



HAL
open science

Stabilité des structures et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique

Sébastien Baguet, Bruno Cochelin

► **To cite this version:**

Sébastien Baguet, Bruno Cochelin. Stabilité des structures et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique. CSMA 2001, 5ème colloque national en calcul des structures, May 2001, Giens (Var), France. 8pp. hal-00623493

HAL Id: hal-00623493

<https://hal.science/hal-00623493>

Submitted on 15 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilité des structures et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique

S. Baguet, B. Cochelin

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique CNRS UPR 7051,
Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, IMT Technopôle de Château Gombert, 13451 Marseille Cedex 20
baguet@mn.esm2.imt-mrs.fr; cochelin@mn.esm2.imt-mrs.fr

Résumé — Ce travail concerne la détermination directe des branches de points limites pour des problèmes non-linéaires dépendant de deux paramètres. Ces branches sont les solutions d'un système non-linéaire augmenté que l'on résout à l'aide de la Méthode Asymptotique Numérique, bien connue pour sa robustesse. L'objectif est l'étude de la réduction de charge critique de flambement pour des structures avec imperfection.

Mots clés — Méthode Asymptotique Numérique, élastodynamique non linéaire, intégration temporelle, algorithme adaptatif, éléments finis.

1 Introduction

Afin de réduire les coûts, l'objectif en design de structures est de concevoir les structures les plus résistantes possibles pour un poids minimum. Le choix du matériau et l'utilisation de techniques d'optimisation de plus en plus perfectionnées permettent de remplir ces critères. Cependant, cela conduit très souvent à des structures très élancées pour lesquelles la stabilité devient un problème primordial.

Cette étude de stabilité est d'autant plus complexe que ce genre de structures est très sensible aux imperfections. En effet, un défaut peut avoir un effet catastrophique sur la structure en réduisant considérablement la charge limite qu'elle peut supporter avant son effondrement. Ainsi, un défaut apparemment anodin peut entraîner le flambement, et donc la ruine de la structure pour une valeur bien inférieure à celle prédite par la théorie pour la même structure sans défaut. De tels défauts sont très courants. Ils peuvent être induits par le processus de fabrication de la structure ou encore par un choc ou par l'usure du matériau. On sera alors confronté, par exemple, à un défaut de forme ou d'épaisseur. C'est l'influence de ce type de défaut sur la réduction de charge critique que l'on se propose d'étudier ici.

Cette étude de sensibilité fait appel à deux types de problèmes. D'une part, il s'agit de déterminer la courbe d'équilibre de la structure et de détecter précisément le point singulier correspondant à la charge critique. C'est un problème classique de post-flambement que l'on peut représenter, dans le cas de l'élasticité linéaire en quasi-statique, par le système à un paramètre

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\lambda) = 0 \quad (1)$$

où \mathbf{f} représente les forces internes relatives au déplacement \mathbf{u} , $\mathbf{p}(\lambda)$ les forces externes appliquées à la structure et λ le paramètre de charge. Le calcul de la branche d'équilibre, i.e. la résolution de (1), s'effectue généralement à l'aide d'une méthode incrémentale-itérative de la famille Newton-Raphson. Le second problème concerne la sensibilité de la structure aux imperfections. Il s'agit de voir comment le point limite qui correspond à la charge critique se déplace lorsque l'on introduit une imperfection dans la structure. Une analyse simple de sensibilité consiste à calculer les courbes d'équilibre pour différentes amplitudes Λ de l'imperfection et à détecter le point limite correspondant à la charge critique sur chacune d'elle. Ces courbes sont représentées sur la Figure (1). Si elle a le mérite d'être simple à mettre en œuvre, cette méthode est très coûteuse puisqu'elle nécessite un calcul complet sur la structure, i.e. une résolution de (1), pour chaque point limite que l'on souhaite obtenir.

