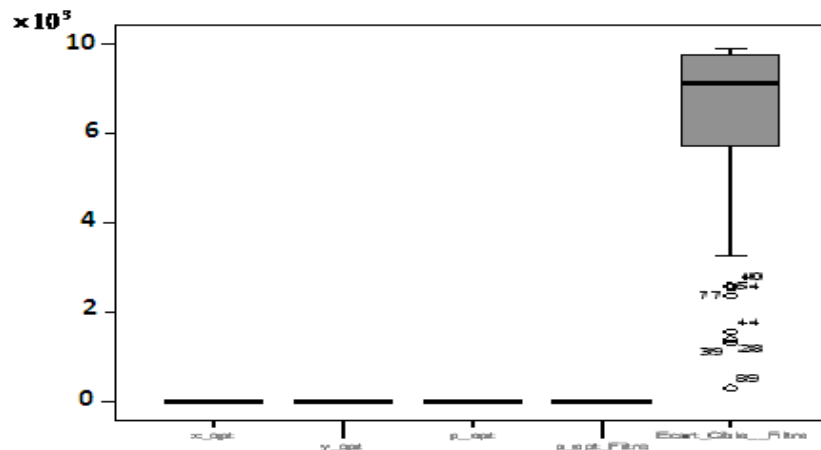


FIG. 9 – Box-plot de la distribution de l'écart absolu

du calcul des variances minimales suffisantes. Donc, graphiquement, on peut mentionner que les paramètres qui nous permettent d'arriver à des résultats optimaux, sont distribués sur une loi normale. Cela peut amener à effectuer un test de Kolmogorov-Smirnov pour cet ajustement (tableau 4).

Il est crucial de pouvoir montrer une bonne significativité (presque 42%, 20%, 35% respectivement pour les paramètres  $\xi_i^*$ ,  $\beta_i^*$ ,  $p_i^*$ ). Cela signifie que notre stratégie est performante du fait que les solutions optimales, d'un problème stochastique combinatoire de complexité exponentielle, sont approximativement distribuées sur une loi Gaussienne.

		$\xi^*$	$\beta^*$	$p^*$	Variance
N		100	100	100	100
Normal Parameters(a,b)	Mean	,7217	,4930	1,5341	6446,8684
	Std. Deviation	,12235	,22857	,30810	1826,10275
Most Extreme differences	Absolute	,087	,079	,091	,214
	Positive	,087	,067	,091	,214
	Negative	-,064	-,079	-,078	-,201
Kolmogorov-Smirnov Z		,868	,790	,862	2,026
Asymp. Sig. (2-tailed)		,438	,560	,447	,001

a: Test distribution is Normal.  
b: Calculated from data.

TAB. 4 – Résultats des tests statistiques

Représentation graphique de l'écart absolu:

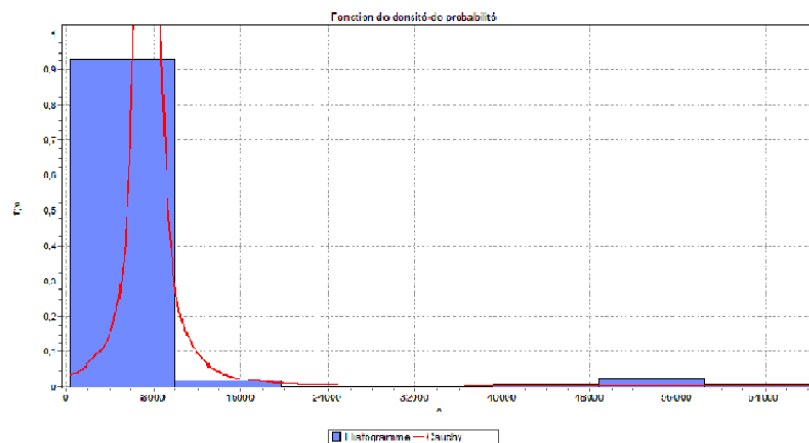


FIG. 10 – Fonction de distribution de la loi de Cauchy

Le graphique 10 montre un ajustement de la variabilité des résultats de l'écart absolu, obtenus par l'AGS, par une loi de Cauchy généralisée. Cet ajustement est très intéressant car il peut donner une bonne représentation de données réelles. De plus, le test de KHI-DEUX a justifié un bon ajustement par la loi de Cauchy, presque de l'ordre 24% de niveau de significativité.

D'une manière générale, on constate que les résultats de l'écart sont limités par la valeur de la variance ciblée. On peut donc noter que les variations des résultats de l'écart entre la vraie valeur et la valeur visée par l'assureur sont au plus inférieures que la valeur ciblée. En pratique,

## Prime des risques extrêmes

ces résultats soulignent la robustesse de la stratégie de réduction de la variance de l'estimateur de la prime ajustée. La simplicité et la rapidité de mise en œuvre ainsi que la plus grande maîtrise de la méthodologie confèrent à la procédure proposée ici un avantage indiscutable pour le réglage d'une fonction d'écart de type Cauchy.

