



HAL
open science

Développement de formulations dynamiques adaptées à la modélisation par éléments discrets de structures maçonnées sous chargements sismiques

Paul Taforel, Frédéric Dubois, Alexandre Martin, Stéphane Pagano

► **To cite this version:**

Paul Taforel, Frédéric Dubois, Alexandre Martin, Stéphane Pagano. Développement de formulations dynamiques adaptées à la modélisation par éléments discrets de structures maçonnées sous chargements sismiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00623159

HAL Id: hal-00623159

<https://hal.science/hal-00623159>

Submitted on 13 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Développement de formulations dynamiques adaptées à la modélisation par éléments discrets de structures maçonnées sous chargements sismiques

P. Taforel¹, F. Dubois¹, A. Martin¹, S. Pagano¹

¹ LMGC, Université Montpellier 2, CNRS, {paul.taforel,frederic.dubois,alexandre.martin,stephane.pagano}@univ-montp2.fr

Résumé — L'évaluation des risques naturels, et du risque sismique en particulier, a pris une importance croissante pour les autorités publiques entraînant une adaptation importante des outils utilisés jusqu'à présent dans l'étude de la vulnérabilité du bâti. Parmi les méthodes développées pour tenir compte de la spécificité du bâti maçonné figurent les approches par éléments discrets comme la méthode NSCD [8, 9, 10]. Une adaptation de cette méthode a été développée pour la modélisation de ces structures.

Mots clés — vulnérabilité, renforcement sismique, méthodes par éléments discrets, formulation corotationnelle.

1 Evaluation du risque sismique : contexte

1.1 Risque sismique et vulnérabilité

En France et dans de nombreux pays européens, l'évaluation des risques naturels encourus par les personnes et les biens ainsi que leur réduction, ont pris une importance croissante pour les autorités publiques. L'évaluation du risque sismique, entre autres, a suivi cette tendance. Dans le contexte national, la question des évaluations précises de la vulnérabilité et celle de la définition de mesures proportionnées techniquement et économiquement pour la réduire n'ont pratiquement pas été étudiées, de sorte qu'un effort conséquent reste à faire pour développer des méthodes fiables et applicables dans le domaine de l'ingénierie.

1.2 Approche numérique du problème de vulnérabilité

Il semble essentiel de disposer de méthodes à même de réduire autant que possible les incertitudes dans les méthodes d'évaluation afin de fiabiliser les diagnostics. Dans le projet collaboratif entre GEOTER, le BET HAUSS et le LMGC soutenu par OSEO et la Région Languedoc-Roussillon, il est envisagé de développer une stratégie de calcul du comportement dynamique des ouvrages à partir du logiciel de calcul LMGC90 [5, 6] développé au LMGC, afin de concevoir des méthodes et des outils de définition de courbes de fragilité — et par suite de courbes de vulnérabilité — adaptées aux typologies des constructions rencontrées dans les régions françaises soumises aux effets des séismes. L'originalité du projet, concerne l'approche numérique du problème choisie qui vise à utiliser la méthode des éléments discrets pour mieux prendre en compte la spécificité du bâti maçonné.

1.3 Développement d'une plate-forme de modélisation

Le code de calcul LMGC90, utilisant la méthode NSCD (*Non Smooth Contact Dynamics*) et permettant la modélisation de grandes collections d'objets solides (rigides/déformables) en interaction [13] est tout à fait adapté à la modélisation de structures maçonnées. De multiples lois d'interaction intégrées dans LMGC90 rendent compte du comportement aux interfaces (contact frottant, cohésion, ou comportements plus singuliers tels que la présence de ferraillements ou de renforcements textiles type FRP). Le choix des lois d'interaction et des modèles volumiques vise à représenter au mieux la phénoménologie.

Une première étape de *pré-processing* [11] permet la génération de modèles de calcul, mixant objets rigides et déformables, adaptés aux formats d'entrées de LMGC90. Nous avons choisi comme cas d'étude le musée Schœlcher de Pointe-à-Pitre, en Guadeloupe.