Afin de réduire le coût de calcul, il est plus judicieux de déterminer un premier point limite puis, à partir de ce point de départ, de suivre directement la branche constituée des points limites lorsque la valeur de l'imperfection varie. Pour cela, l'amplitude Λ de l'imperfection doit devenir un paramètre

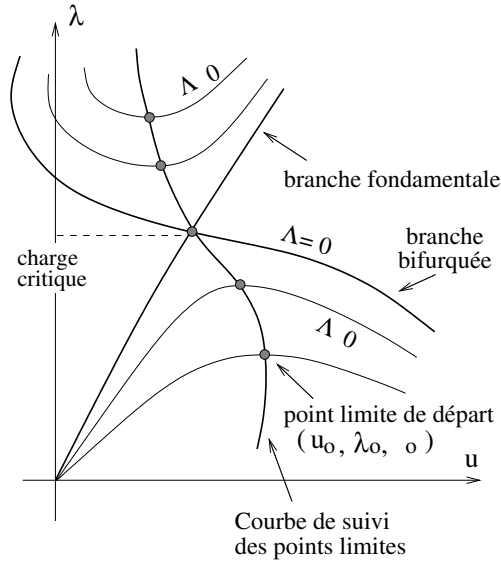


FIGURE 1 – Courbes d’équilibre pour la structure parfaite et avec imperfection, et branche de suivi de points limites

additionnel dans l’équation d’équilibre de la structure. Ainsi le problème (1) devient un problème à deux paramètres de la forme

$$F(u, \lambda, \Lambda) = f(u, \Lambda) - p(\lambda) = 0 \quad (2)$$

L’espace (u, Λ, λ) est alors de dimension $N+2$, et les courbes d’équilibre “charge-déplacement” classiques deviennent des surfaces “charge-imperfection-déplacement”. Sur ces surfaces, on cherche à déterminer directement les branches de points critiques qui donnent l’évolution de la charge maximale en fonction de l’imperfection. Pour ce faire, on ajoute à l’équation d’équilibre une condition supplémentaire qui caractérise les points limites et le système à deux paramètres (2) est transformé en un système dit “augmenté”

$$R(u, \lambda, \Lambda) = \begin{pmatrix} F(u, \lambda, \Lambda) \\ G(u, \Lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

Ce système augmenté a déjà été étudié, entre autres, par Jepson et Spence [1], Wagner et Wriggers [2] et Eriksson et. al [3] à l’aide de méthodes incrémentales-itératives classiques. L’originalité de ce travail réside dans l’utilisation de la Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.) pour la résolution numérique du problème. Cette méthode s’appuie sur les anciennes techniques de perturbations développées par Thompson et Walker [4]. Elles ont été remises au goût du jour par Cochelin, Damil et Potier-Ferry [5][6][7] qui les ont couplées à la méthode des éléments finis pour en faire un algorithme numérique très performant.

2 Suivi de branches de points limites

Cette section est consacrée au calcul de la courbe qui relie tous les points limites lorsque l’amplitude de l’imperfection varie. On suppose pour cela que l’on a déjà calculé un point limite de départ. Cette étape préliminaire consiste à tracer une branche d’équilibre pour une valeur fixée de l’imperfection et à y détecter le point limite correspondant à la charge critique. Cette étape ne sera pas détaillée ici. Sa résolution à l’aide de la Méthode Asymptotique Numérique est désormais bien maîtrisée et le lecteur en trouvera le détail dans [8][9]. On s’intéresse ici plus particulièrement à la deuxième étape qui consiste à suivre la branche de points limites. Pour cela, on va ajouter au système non linéaire à deux paramètres (2) des informations supplémentaires qui caractérisent les points limites.

2.1 Le système augmenté

Plusieurs alternatives ont été proposées dans la littérature en ce qui concerne le choix de ces informations supplémentaires mais la plus efficace d'un point de vue numérique traduit l'apparition d'une valeur propre nulle pour l'opérateur tangent aux points critiques. On obtient alors le système augmenté suivant

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \Lambda, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{u}, \Lambda, \lambda) \\ \mathbf{F}_{,u}(\mathbf{u}, \Lambda, \lambda) \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ \|\boldsymbol{\varphi}\| - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \Lambda) - \lambda \mathbf{F}_e \\ \mathbf{f}_{,u}(\mathbf{u}, \Lambda) \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ \|\boldsymbol{\varphi}\| - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\varphi}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle. La dernière équation de normalisation assure l'unicité de la solution.