Cette loi a une grande importance dans le système de prévention en présence des événements extrêmes, puisque les distributions stables peuvent être caractérisées à partir du théorème central limité. Une généralisation par Gnedenko & Kolmogorov (1954) indique que si la condition de variance finie n'est pas respectée, la seule loi limite possible de la somme de  $n$  variables aléatoires, est une loi stable.

Concrètement, cela signifie que le vrai problème économique ici est celui du niveau de pro-

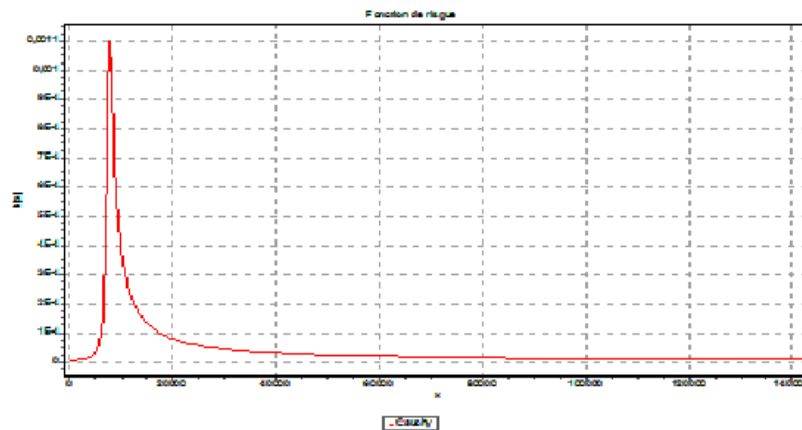


FIG. 11 – *Fonction de répartition de l'écart absolue*

tection. Ce qui est important à souligner, en revanche, c'est une relation beaucoup plus fondamentale entre cet écart et le niveau de la protection. On voit ainsi que le risque, ayant le plus grand écart en valeur absolue, peut être qualifié d'exceptionnel. La valeur de l'écart absolu est fortement croissante en fonction du degré de protection (graphique 11). Tout ceci rend délicate la mise en place d'un système de prévention, dont le volet "équité" ne doit pas être négligé. Cependant, la réussite de cette démarche permet de qualifier le risque et de conduire à une meilleure adaptation aux exigences des utilisateurs. Autrement dit, le calcul de la variance de l'estimateur de la prime ajustée incite les assureurs à être plus protégés contre les risques exceptionnels par le biais d'un régulateur stochastique (le paramètre de poids). Cela permet donc à l'assureur de discriminer ces produits par le biais d'un jeu de couvertures différentes, ce qui incite aussi les assurés à être plus prudents.

### *Comportement stochastique pour $p_{cond}$*

Le fait que les conditions de minimisation de la variance soient remplies, la performance de notre stratégie peut être vérifiée à partir de la réduction de l'écart absolu de la vraie variance et celle ciblée et il peut être utile éventuellement d'effectuer une transformation de manière à

rendre l'écart presque stable et limité par la valeur de la variance ciblée. Cependant, la résolution de ce problème nous amène en quelque sorte à régulariser le comportement du paramètre du poids conditionné par une variabilité inférieure à la variabilité relative à la variance ciblée de l'estimateur de la prime ajustée, en considérant  $p_i$  au lieu de  $p'_i$ , supposé toujours fonction stochastique définie par la relation:

$$p_i = \psi(u_i) = p'_i u; p'_i \geq 1$$

L'optimum aléatoire  $p_i^*$  conditionné par une variabilité faible du critère d'écart présente une variabilité normale justifiée par l'analyse statistique d'un échantillon d'optima globaux obtenus par l'AGS. La distribution bootstrap (c'est-à-dire la distribution des moyennes empiriques obtenues à partir des 10000 échantillons bootstrap) est représentée par le graphique 12:

Le caractère tout à fait normal de la distribution du paramètre optimal  $p_i^*; i = 1..100$ , con-

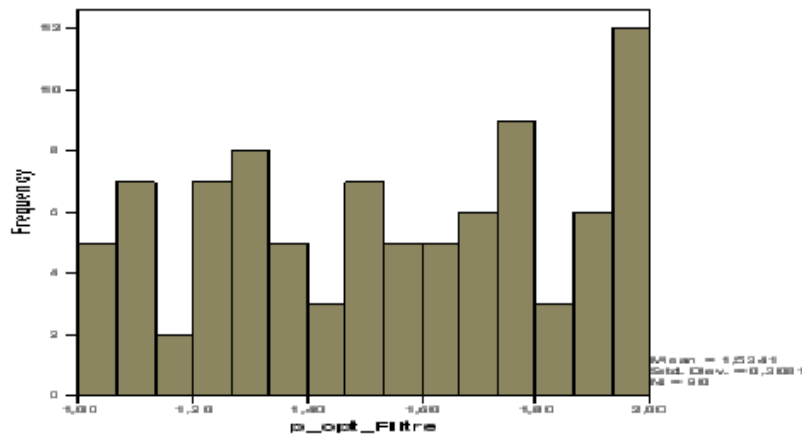


FIG. 12 – Histogramme du paramètre stochastique conditionnel  $p_{cond}$  pour 10000 échantillons bootstrap

ditionnelle aux écarts optimaux obtenus par l'AGS, nous conduit cependant à minimiser le doute sur les résultats de la variance de l'estimateur de la prime ajustée. Il est donc facile de proposer le test de Kolmogorov-Smirnov pour justifier l'ajustement de la variable aléatoire de ce paramètre  $(p_{cond})_i; i = 1..100$ .