2 Modélisation du Musée Schœlcher (Pointe-à-Pitre, Guadeloupe) par une approche éléments discrets « étendus »

2.1 Choix d'une approche DEM en corps rigides et FEM en déformables

Le Musée Schœlcher (FIGURE 1) est un cas d'étude très intéressant : il est l'un des rares exemples d'édifices à architecture de prestige encore intact à Pointe-à-Pitre. Le Musée Schœlcher a fait l'objet de relevés géométriques en mars 2010. Les données obtenues ont permis d'identifier très clairement des typologies de blocs aux dimensions caractéristiques et occupant des fonctions bien spécifiques dans la structure : chaînages horizontaux et verticaux ou encore des chaînages d'ouverture (FIGURE 2) ; ces chaînages permettant de structurer une maçonnerie de remplissage composée vraisemblablement de pierres calcaires faiblement assisées et recouvertes d'un enduit.



FIGURE 1 – Musée Schœlcher à Pointe-à-Pitre, Guadeloupe : bâtiment en calcaire s'élevant sur deux niveaux, ossature réalisée avec des pierres de taille appareillées qui structure des remplissages frustres.

La modélisation du bâtiment avec le logiciel LMGC90 est faite en combinant des éléments discrets pour les blocs massifs et des éléments finis pour les remplissages. Pour prendre en compte la perte de rigidité due à la ruine (progressive ou totale) de ces panneaux de maçonnerie, il pourrait être envisagé de considérer un modèle de comportement non linéaire (type plasticité), ou endommageable ou encore d'utiliser des zones cohésives diffuses. Cependant ces approches étant très coûteuses, une discrétisation des panneaux en macro éléments conformes aux faciès de rupture observés sur les ouvrages de maçonnerie soumis aux effets des séismes et joints par des interactions endommageables, nous semble plus adaptée.

2.2 Description des modèles volumiques

Choix d'un remplissage homogène

Les remplissages en maçonnerie sont le plus souvent constitués de plusieurs phases dont le comportement mécanique varie en fonction de leur position dans l'épaisseur de la structure. Des parements de peau constitués de pierres de qualité, appareillées irrégulièrement, confinent un mélange frustre agissant sur la structure en apportant de la masse à l'ouvrage. Ce matériau de remplissage est le plus souvent de faible qualité en termes de comportement mécanique. Pour rendre compte au mieux des phénomènes physiques observés dans ce type de structures maçonnées, les 3 phases présentes dans ce type de rem-

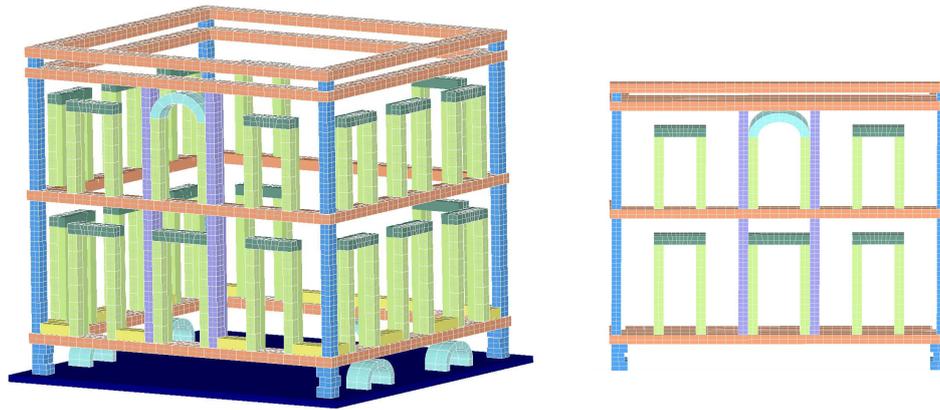


FIGURE 2 – Description des typologies de blocs taillés utilisés dans la modélisation du Musée Schœlcher : en bleu et mauve, les chaînages verticaux, en jaune et orangé, les chaînages horizontaux, en vert clair et foncé, les chaînages d'ouverture, en cyan, les blocs des voûtes.

plissage pourraient être représentées en modélisant chacun des milieux avec un comportement distinct, les comportements des parements — *id est* des éléments maillés périphériques — étant dès lors différenciés de celui des maillages de remplissage. Cette approche n'a pas été retenue pour la modélisation des remplissages du Musée Schœlcher étant donné leur faible épaisseur (environ 600 mm) ; ce qui rend l'existence de plusieurs phases peu probable. En outre, les maillages générés pour une représentation en 3 phases permettent difficilement d'envisager de calculer la structure dans des temps raisonnables. Les remplissages seront donc considérés par la suite comme des milieux homogènes. Ils sont décrits au travers d'éléments finis continus dans l'épaisseur des remplissages dont les caractéristiques mécaniques sont décrites au paragraphe suivant.