2.2 Résolution par la Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.)

Le principe consiste à chercher les branches de solutions de (4) sous forme de séries entières par rapport à un paramètre de chemin a bien choisi

$$U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots + a^nU_n \quad (5)$$

où $U = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \lambda, \Lambda\}^t$ et U_0 est un point solution régulier connu. En s'inspirant des méthodes à "longueur d'arc", on définit a par

$$a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 + (\Lambda - \Lambda_0)\Lambda_1 \quad (6)$$

En reportant ces développements en séries dans le système non-linéaire de départ (4) et en identifiant les puissances de a , on obtient une succession de problèmes linéaires bien posés. Après discrétisation par éléments finis, le système linéaire à l'ordre p s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & 0 & \mathbf{F}_1 & -\mathbf{F}_e \\ \mathbf{K}_\varphi & \mathbf{K}_T & \mathbf{F}_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varphi}_0^t & 0 & 0 \\ \mathbf{u}_1^t & 0 & \Lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \boldsymbol{\varphi}_p \\ \Lambda_p \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^{nl} \\ \mathbf{G}_p^{nl} \\ h_p^{nl} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (N \text{ éq.}) \\ (N \text{ éq.}) \\ (1 \text{ éq.}) \\ (1 \text{ éq.}) \end{array} \quad (7)$$

Dans le cas d'une structure sans défaut initial, l'expression de la matrice de rigidité tangente \mathbf{K}_T est donnée par

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_0) = \mathbf{f}_{,u}(\mathbf{u}_0) = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^t(\mathbf{u}_0) \mathbf{D} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{G}^t \hat{\mathbf{S}}_0 \mathbf{G}) d\Omega \quad (8)$$

avec $\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u})$ où \mathbf{B}_l et $\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u})$ sont les parties linéaires et non-linéaires du tenseur des déformations de Green-Lagrange [10]. La matrice $\hat{\mathbf{S}}_0$ contient les composantes du tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff II \mathbf{S}_0 associé à \mathbf{u}_0 et \mathbf{D} est la matrice classique des constantes d'élasticité. En utilisant les mêmes notations, l'expression de \mathbf{K}_φ est

$$\mathbf{K}_\varphi(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_0) = \mathbf{f}_{,uu} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^t(\mathbf{u}_0) \mathbf{D} \mathbf{B}_{nl}(\boldsymbol{\varphi}_0) + \mathbf{B}_{nl}^t(\boldsymbol{\varphi}_0) \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{G}^t \hat{\boldsymbol{\Psi}}_0 \mathbf{G}) d\Omega \quad (9)$$

où $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_0$ est le tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff II associé au mode propre $\boldsymbol{\varphi}_0$. Les deux vecteurs \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 dépendent du type d'imperfection considéré

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{,\Lambda} \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{,u\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (10)$$

Les seconds membres \mathbf{F}_p^{nl} et \mathbf{G}_p^{nl} ne dépendent que de la solution aux ordres précédents. C'est pourquoi la succession de systèmes linéaires peut être résolue de manière récursive. La principale difficulté réside dans le calcul de ces seconds membres dont l'expression est plus ou moins complexe selon le type d'imperfection considéré. D'une manière générale ils s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p^{nl} &= - \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{u}_0) \mathbf{S}_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{B}_{nl}^t(\mathbf{u}_r) \mathbf{S}_{p-r} d\Omega \\ \mathbf{G}_p^{nl} &= - \int_{\Omega} \mathbf{B}^t(\mathbf{u}_0) \boldsymbol{\Psi}_p^{nl} + \mathbf{B}_{nl}^t(\boldsymbol{\varphi}_0) \mathbf{S}_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{B}_{nl}^t(\boldsymbol{\varphi}_r) \mathbf{S}_{p-r} + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{B}_{nl}^t(\mathbf{u}_r) \boldsymbol{\Psi}_{p-r} d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

où S_p^{nl} et Ψ_p^{nl} sont des contraintes dont les expressions dépendent du type de défaut.

Il est donc possible de mettre en œuvre un algorithme de résolution de (7) complètement général (i.e. pour tout type d'imperfection) dans lequel il suffit d'introduire les bonnes expressions des vecteurs F_1 , F_2 , S_p^{nl} et Ψ_p^{nl} suivant le type de défaut traité. Les expressions de ces vecteurs dans le cas d'un défaut de forme et d'un défaut d'épaisseur sont explicitées dans les sections 2.3 et 2.4. La seconde difficulté concerne la résolution du système (7) de taille $2N+2$. En pratique, on évite la résolution directe et on cherche à se ramener à des systèmes de taille N . Cela est possible compte tenu du couplage particulier des lignes de (7). De cette façon, on ne décompose que la matrice K_T . Toutefois, puisque K_T est singulière en tout point de la branche de points limites, il est nécessaire d'introduire une procédure spécifique à base de multiplicateurs de Lagrange afin de mener à bien cette décomposition [9].