Les résultats du tableau 5 montrent une approximation asymptotique significative. Il est donc très intéressant d'obtenir des valeurs de  $p_i^*$  qui se répartissent selon une courbe de Gauss. On remarque en effet que la variance est presque faible donc il s'agit d'une grande précision et l'intervalle de confiance bootstrap est de faible amplitude.

#### Prime d'optimalité des risques extrêmes

Il semble que la difficulté d'interprétation du caractère exceptionnel d'un risque a également un impact sur le comportement des organisations. Par exemple, les assureurs sont le plus

Prime des risques extrêmes

		$p^*$	
N		90	
	Mean	1,5341	
Normal Parameters(a,b)	Std. Deviation	,30810	
Most Extreme differences	Absolute	,091	
	Positive	,091	
	Negative	-,078	
Kolmogorov-Smirnov Z		,862	
Asymp. Sig. (2-tailed)		,447	
Monte Carlo Sig. (2-tailed)	Sig.	,424(c)	
	99% Confidence Interval	Lower Bound	,411
		Upper Bound	,437

a: Test distribution is Normal.  
b: Calculated from data.  
c: Based on 10000 sampled tables with starting seed 2000000.

TAB. 5 – Résultats des tests statistiques

souvent allergiques aux situations d’ambiguïté (univers incertain), dans lesquelles le montant des pertes éventuelles est difficilement calculable. Ils ont alors tendance à pratiquer des tarifs largement supérieurs à ceux relatifs à des risques clairement spécifiés. Par ailleurs, le système de préventions, considéré dans notre démarche, prises pour obtenir une réduction de l’ampleur des sinistres, quelle que soit leur origine, nous permet de réaliser un tableau de bord pour le calcul d’une prime ajustée à variance réduite, conditionnellement à un paramètre aléatoire  $p$ . Les lignes du tableau 6 comprennent des réalisations des vecteurs de solution optimale  $\{\xi_i^*, \beta_i^*, p_i^*\}_{i=1..53}$  solution optimale de la fonction écart  $\tilde{\sigma}^2(\xi^*, \beta^*, p^*)$  et la prime ajustée optimale  $\hat{\pi}_u$  correspondante à  $\tilde{\sigma}^2$ , calculée à l’aide de la formule suivante:

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{\frac{1}{p^*}} \frac{\beta^*}{\frac{1}{p^*} - \xi^*} \quad \text{avec} \quad \hat{\lambda} = \frac{N_u}{n}$$

où

$N_u$  est le nombre des excées au-delà du seuil  $u$

$n$  est la taille de l’échantillon de la population assurée

Les résultats du tableau 6 montrent que plus le point d’attachement se situe à un niveau élevé de sinistralité, plus la prime de risque exigée par l’assureur ou le réassureur augmente. D’où, pour pouvoir faire face à des sinistralités importantes, l’assureur peut proposer des contrats à prime variable. Tant que les utilisateurs se sont contentés de modéliser les risques, ils ont été brillants. C’est d’ailleurs ce que disait Emile Borel lorsqu’il écrivait, au sujet des compagnies d’assurances : "nous partons ainsi d’une base pratique assez solide pour que nous ayons dans la théorie la confiance qui peut être nécessaire pour ne pas avoir à tenir compte du scepticisme qui peut toujours être opposé à toute tentative d’explication rationnelle".

N° réalisation	$\xi^*$	$\beta^*$	$p^*$	$\tilde{\sigma}_{min}$	Prime pure
1	0,53	0,1	1,05	7768,56	1,84
2	0,85	0,1	1,03	2496,72	2,01
3	0,56	0,2	1,06	7691,03	4,49
4	0,56	0,37	1,27	7725,01	52,07
5	0,62	0,27	1,28	7853,98	54,99
6	0,54	0,36	1,32	5435,71	66,37
7	0,67	1,41	1,32	2673,73	738,32
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
53	0,57	1,17	1,7	6978,06	15661,65

TAB. 6 – Résultats de la prime optimale correspondante à des écarts absolus conditionnels obtenus par l'AGS

On présente ici le cas d'un échantillon de primes ajustées optimales obtenues par l'AGS (graphique 13).