Caractéristiques des modèles volumiques retenus

Les remplissages ont été modélisés par des éléments finis ayant un comportement élastique ($\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$, $E_{\text{young}} = 7,0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,3$) et les blocs par des éléments rigides ($\rho = 1750 \text{ kg/m}^3$). Nous nous intéresserons plus spécialement par la suite, à la fois aux difficultés liées à la génération de ce type de modèle « mixte » et à la réalisation d'une simulation avec le code de calcul LMGC90. Le lecteur pourra se reporter à l'Annexe pour trouver des détails sur la méthode NSCD implémentée dans LMGC90.

2.3 Impact des stratégies de modélisation des remplissages du Musée Schœlcher sur la stabilité de la structure et le temps de calcul

Les choix de modélisation ont un impact direct sur la représentativité des comportements mécaniques observés et sur les temps de calcul de la simulation. L'enjeu de toute modélisation est bien évidemment de parvenir à concilier ces deux contraintes majeures. Différentes modélisations des remplissages du Musée Schœlcher ont été envisagées pour y répondre au mieux. L'approche choisie, pour le remplissage, combinant éléments rigides et déformables conduit à devoir gérer un problème de contact complexe. La multiplicité des types de modèles en présence mais également la très forte variabilité de taille des éléments en contact sont une difficulté majeure pour associer une gestion du contact (détection, résolution, *etc*) cohérente à des temps de calcul raisonnables.

Dans une première approche, les zones de remplissage connexes sont considérées comme des milieux homogènes. La finesse des maillages est progressivement adaptée pour gérer au mieux les contacts tout en restant vigilant au temps de calcul. La prise en compte des contacts entre deux solides dans le code de calcul LMGC90 s'effectue au travers de contacteurs spécifiques accrochés aux divers solides et

ce dans une approche candidat/antagoniste. Les solides portant des contacteurs de type candidats sont susceptibles d'établir un contact avec des solides portant des contacteurs antagonistes, ces contacteurs s'apparentant, en 3D, à des surfaces pour les contacteurs antagonistes et à des points de contact définissant implicitement une « surface » de contact pour les contacteurs candidats. Dans le cadre de contacts entre rigides et maillés, les contacteurs candidats sont par défaut portés par le maillage et les surfaces antagonistes par les éléments polyédriques. Plus précisément, les mailles de surface — triangulaires dans le cas d'un maillage en tétraèdres — portent ces points de contact (jusqu'à 3 par maille pour ce type de maillage). Le nombre de points de contact potentiels entre un maillé et un élément polyédrique est ainsi directement relié à la finesse du maillage de surface des objets maillés. La différence de taille entre les éléments du maillage de peau et la taille des faces antagonistes des rigides peut conduire à des instabilités au niveau des contacts blocs/remplissages, les blocs rigides ne disposant pas d'assez de points de contact pour assurer leur stabilité.

Modèle 1

Le premier modèle vise à limiter le nombre de nœuds nécessaire à la description du remplissage afin de réduire autant que possible les temps de calculs. Les remplissages, supposés continus au niveau de chaque étage — les 4 murs de la structure sont modélisés au travers d'un même corps déformable —, sont discrétisés de façon assez grossière, à raison d'une maille dans l'épaisseur de la structure. Le nombre de nœuds et notamment le nombre de nœuds de contact se trouvent de ce fait limités. Le modèle ainsi proposé est constitué de 1701 solides rigides polyédriques et de 7 maillages tétraédriques pour un total d'environ 3500 nœuds dont 2400 nœuds de surface.

Le calcul de mise sous poids propre de ce modèle permet d'identifier plusieurs points conduisant à son invalidation. Des problèmes inhérents à la gestion des contacts entre les blocs rigides de petite dimension et les remplissages déformables conduisent à l'instabilité de certains blocs (FIGURE 3). De plus les temps de calcul observés restent importants, ce qui semble pouvoir s'expliquer au regard de la taille des systèmes formés pour la résolution du problème de contact (cf. équation (15) en ANNEXE) et notamment de la largeur de bande de l'opérateur de Delassus. Étant donné la structure continue du maillage sur tout un étage, les nœuds de contact de l'ensemble du corps maillé sont numériquement couplés, rendant de ce fait la résolution du problème de contact très coûteuse.