2.3 Cas du défaut de forme

On introduit dans la structure un défaut variable $\mathbf{u}^* = \Lambda \mathbf{u}_0^*$ où \mathbf{u}_0^* est un vecteur fixé qui donne l'allure de l'imperfection et Λ est son amplitude. Tous calculs faits (les détails sont donnés dans [9]) on obtient

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\Omega} (\tilde{B}_0^t D B_{nl}(\mathbf{u}_0) + G^t \hat{S}_0 G) \mathbf{u}_0^* d\Omega \\ F_2 &= \int_{\Omega} (\tilde{B}_0^t D B_{nl}(\varphi_0) + B_{nl}(\varphi_0) D B_{nl}(\mathbf{u}_0) + G^t \hat{\Psi}_0 G) \mathbf{u}_0^* d\Omega \\ S_p^{nl} &= \frac{1}{2} D \sum_{r=1}^{p-1} B_{nl}(\mathbf{u}_r) \mathbf{u}_{p-r} + D \sum_{r=1}^{p-1} \Lambda_{p-r} B_{nl}(\mathbf{u}_r) \mathbf{u}_0^* \\ \Psi_p^{nl} &= D \sum_{r=1}^{p-1} B_{nl}(\varphi_r) \mathbf{u}_{p-r} + D \sum_{r=1}^{p-1} \Lambda_{p-r} B_{nl}(\varphi_r) \mathbf{u}_0^* \end{aligned} \quad (12)$$

2.4 Cas du défaut d'épaisseur

Dans cette section, le paramètre additionnel est l'épaisseur h de la structure. Afin de simplifier l'étude, on s'intéresse uniquement aux éléments finis de coques pour lesquels l'intégration se fait analytiquement selon l'épaisseur et où h apparaît explicitement dans la matrice d'élasticité D . L'élément de coque DKT18 remplit ces conditions. Pour cette classe d'éléments, la matrice d'élasticité $D = D^1 h + D^3 h^3$ se décompose en une partie de membrane linéaire suivant h et en une partie de flexion cubique suivant h . L'introduction du développement asymptotique de h dans D conduit, moyennant l'introduction de quelques variables supplémentaires, à

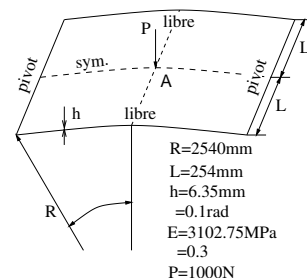
$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\Omega} B^t(\mathbf{u}_0) \tilde{D} (B_l + \frac{1}{2} B_{nl}(\mathbf{u}_0)) \mathbf{u}_0 d\Omega \\ F_2 &= \int_{\Omega} B^t(\mathbf{u}_0) \tilde{D} B(\mathbf{u}_0) \varphi_0 + B_{nl}^t(\varphi_0) \tilde{D} (B_l + \frac{1}{2} B_{nl}(\mathbf{u}_0)) \mathbf{u}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

Les expressions de S_p^{nl} et Ψ_p^{nl} ne sont pas détaillées ici par manque de place.

3 Exemples numériques

3.1 Panneau cylindrique avec défaut de forme

Le premier exemple concerne un panneau cylindrique dont la géométrie, les conditions aux limites et les propriétés matérielles sont définies dans la figure ci-contre. Pour des raisons de symétrie, un quart du panneau a été maillé avec 200 éléments DKT18. L'objectif de ce calcul est d'évaluer la réduction de charge critique en flambement due à la présence d'un défaut de forme dans la structure. La forme du défaut adopté correspond au premier mode propre de flambement de la structure. On constate sur la Figure (2a) que, pour des amplitudes de défaut comprises entre -3.5 et 5.3 fois l'épaisseur du panneau, les courbes d'équilibre présentent un phénomène de claquage. Au delà de ces



valeurs il n'y a plus claquage. La courbe de la Figure (2b) est constituée de tous les points limites lorsque l'amplitude du défaut varie. On peut y lire directement la valeur de la charge critique pour une valeur de défaut donnée. Cette courbe a été obtenue par des développements en série à l'ordre 30 avec seulement 25 pas de continuation, c'est-à-dire seulement 25 décompositions de \mathbf{K}_T .