Bien que le système de prévention réduise significativement la variabilité du résultat, l'histogramme

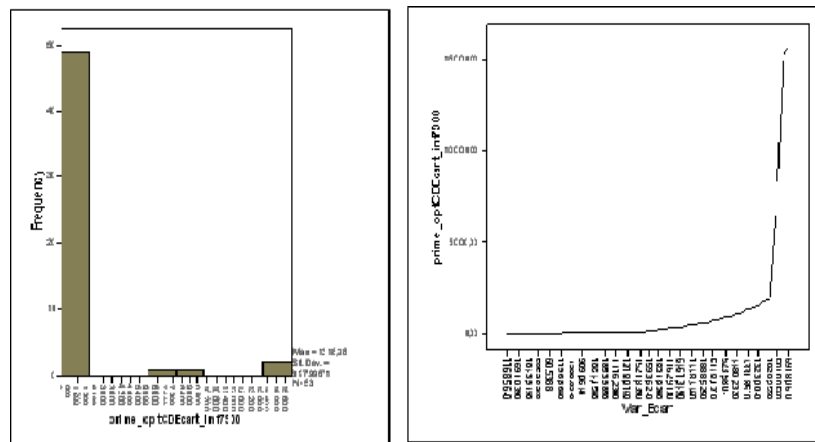


FIG. 13 – (a) Prime ajustée d'optimalité distribuée, (b) Réalisation de la Prime ajustée d'optimalité en fonction de l'écart conditionné par le paramètre  $p$

de la prime présente trois classes distinctes  $CL_i; i = 1, ..3$ . Parallèlement, le graphique 13 montre que l'évolution de la prime variable (par écart variable) est limitée par une droite. Dans ce cas, l'assureur doit veiller à ne pas céder trop de prime pour le niveau de risque qu'il souhaite couvrir.

Mais il s'agit là d'un autre problème, qui est l'adéquation entre la couverture et le risque:



## Prime des risques extrêmes

une sous-estimation dans les tarifs peut entraîner de graves difficultés pour l'assureur. A l'opposé, une surévaluation des tarifs est généralement à l'origine de l'incertitude, et le manque d'information peut nuire au rendement financier. L'assureur doit donc veiller à avoir des tarifs adéquats et une gestion adaptée de ses provisions techniques.

Cependant, on a constitué une prime corrigée d'équilibre appliquée à la catégorie des conducteurs extrêmement sinistrés. Après la mise en place du système de prévention peut être calculée selon la formule suivante:

$$\pi_{corg} = \sum_{i=1}^3 f_{cl_i} (\hat{\pi}_{max}^* - \hat{\pi}_{min}^*)_{cl_i}$$

Avec

$f_{cl_i}$  est fréquence de la classe  $cl_i$ ,

$\tau$  est le pourcentage des valeurs des écarts inférieurs à la valeur ciblée.

L'intérêt de cette formule est de diminuer le montant des primes d'assurance, ce qui permet à l'assureur de proposer des contrats plus adaptés à un moindre coût. Pour cela, la question de l'adéquation à la couverture du risque extrême est abordée de manière très synthétique. A noter qu'il est important de raisonner en termes de couverture moyenne. En effet, dans la mesure où l'utilisateur n'est pas satisfait économiquement par cette prime, il peut générer éventuellement des primes simulées, à l'aide de sa distribution obtenue.

### **Conclusion**

L'analyse des risques extrêmes en assurance a permis de mettre en évidence l'importance des différences de modélisations statistiques entre les risques "standards" et ceux "dangereux". En effet, on constate que la stratégie de pondération des sinistres extrêmes présente des phases de corrections afin d'obtenir une normalisation de ces événements, tout en conservant plus efficacement la présence de l'incertitude par le biais d'un régulateur aléatoire. Par ailleurs, cette stratégie tient compte davantage du système de prévention de la prime des risques extrêmes qui est basée sur la minimisation de la variance par la nouvelle approche d'algorithme hybride. Ainsi, l'utilisation de l'AGS pour la résolution du problème de minimisation de la variance sous contraintes liées aux caractéristiques des événements extrêmes, présente plusieurs avantages: la fiabilité, la précision, le temps, la robustesse et surtout la garantie de convergence en un point stationnaire (à un point global). Cette méthode a révélé une grande performance pour fournir des solutions approchées de bonne qualité pour des problèmes NP-difficiles.

L'application du système de prévention des risques extrêmes, au travers de la minimisation de la variance de l'estimateur de la prime ajustée par l'AGS, offre une grande efficacité pour le calcul d'un tarif raisonnable et acceptable aux assurés et assureurs. Si on peut généraliser la grande efficacité de cette approche pour un nombre de sinistres dangereux tendant vers l'infini, il existe en revanche, dans notre application, très peu d'observations permettant de comprendre la raison de cette efficacité. Cette question constitue sans doute un défi important qui dessine de nouvelles perspectives de recherches, notamment en matière de gestion dynamique de la prime de couverture des risques extrêmes en assurance non vie.