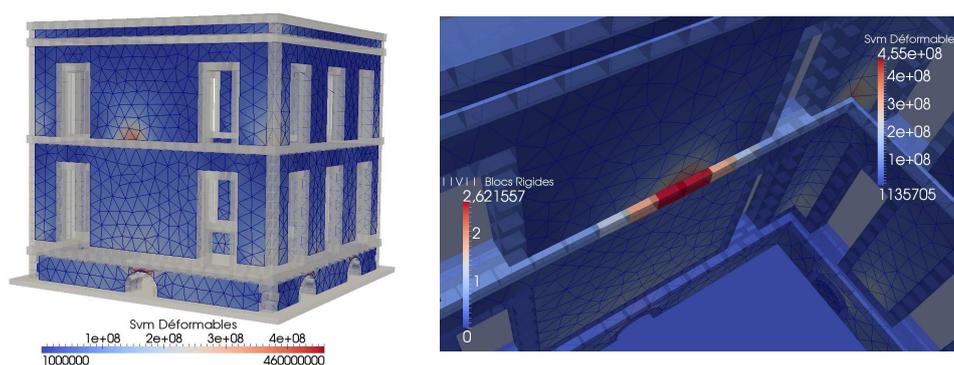


FIGURE 3 – Déchaussements et basculements de blocs – descente de charge réalisée sur le modèle 1 : contrainte de Von Mises anormalement élevée au niveau du mur arrière de la structure (à gauche) due au basculement de blocs de la ceinture horizontale (détail à droite).

Un premier enrichissement (modèle 2) consiste à modifier les maillages des remplissages qui ne sont plus considérés comme continus au niveau d'un étage. Chaque mur est représenté par un corps déformable connexe (modélisation également retenue pour les modèles 3 et 4). Le modèle obtenu est constitué de 1701 solides rigides et de 20 corps maillés, pour un total de nœuds similaire à celui évoqué pour le modèle 1 (discrétisation comparable du remplissage). Les temps de calcul pour un test consistant à effectuer 10 itérations de calcul avec un pas de temps $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s, un paramètre d'intégration θ fixé à 0,505 et une résolution du problème de contact limitée à 50 itérations de la méthode de Gauss-Seidel Non Linéaire (GSNL, cf. Annexe), s'en trouvent considérablement réduits (4 min 19 s contre 14 min 36 s).

Concernant le problème de stabilité de certains blocs, observé lors de la première simulation (FIGURE 3), la solution envisagée a consisté à raffiner les maillages de sorte que les surfaces de contact puissent disposer d'un nombre de points de contact suffisant. Deux modèles sont proposés. La taille de maille du modèle 3 est définie de sorte que 2 éléments se trouvent dans l'épaisseur du remplissage, contre 3 pour le modèle 4. Cette discrétisation raffinée du maillage de surface permet une meilleure stabilité des blocs en contact, la surface d'un élément du maillage de peau portant les points de contact étant comparable aux surfaces antagonistes des blocs rigides en contact. Bien entendu, le raffinement des maillages conduit à une augmentation du nombre de nœuds dans les corps maillés et donc, à une augmentation des temps de calcul. L'ensemble des modèles est présenté FIGURE 4 et les résultats relatifs au test unitaire récapitulés dans la TABLE 1.

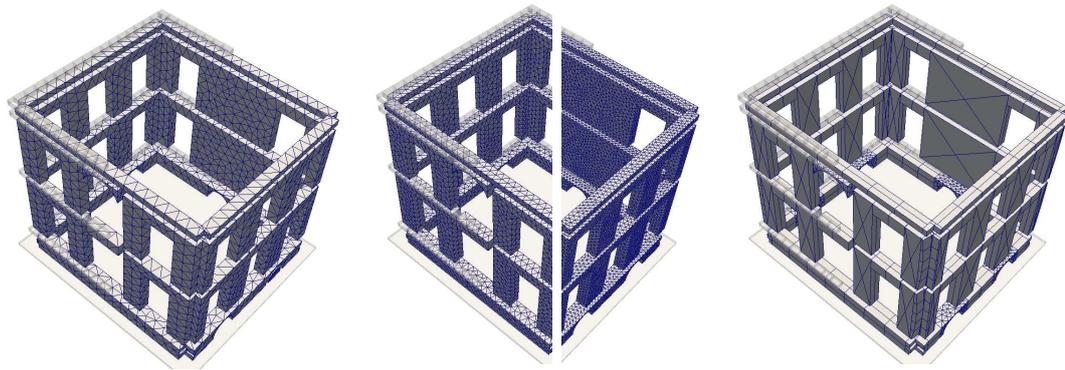


FIGURE 4 – Maillages des modèles 2, 3, 4 et 5 : à gauche, maillages grossiers des murs comportant 1 élément dans l'épaisseur du remplissage (modèle 2), au centre, maillages raffinés des murs avec respectivement 2 et 3 éléments dans l'épaisseur (modèles 3 & 4) et à droite, maillage grossier des trumeaux (modèle 5).