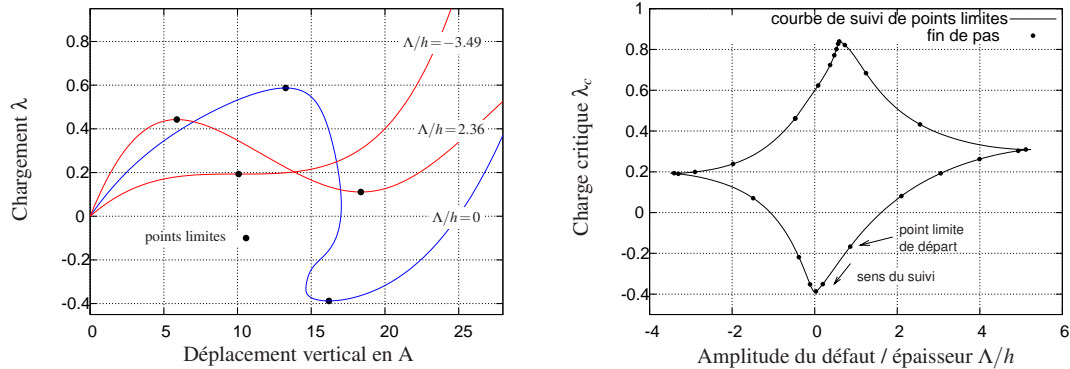


FIGURE 2 – Panneau cylindrique : (a) Courbes d'équilibre pour différentes valeur du défaut de forme et points limites détectés (b) Courbe de perte de charge critique suivant l'amplitude du défaut de forme

3.2 Panneau cylindrique avec défaut d'épaisseur

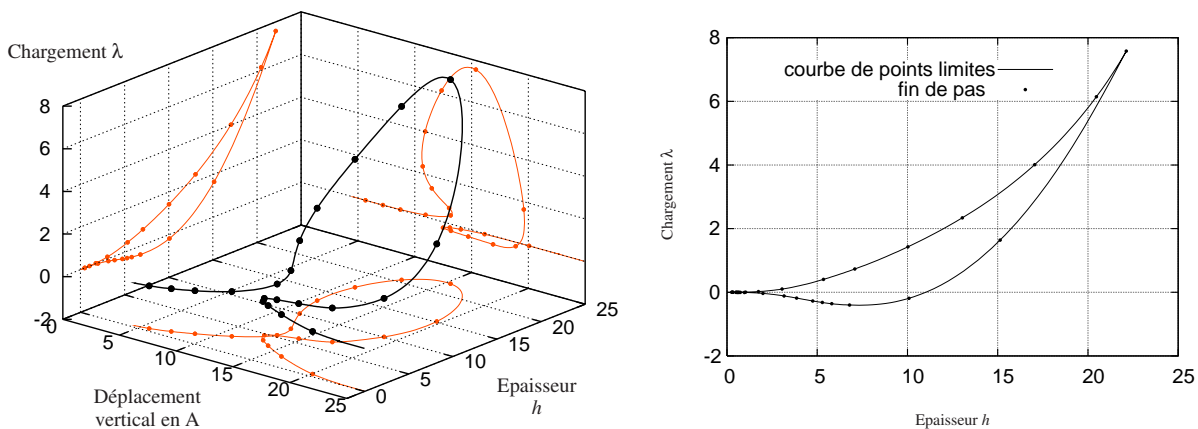


FIGURE 3 – Panneau cylindrique : (a) Courbe 3D "charge-épaisseur-déplacement" de suivi des points limites et ses projections (b) Perte de charge critique suivant la variation d'épaisseur

Le second exemple concerne le même panneau cylindrique que précédemment, mais il s'agit désormais d'étudier la sensibilité de la charge critique à une variation d'épaisseur (problème de corrosion). La courbe de la Figure (3a) est une représentation en 3 dimensions de la courbe de suivi de points limites. Ses projections sont plus aisées à analyser. L'une des plus intéressantes est tracée dans la Figure (3b). On peut y lire directement la charge critique en flambement du panneau en fonction de son épaisseur. Comme pour le défaut de forme on constate que la courbe de points limites ne dépasse pas la valeur $h=22.15$. Au delà de cette valeur, la structure ne flambe plus par claquage. De nouveau, cette courbe a été obtenue avec très peu d'inversions de la matrice tangente \mathbf{K}_T . En effet, 20 pas avec des séries à l'ordre 30 ont suffi pour la décrire entièrement. Les résultats obtenus pour cet exemple sont en très bon accord avec ceux obtenus dans [3].