**Annex A** (Proof of the theorem.1)

Let  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , une suite de variables aléatoires indépendants et uniforme  $[0, 1]$ .  
 Pour tout  $n \geq 1$ , la fonction empirique du quantile est défini par

$$V(t) = \xi_{i,n}, \quad \text{for } (i-1)/n < t \leq i/n, \quad i = 1, \dots, n,$$

Avec  $V(0) = \xi_{1,n}$ , où  $\xi_{1,n} \leq \dots \leq \xi_{n,n}$ . Assume without loss of generality, that the random variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  est défini par l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  which carries the sequence  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  is such a way that  $X_n = Q(\xi_n)$ , pour  $n = 1, 2, \dots$ , et, consequently,  $X_{i,n} = Q(\xi_{i,n})$  for all  $1 \leq i \leq n$  and  $n \geq 1$ . On montre que  $\forall n \geq 1$ , on a  $V(1 - i/n) = \xi_{n-i+1,n}$ , et  $Q(V_n(1 - i/n)) = X_{n-i+1,n}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . On peut déduire

$$\hat{\pi}_{u_n} = (k/n)^{1/p} \left\{ \int_0^1 s^{1/p-1} Q_n(1 - ks/n) ds - X_{n-k,n} \right\}.$$

D'autre part, pour  $s^{1/p} Q(1-s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$ , il est facile de vérifier, par intergration par partie, le résultat suivant:

$$\pi_{u_n} = p^{-1} (k/n)^{1/p} \int_0^1 s^{1/p-1} Q(1 - ks/n) ds - (k/n)^{1/p} Q(1 - k/n).$$

On peut montrer donc

$$\frac{(k/n)^{-1/p} k^{1/2}}{Q(1 - k/n)} \{ \hat{\pi}_{u_n} - \pi_{u_n} \} = T_n^* - S_n^*,$$

où

$$T_n^* := p^{-1} k^{1/2} \int_0^1 s^{1/p-1} \frac{Q_n(1 - ks/n) - Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} ds,$$

et

$$S_n^* := k^{1/2} \frac{X_{8n-k,n} - Q(1 - k/n)}{Q(1 - k/n)}.$$

On a

$$\begin{aligned} T_n^* &= p^{-1} k^{1/2} \int_0^1 s^{1/p-1} \frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} \left[ \frac{Q_n(1 - ks/n)}{Q(1 - ks/n)} - 1 \right] ds \\ &= \tilde{T}_n + T_n, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{T}_n := p^{-1} k^{1/2} \int_0^{1/k} s^{1/p-1} \frac{Q(1 - ks/n)}{Q(1 - k/n)} \left[ \frac{Q_n(1 - ks/n)}{Q(1 - ks/n)} - 1 \right] ds,$$

Prime des risques extrêmes

et

$$T_n := p^{-1}k^{1/2} \int_{1/k}^1 s^{1/p-1} \frac{Q(1-ks/n)}{Q(1-k/n)} \left[ \frac{Q_n(1-ks/n)}{Q(1-ks/n)} - 1 \right] ds$$

Cependant, pour  $T_n$ , on peut écrire

$$T_n := T_{1n} + T_{2n} + T_{3n},$$

où

$$\begin{aligned} T_{1n} : &= p^{-1}k^{1/2} \int_{1/k_n}^1 s^{1/p-1} \frac{Q(1-ks/n)}{Q(1-k/n)} \\ &\times \left[ \frac{Q_n(1-ks/n)}{Q(1-ks/n)} - \left( \frac{1-V_n(1-ks/n)}{ks/n} \right)^{-\xi} \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{2n} : &= p^{-1} \int_{1/k_n}^1 s^{1/p-1} \left[ \frac{Q(1-ks/n)}{Q(1-k/n)} - s^{-\xi} \right] \\ &\times \left[ \left( \frac{1-V_n(1-ks/n)}{ks/n} \right)^{-\xi} - 1 \right] ds \end{aligned}$$

$$T_{1n} := p^{-1}k^{1/2} \int_{1/k_n}^1 s^{1/p-1} \left[ \left( \frac{1-V_n(1-ks/n)}{ks/n} \right)^{-\xi} - 1 \right] ds$$

Pour  $T_{3n}$ , on a

$$T_{3n} := p^{-1}k^{1/2}(k/n)^\xi \int_{1/k_n}^1 s^{1/p-1} \left\{ (1-V_n(1-ks/n))^{-\xi} - (sk/n)^{-\xi} \right\} ds.$$

On montre que  $T_{3n}$  peut se déterminer par

$$T_{3n} := p^{-1}(k/n)^{\xi-1/p} k^{1/2} \int_{1/n}^{k/n} s^{1/p-1} \left\{ (1-V_n(1-s))^{-\xi} - s^{-\xi} \right\} ds.$$

Notant que  $1-V_n(1-s) \stackrel{\mathcal{D}}{=} V_n(s)$ . Après simplification, on obtient que

$$T_{3n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} p^{-1} \xi (k/n)^{\xi-1/p} k^{1/2} \int_{1/n}^{k/n} s^{1/p-1} (s + \xi_{s,n})^{-\xi-1} \times \{V_n(s) - s\} ds,$$

avec  $|\xi_{s,n}| \leq |V_n(s) - s|$ ,  $1/n \leq s \leq k/n$ . Soit  $\theta_n := (k/n)k^{\frac{-\delta-1/2}{1/p-\xi}}$ ,  $0 < \delta < 1/2$ , une suite de nombre réelle et positive qui peut satisfaire  $1/n < \theta_n < k/n$ . En effet,  $T_{3n}$  peut être composé en deux parties

$$T_{3n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} p^{-1} \xi (k/n)^{\xi-1/p} k^{1/2} \int_{1/n}^{\theta_n} s^{1/p-1} (s + \xi_{s,n})^{-\xi-1} \{V_n(s) - s\} ds$$

$$+ p^{-1}\xi(k/n)^{\xi-1/p}k^{1/2} \int_{\theta_n}^{k/n} s^{1/p-1}(s + \xi_{s,n})^{-\xi-1}\{V_n(s) - s\}ds$$