Les tests effectués sur les modèles précédents ont permis de fixer une taille de maille semblant assurer la stabilité des blocs, tout en restant raisonnables en termes de temps de calcul en regard du test unitaire proposé. Toutefois, ce test ne peut être considéré comme représentatif pour le calcul réel du modèle car le nombre d'itérations du solveur GSNL a été volontairement borné. Le modèle 3, répondant au mieux aux critères de stabilité et de temps de calcul, a été soumis à un calcul de mise sous poids propre pour lequel le nombre d'itérations GSNL n'est contraint que par la norme de convergence. Pour une norme assez sévère la simulation devient très coûteuse (18 500 itérations de Gauss-Seidel par pas de temps pour une durée de simulation d'environ 1h30 par pas de temps) rendant l'utilisation de tels modèles délicate, même avec un comportement linéaire. La sophistication des modèles permettant de représenter plus fidèlement le comportement de la structure — modèles plastiques, endommagement, zones cohésives diffuses, etc — pénaliserait encore d'avantage les temps de calcul, ce qui justifie l'introduction du modèle 5.

Modèle 5

La diminution du nombre de nœuds est essentielle pour diminuer les temps de calcul de ce genre de modèles. Le dernier modèle proposé a pour but de réduire autant que possible la taille des systèmes tout en permettant d'introduire la non-linéarité de comportement. La discrétisation des remplissages de la structure se fait en termes de trumeaux et de linteaux, les trumeaux étant eux mêmes éclatés en éléments prismatiques reliés entre eux par des lois cohésives. Cette modélisation permet d'anticiper la rupture des trumeaux suivant les faciès de rupture observés usuellement sur les bâtiments maçonnés soumis à des agressions sismiques [2]. Ce type de modélisation reste assez complexe dans la mesure où la description de la non-linéarité doit se faire au travers de modèles d'interfaces. Les linteaux sont constitués d'éléments déformables type hexaèdres à 8 nœuds et les parties de remplissage non convexes par des maillages tétraédriques. Les 228 objets maillés ainsi définis comportent un nombre minimal de nœuds de sorte à réduire autant que possible les temps de calcul.

Pour autant, les problèmes liés à la gestion du contact subsistent. La multiplication des objets maillés conduit à devoir gérer les contacts maillés/maillés avec les mêmes écueils que ceux rencontrés pour la gestion des contacts maillés/rigides. Une adaptation de la prise en charge du contact entre les déformables et les rigides est encore à envisager pour pallier ces difficultés.

TABLE 1 – Résultats des tests unitaires réalisés sur les modèles 1, 2, 3, 4 et 5.

Descriptif	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 4	Modèle 5
nombre de corps	7	20	20	20	228
nombre total de nœuds surfaciques	2407	2500	5045	10953	~1500
nombre total de nœuds volumiques	1054	933	3628	12653	0
nombre d.d.l. max par élément	3786	1089	2985	8073	1863
nombre d.d.l. précondensés max par élément	2424	693	1188	2931	1686
durée de l'étape de précondensation (s)	235,46	26,43	257,18	3678,87	4,17
durée du calcul unitaire (s)	876,98	259,19	2053,99	18294,36	–

2.4 Résultats de calculs en rigide

Cas d'un modèle totalement rigide

Afin d'illustrer l'intérêt de la solution retenue, une descente de charge a été réalisée sur un modèle comparable au modèle 5 où tous les objets sont considérés comme rigides (1701 blocs de chaînage et 268 blocs de remplissage). Les lois d'interaction utilisées pour décrire le contact entre polyèdres sont des lois cohésives type RCC (25300 contacts polyèdres/polyèdres). Il est nécessaire d'effectuer 150 itérations de calcul pour atteindre une solution stable (FIGURE 5).