3.3 Cylindre en compression axiale avec défaut de forme

Le dernier exemple concerne le cylindre de la figure (4a) comprimé axialement. Ce genre de problème est généralement très spectaculaire car la sensibilité à un défaut est très importante. On s'intéresse ici à un défaut de forme dont l'allure est donnée par le premier mode de flambement. La courbe de la Figure (4b) a été normalisée par rapport à la valeur λ_c de la première charge critique de flambement.

On observe une réduction de charge critique très sévère, de l'ordre de 80% pour un défaut d'amplitude $\Lambda \simeq 19h$. Au delà de cette valeur, la courbe d'équilibre du cylindre ne présente plus de point limite.

$L = 20.32 \text{ m}$ $E = 207000 \text{ MPa}$
 $h = 6.35 \text{ mm}$ $\nu = 0.3$
 $R = 2.54 \text{ m}$

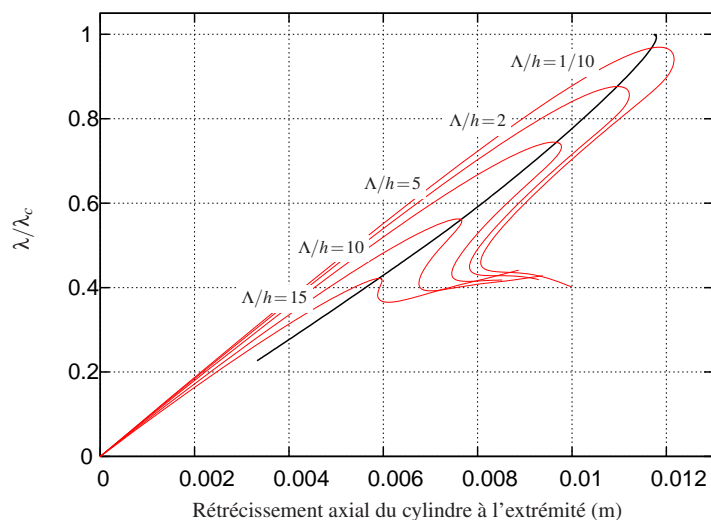
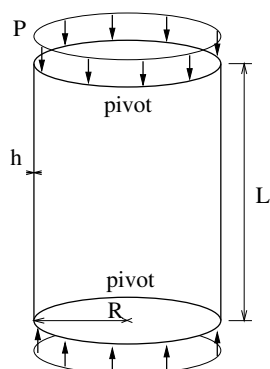


FIGURE 4 – Cylindre : (a) Définition du problème (b) Courbe de suivi des points limites et courbes d'équilibre pour des valeurs du défaut de 1/10 à 15 fois l'épaisseur du cylindre

4 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté une méthode générale pour l'étude de stabilité et de sensibilité aux imperfections d'une structure. La résolution numérique est entièrement effectuée à l'aide de la Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.) qui fournit une représentation analytique de la solution pour un coût de calcul qui reste faible par rapport aux différentes méthodes incrémentales-itératives de type Newton. Elle est par ailleurs robuste et très simple à utiliser.

L'outil de calcul développé permet de traiter des imperfections d'ensemble ou localisées, pour des défauts de forme ou d'épaisseur.

Les prochains développements concerneront l'introduction de non-linéarités matérielles.

Références

- [1] A.D. Jepson and A. Spence. Folds in solutions of two parameter systems and their calculation. part i. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22 :347–368, 1985.
- [2] W. Wagner and P. Wriggers. Calculation of bifurcation points via fold curves. In W. Wagner and P. Wriggers, editors, *Nonlinear Computational Mechanics*, pages 69–84. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [3] A. Eriksson, C. Pacoste, and A. Zdunek. Numerical analysis of complex instability behaviour using incremental-iterative strategies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 179 :265–305, 1999.
- [4] J.M.T. Thompson and A.C. Walker. The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems. *Int. J. Solids Structures*, 4 :757–758, 1968.
- [5] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Sciences - N9*, 28 :943–957, 1990.
- [6] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. The asymptotic-numerical-method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3 :281–297, 1994.
- [7] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36 :1251–1277, 1993.
- [8] E.H. Boutyou. Détection des bifurcations par des méthodes asymptotiques-numériques. In *Deuxième colloque national en calcul des structures*, volume 2, pages 687–692, Giens, France, May 1995.
- [9] S. Bagnuet and B. Cochelin. Direct computation of paths of limit points using the asymptotic numerical method. In *IASS-IACM 2000, 4th International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, Chania - Crete, Greece, June 5-7 2000.
- [10] M.A. Crisfield. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol.2*. John Wiley and Sons, 1st edition, 1997.