Néanmoins, en utilisant les résultats obtenus par Greeneboom & al. (2003) et Csörgő, Horváth & Mason (1986), Necir & Boukhetala arrivent à démontrer que

$$T_{3n} =^{\mathcal{D}} (1 + o_p(1))p^{-1}\xi \int_0^1 s^{1/p-\xi}W_n(s)ds \quad \forall n.$$

Ce qui revient à écrire

$$S_n^* =^{\mathcal{D}} (1 + o_p(1))p^{-1}\xi W_n(1) \quad \forall n.$$

où  $W_n(\cdot)$  est une suite de mouvement Brownian standard. d'autre part, en utilisant la fonction à variation régulière du second ordre, on peut montrer que

$$\tilde{T}_n = T_{1n} = T_{2n} = o_p(1) \quad \forall n.$$

(Pour plus de détail voir de Haan & al. (2001) et Wellner (1978))

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(k/n)^{-1/p}k^{1/2}}{Q(1-k/n)}\{\hat{\pi}_{u_n} - \pi_{u_n}\} &=^{\mathcal{D}} p^{-1}\xi \left\{ \int_0^1 s^{1/p-\xi-1}W_n(s)ds - W_n(1) \right\} \\ &+ o_p(1), \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pour  $W_n(\cdot)$  est une suite de mouvement Brownian standard, Cela implique que

$$\frac{(k/n)^{-1/p}k^{1/2}}{Q(1-k/n)}\{\hat{\pi}_{u_n} - \pi_{u_n}\} =^{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(p, \xi)), \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

où

$$\sigma^2(p, \xi) := p^{-2}\xi^2 C^2(p, \xi),$$

avec

$$C^2(p, \xi) := \text{var}\left\{ \int_0^1 s^{1/p-\xi-1}W_n(s)ds - W_n(1) \right\}.$$

Soit  $\lambda := 1/p - \xi$ . Pour  $EW_n(u)W_n(v) = \min(u, v)$ , alors

$$\begin{aligned} C^2(p, \xi) &= \int_0^1 \int_0^1 t^{\lambda-1} s^{\lambda-1} E\{W_n(t)EW_n(s)\}dsdt + E\{W_n(1)\}^2 \\ &- 2 \int_0^1 s^{\lambda-1} E\{W_n(s)W_n(1)\}ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 t^{\lambda-1} s^{\lambda-1} \min(s, t)dsdt + 1 - 2 \int_0^1 \int_0^1 s^{\lambda-1} sds \end{aligned}$$

Prime des risques extrêmes

$$C^2(p, \xi) = \begin{cases} \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda(\lambda + 1)}, & \text{for } \lambda \neq 0 \\ 1, & \text{for } \lambda = 0. \end{cases}$$

### Annex B

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. de même loi  $F$ . Pickands (1975) a introduit la loi GPD pour analyser le comportement asymptotique des excès qui sont définis par  $y_i = x_i - \mu/X > u$ , avec  $u$  représente un seuil bien choisi.

Dans les modèles à seuil, la probabilité conditionnelle est définie par:

$$p(X > u + y/x > u) = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}$$

Pour cela, on introduit la fonction de distribution des excès par rapport à un seuil  $u$ :

$$F_u(y) = p(X - u \leq y/X > u)$$

Pour  $0 \leq y < x_F - u$  avec  $x_F = \sup\{x \in \mathcal{R} : F(x) < 1\}$  La fonction des excès représente la probabilité que la variable aléatoire  $X$  dépasse le seuil  $u$ . On peut écrire cette fonction de distribution sous la forme.

$$F_u(y) = 1 - \left[ \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} \right] = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}$$

La loi des excès au-delà d'un seuil  $u$  est asymptotiquement une loi de Pareto généralisée (GPD), le théorème de Pikands affirme que la fonction de distribution GPD est:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi y}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\sigma}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec  $y \in [0, x_F - u]$  si  $\xi \geq 0$ ,  $y \in [0, \text{Min}(-\sigma/\xi, x_F - u)]$ , si  $\xi < 0$ , et si  $\xi \rightarrow 0$ ,  $G_{\xi, \beta}(y)$  est approximée par la distribution exponentielle avec  $\beta$  correspond à la moyenne.

Afin d'estimer les paramètres  $\beta$  et  $\xi$  de la distribution  $G_{\xi, \beta}(y)$ , on détermine la fonction vraisemblance comme:

$$l(\beta, \xi) = -n \log \beta - (1 - 1/\xi) \sum_{i=1}^k \log(1 - \xi y_i / \xi),$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\beta$  et  $\xi$  sont déterminés par les solutions du système d'équation suivant:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + \xi \frac{x_i}{\sigma}) = \xi$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i / \sigma}{1 + \xi x_i \sigma} = \frac{1}{1 + \xi}$$

Pour plus de détails voir Hosking & Wallis (1978), Embrechets, Klüpperberg & Mikosh (1997).