Ce même modèle est ensuite soumis à une charge sismique, le calcul étant effectué à partir de l'état de la structure obtenu à l'issue de la descente de charge. Les accélérogrammes choisis sont ceux du séisme des Saintes qui a frappé les Antilles le 21 Novembre 2004 (FIGURE 6), obtenus via la base de données du RAP (Réseau Accélérométrique Permanent). La sollicitation conduit à une redistribution importante

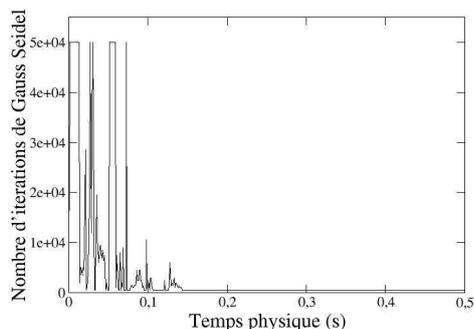


FIGURE 5 – Descente de charge du modèle rigide : courbe de convergence de GSNL.

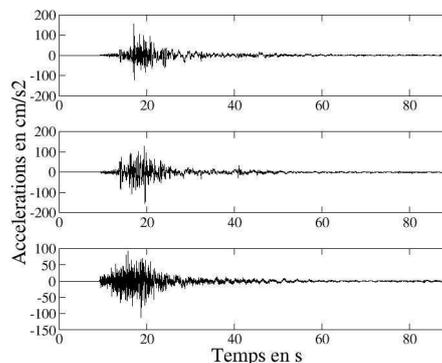


FIGURE 6 – Enregistrements du séisme des Saintes depuis une station située à Pointe-à-Pitre : de haut en bas, composantes ENE, ENN et ENZ.

des efforts dans la structure et à une perturbation importante de sa stabilité. Dès lors, la résolution du problème de contact redevient chronophage.

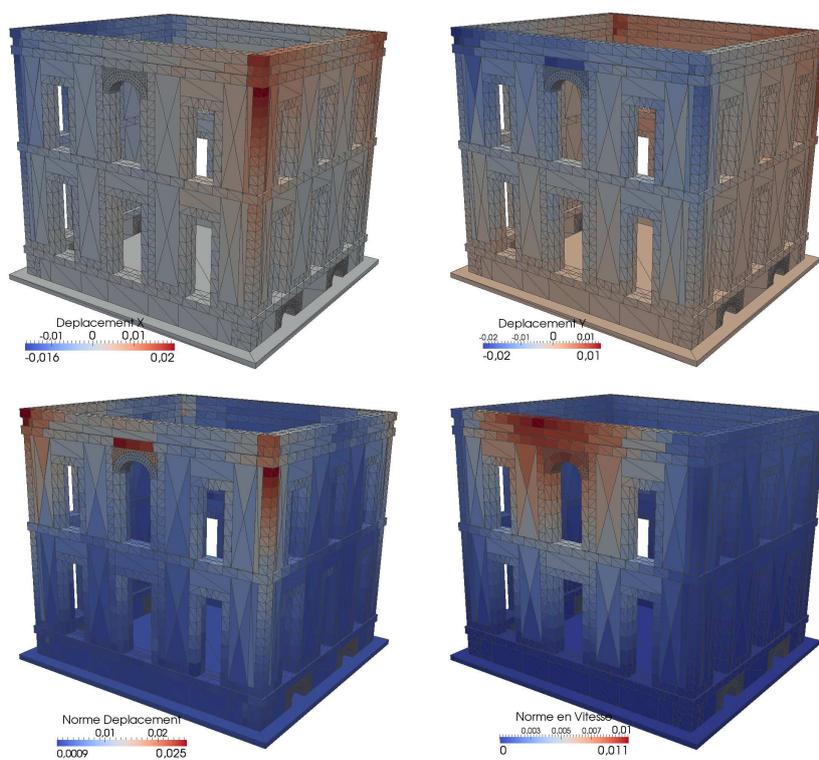


FIGURE 7 – Modèle rigide sous chargement sismique : résultats de simulation.