**annex C**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite de risques indépendants et identiquement distribués, de distribution commune  $F$ , telle que

$$\bar{F}(x) = cx^{-\frac{1}{\xi}}(1 + x^{-\beta}L(x)) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty$$

pour  $\xi \in [0, 1]$ ,  $\beta > 0$ , une constante  $c$  et  $L(\cdot)$  une fonction à variation lente. On peut écrire la prime ajustée définit dans l'équation (4.2) comme

$$\pi_u(X) = \int_u^\infty (1 - F(y + u))^{1/p} dy$$

On peut montrer que

$$\bar{F}(y + u) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y)$$

On peut déduire

$$\pi_u(X) = \int_u^\infty (\bar{F}(u)\bar{F}_u(y))^{1/p} dy.$$

Donc, l'estimateur de la prime ajustée s'écrira:

$$\hat{\pi}_u(X) = \int_u^\infty (\hat{F}(u)\hat{F}_u(y))^{1/p} dy.$$

Un estimateur naturel de  $\bar{F}(u)$  est donné en fonction de la distribution empirique,

$$\hat{\lambda} = \hat{F}(u) = \bar{F}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i > u} = \frac{N_u}{n}$$

où  $N_u$  est le nombre des excès au-delà du seuil  $u$ . Dans l'autre coté, le théorème de Pickands (1975) montre que la queue des excès est approximée par la distribution de Pareto généralisée

$$\hat{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y).$$

Alors

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{\frac{1}{p}} \int_0^\infty (\bar{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y))^{1/p} dy.$$

Ce qui revient à écrire,

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{\frac{1}{p}} \int_0^\infty [(1 + \xi \frac{\hat{y}}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\xi}}]^{1/p} dy$$

Prime des risques extrêmes

On peut écrire cet estimateur sous forme d'une espérance

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{1/p} \int_0^\infty \frac{1}{\hat{\beta}} \left(1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}}\right)^{\frac{-1}{\hat{\xi}} - 1} \hat{\beta} \left(1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}}\right)^{\frac{-1}{\hat{\xi}} (\frac{1}{p} - 1) + 1} dy$$

D'où

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\beta} \hat{\lambda}^{1/p} E\left(\left(1 + \hat{\xi} \frac{Y}{\hat{\beta}}\right)^{-r}\right),$$

où  $Y \sim GPD(\hat{\xi}, \hat{\beta})$  and  $r = \frac{1}{\hat{\xi}} (\frac{1}{p} - 1) - 1$ .

Sous la condition que  $r > -\frac{1}{\hat{\xi}}$ , on a

$$E\left(\left(1 + \hat{\xi} \frac{Y}{\hat{\beta}}\right)^{-r}\right) = \frac{1}{1 + \hat{\xi} r}$$

Pour  $\hat{\xi} \leq \frac{1}{p} \leq 1$ , l'estimateur de la prime ajustée peut déterminer par

$$\hat{\pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{\frac{1}{p}} \frac{\hat{\beta}}{\frac{1}{p} - \hat{\xi}}$$

## References

- Blondeau J. & Partrat C. (2003). La Réassurance : approche technique. Economica, Paris, France
- Camp C., Pezeshk S. & Cao G. (1998). Optimized design of two-dimensional structure using genetic algorithm, Journal of Structural Engineering, Vol. 124, p.551-559
- Centeno, M.L. & Guerra, M. (2010). The optimal reinsurance strategy: the individual claim case. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 46, p.450-460
- Charpentier A. (2009). Les modèles en réassurance. Risque, Vol. 80, p.36-41
- Chemarin S. (2005). Couverture des risques catasrophiques potentiels: Vers une théorie économique de l'assurabilité en incertitude. Assurances et gestion des risques, Vol. 73
- Chemarin S., Henry C. & E. Michel-Kerjan E. (2005). Incertitude, Précaution et Assurabilité. Commissariat Général au Plan.
- Chen S.Y. & Rajan S.D. (2000). A robust genetic algorithm for structural optimization. Structural Engineering & Mechanics Journal, Vol. 10, p.313-336
- Chiappori P.A. (1996). Risque et assurance. Dominos, Flammarion, Paris
- Cummins J.D. (1992). Financial Pricing Of Property And Liability Insurance. Dans Dionne G.(ed.) Contributions to Insurance Economics, Boston, Kluwer Academic Press, p141-169
- David C.M. Dickson (2005). Insurance Risk and Ruin . Cambridge University Press (CUP). ISBN0-521-846404
- De Haan L. & Ferreira A. (2006). Extreme Value Theory. An Introduction. Springer, New York.

- Deelstra G. & Plantin G. (2006). *Théorie du Risque et de la Réassurance*. Economica, Paris
- Denuit M. & Charpentier A. (2005). *Mathématiques de l'assurance non-vie : Tarification et provisionnement*. Economica, Paris
- Embrechts P., Claudia K. & Thomas M. (1997). *Modelling Extremal Events For Insurance and Finance*. Springer. 1st ed, New York.
- Fersi K., Benlagna N. & Ben Ammou S. (submitted (2009)). The insurability of risks: A quantitative approach applied to motor insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*
- François C. & Constant E. (2009). *Les grands principes de l'assurance*. Argus de l'assurance, France
- Gnedenko B.V. & Kolmogorov A.N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley, MA, Cambridge
- Goldberg D. (1989). *Genetic Algorithm In Search, Optimization And Machine Learning*. Addison-Wesley
- Goovaerts M., De Vylder F. & Haezendonck J. (1984). *Insurance Premiums*. North-Holland, VII + 398
- Gollier, C., Hilton D.J. and Raufaste E. (2003). Daniel Kahneman et l'analyse de la décision face au risque, *Revue d'Economie Politique*, N°113. Vol 3, p. 295-307
- Griselda D. & Guillaume P. (2006). *Théorie du risque et réassurance*. Economica, Paris
- Hageman J.A., Wehrens R., Van Sprang H.A. & Buydens L.M.C. (2003). Hybrid genetic algorithm tabu search approach for optimising multilayer optical coatings. *Analytica Chimica Acta*, Vol. 490, p.211-222
- Jean M. R. (1995). *Algorithmes génétiques & réseaux de neurones*. Hermès, Paris
- Krishnamoorthy C.S., Venkatesh P.P. & Sudarshan R. (2002). Object-oriented framework for genetic algorithms with application to space truss optimization. *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 16, p.66-75
- McNeil A.J. (1997). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. *ASTIN Bulletin* n°27, p. 117-137
- Necir A. & Boukhetala K. (2004). Estimating the risk-adjusted premium for the largest claims reinsurance covers. *COMPSTAT'2004. Proceeding in Computational Statistics*. ISBN 3-7908-1554-3, Physica-Verlag, Heidelberg, New York. Springer
- Necir A., Boukhetala K. & Cherfi M. (2005). Estimating the Risk-Adjusted Premium of Loss Using the POT Model. *Prépublication, Faculté de Mathématiques d'Alger, Algérie*.
- Ohlsson E. & Johansson B. (2010). *Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models*. EAA series
- Picard P. (2002). L'assureur face à la théorie du risque. *Risque*, Vol. 49, p.61-63
- Partrat C. & Besson J.L. (2005). *Assurance non-vie, modélisation, simulation*. Economica. Paris
- Petauton P. (2004). *Théorie et Pratique de l'Assurance Vie*. Dunod
- Rajaev S. & Krishnamoorthy C.S. (1992). Discrete optimization of structures using genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, p.1233-1250



## Prime des risques extrêmes

- Rootzen H. & Tajvidi N. (1997). Extreme value statistics and wind storm losses: a case study. *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 1, p.70-94. This paper has also appeared in the book "Extremes and Integrated Risk Management" published by Risk Books, Risk Waters Group, (2000), p.215-234
- Tassi P. (2004). *Méthodes Statistiques*. ESA, Economica, Paris
- Togan V. & Daloglu A. (2006). Optimization of 3D Trusses with Adaptive Approach in Genetic Algorithms. *Engineering Structures*, Vol. 28, p.1019-1027
- Tosseti A. & al. (2002). *Assurance : Comptabilité, Réglementation, Actuariat*. Economica, Paris
- Wang S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, Vol. 26, p.71-92
- Wang S. (2000). A Class of Distorsion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 67, p.15-36
- Wang S. (2002) Pricing of Catastrophe Bonds. In *Alternative Risk Strategies*, Lane M. (Ed), Risk Books (2003)
- Wang S. (2004). Cat Bond Pricing Using Probability Transforms. p.19-29, *Insurance and the State of the Art in Cat Bond Pricing*, Geneva Papers 278 (2004), Switzerland
- Wills S.& Sherris M. (2010). Securitization, structuring and pricing of longevity risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 46, p.173-185
- Yu X. & Gen M. (2010). *Introduction to Evolutionary Algorithms*. Springer, Berlin
- Young V. (1999) Discussion of Christofides's Conjecture regarding Wang's Premium Principle. *ASTIN Bulletin*, Vol. 29, p.191-195
- Youssef H., Sadiq M.S. & Adiche H. (2001). Evolutionary algorithms, simulated annealing and tabu search: a comparative study, *Engng. Appl. Artificial Intellingence*, Vol. 14, p.167-181
- Zajdenweber D. (2000). *Economie des extrêmes*, Flammarion, Paris.

#### Biblioweb

Site du Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission. COSO, (2009), [www.coso.org](http://www.coso.org)

Site d'EMB France - Solvabilité II, (2009-2010), [www.emb.com](http://www.emb.com)

Site des dossiers techniques d'information Optimind "Solvabilité II et les modèles internes", [www.optimind.fr](http://www.optimind.fr)

## Résumé

L'estimateur de la prime ajustée développée par Necir & Boukhetala (2004) est considéré. Le problème de la réduction de la variance de cet estimateur est formulé en un programme d'optimisation non linéaire stochastique avec contraintes stochastiques. Un algorithme Génétique hybride est employé pour la recherche de solutions optimales globales, statistiquement explorables. Une application à l'assurance automobile est développée.