Le retour d'expérience effectué à l'issue du séisme des Saintes indique que le Musée Schœlcher n'a subi aucun dommage lors de cet événement sismique. Les résultats de simulation présentés FIGURE 7 tendent à aller globalement dans ce sens : aucun effondrement de la structure même partiel n'est à dénoter. Toutefois, quelques éléments du chaînage de la structure en partie haute du R+1 ont subi des déplacements de relativement grande importance (non observés *in situ*) traduisant un comportement du chaînage attendu sous ce type de sollicitation. Ces déplacements touchent également certains panneaux de maçonnerie qui ont tendance à se déformer hors plan dans la direction principale de sollicitation (direction de la plus forte accélération, *peak ground acceleration*, $pga = 152,75 \text{ cm/s}^{-2}$ pour la composante ENN). Ces comportements simulés (mais non observés) peuvent s'expliquer par le modèle utilisé dans lequel la toiture a été considérée comme souple, c'est-à-dire ne jouant pas le rôle de diaphragme horizontal.

Ces premiers résultats semblent prometteurs. Le modèle proposé permet de mettre en évidence des comportements de structure cohérents avec le type d'agression auquel il est soumis. Une attention toute particulière est donc à apporter à ce genre de modèle — tant en rigide qu'en déformable — pour aborder à l'avenir les modélisations de bâtiments sous chargements sismiques. Cette approche en « panneau » pourrait s'avérer être une solution pertinente pour décrire les structures et être utilisée en complément d'une discrétisation plus fine ; ce genre d'approche pouvant permettre à terme de concentrer les efforts de discrétisation dans les zones les plus sollicitées de la structure.

3 Conclusions et perspectives

Ce travail tente de montrer les difficultés rencontrées lors de la simulation de structures complexes par approche discrète. Même si elles semblent très prometteuse les approches présentées — mixte ou rigide — montrent des limites.

Très clairement, les modélisations en corps rigides sont une approche minimaliste du problème mécanique. Si elles permettent de gagner un temps de simulation considérable, elles ne donnent qu'une information mécanique pauvre, essentiellement cinématique, alors que des considérations de contraintes dans le matériau seraient attendues. Par ailleurs, ces modélisations négligent le comportement structurel dû aux vibrations de certains éléments.

Concernant les approches mixtes, elles semblent mécaniquement plus convaincantes, mais les difficultés résident dans la gestion du contact qui pousse à multiplier le nombre de nœuds de surface ce qui impacte directement les temps de calcul. Nous avons essayé de montrer un choix judicieux de la discrétisation pour ce type de modélisation pour pallier ces difficultés.

Un aspect non encore traité vient des difficultés rencontrées lorsque les objets déformables sont soumis à de grands déplacements et/ou rotations. Une formulation dynamique de type « corotationnelle », qui vise à dissocier « mouvements de corps rigides » et « déformation » est en développement. Cette méthode repose sur la construction de deux opérateurs [1] : un opérateur de relèvement G fournissant à partir d'une vitesse de solide rigide $\{u, \omega\}$ un élément de l'espace des vitesses généralisées et un opérateur de projection L tel que $L G$ soit l'application identité sur l'image de l'application G , notée U_R . De plus, nous noterons U_D le noyau de L . Le choix de ces opérateurs permet de décomposer l'espace vectoriel des vitesses U en une somme directe d'espaces relatifs aux vitesses purement déformables U_D et aux vitesses de corps rigide U_R . En s'appuyant sur une écriture de la puissance (\langle, \rangle et $\langle \bullet, \bullet \rangle$) on peut de manière similaire décomposer l'espace des efforts F en deux espaces supplémentaires. Ainsi dynamique de corps rigide et déformation peuvent être traitées séparément et réassemblées pour obtenir la dynamique globale. Des comparaisons de cette approche avec les approches rigides et déformables (grandes déformations) sont envisagées.

$$U = U_R \oplus U_D \quad \langle, \rangle \quad F = F_R \oplus F_D \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} L \downarrow \uparrow G & & G^T \downarrow \uparrow L^T \\ \{u, \omega\} & \langle \cdot, \cdot \rangle & \{f, \mu\} \end{array} \quad (2)$$

Références

- [1] V. Acary. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés*, Thèse de l'Université Aix-Marseille II, 252-254, 2001.
- [2] D. Combescure. *Eléments de bibliographie sur les méthodes d'estimation à grande échelle de la vulnérabilité sismique des bâtiments existants*, Rapport CEA Direction de l'Energie Nucléaire, DM2S (Département Modélisation de Système et Structures), Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques, SEMT/EMSI/RT/02-032/A, 31-90, 2002.
- [3] P. A. Cundall. *A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems*, in Symposium of the International Society of Rock Mechanics, volume 1, pages 132-150, 1971.
- [4] P. A. Cundall, O. D. L. Strack *A discrete numerical model for granular assemblies*, Geotechnics, 29 (1) : 47-65, 1979.
- [5] F. Dubois, M. Jean. *Une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d'interaction*, In M. Pottier-Ferry, M. Bonnet et A. Bignonnet, éditeurs : 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, volume 1, 111-118, 2003.
- [6] F. Dubois, M. Jean, M. Renouf, R. Mozul, A. Martin, M. Bagnéris. *LMGC90*, 11ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2011.
- [7] F. Horkay, M. Jean, F. Mehrez. *Unilateral contact and dry friction in numerical simulation of deep drawing*, Proc. Of NUMIFORM89, 1989.
- [8] M. Jean, J.J. Moreau. *Unilaterality and dry friction in the dynamic of rigid body collections*, Proc. Contact Mechanics Int. Symp., Edt A. Curnier, 31-48, 1992.
- [9] M. Jean. *Frictional contact in collections of rigid and deformable bodies : numerical simulation of geomaterials. Mechanics of geomaterials Interfaces*, A.P.S. Saladurai and Mr. JJ. Bolt, eds., Elsevier Science, Amsterdam, 463-486, 1995.
- [10] M. Jean. *The non-smooth contact dynamic method*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 177, No 3-4, 235-257, 1999.
- [11] A. Martin, M. Bagnéris, F. Dubois, R. Mozul. *Conception d'un outil adapté à la mise en données des systèmes discrets*, 11ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2011.
- [12] J. J. Moreau. *Unilateral contact and dry friction in finited freedom dynamics*, CISM Races and Readings, 302 Springer-Verlag, pages 1-82, 1988.
- [13] F. Radjaï et F. Dubois. *Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires*, Hermès Sciences, Lavoisier, 2010.

ANNEXE

Aspects théoriques de la méthode NSCD et implémentation dans le code de calcul LMGC90

La méthode NSCD est une méthode par éléments discrets, qui utilise des lois d'interaction non-régulières (lois à seuil, sauts de vitesse, ...) et intègre l'équation de la dynamique de façon implicite à l'inverse des méthodes classiques basées sur des lois d'interaction régulières (fonctions continues et différentiables) et qui s'accompagnent d'un schéma d'intégration explicite (type méthode de Cundall [3, 4]). Dans le cas présent, nous nous intéressons uniquement à la méthode NSCD initiée et développée par J.J. Moreau et M. Jean [7, 8, 9, 10, 12] et implémentée dans le code de calcul LMGC90. Les grandes lignes de la modélisation du problème de contact ainsi que sa résolution sont rappelées ci-après.

Description du problème de contact

Le problème à résoudre est un problème multi-contacts. La gestion du contact entre corps est basée sur une relation candidat / antagoniste (esclave/maître). A n'importe quel instant au cours de l'évolution du système, sont définis des repères locaux $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{s})^\alpha$ liés aux contacts et portés par les corps antagonistes (les normales de ces repère \vec{n}^α pointant vers les corps candidats et correspondant aux normales des plans tangents aux surfaces des corps antagonistes définis par les couples $(\vec{t}, \vec{s})^\alpha$).

L'enjeu d'un problème multi-contacts est d'obtenir le comportement global d'une collection d'objets en considérant la dynamique propre de chaque élément en présence d'interactions avec les autres éléments. Pour répondre à cette attente, le problème est décrit à deux échelles différentes : celle de la dynamique de chaque objet, et celle du contact. La transition entre ces échelles globale et locale, nécessaire à la résolution de ce type de problème, s'effectue à l'aide d'opérateurs linéaires ${}^T H(q)$ et $H(q)$ construits grâce à des considérations cinématiques et de dualité, et qui permettent de relier vitesses relatives au contact U et vitesse des corps u ou encore de calculer la résultante des efforts de contact r à partir des forces de contact R :

$$H(q) : R = \{R^\alpha\} \mapsto r = \sum_{\alpha} H^\alpha(q) R^\alpha \quad \text{et} \quad {}^T H(q) : u \mapsto U = \{U^\alpha\} = \left\{ \sum_{\alpha} {}^T H^\alpha(q) u \right\} \quad (3)$$

u	\leftarrow	Equations de la dynamique	\rightarrow	r	Echelle globale
${}^T H(q) \downarrow$				$\uparrow H(q)$	
U^α	\leftarrow	Lois de contact	\rightarrow	R^α	Echelle locale

Modélisation du mouvement d'un corps en présence de « contacts »

La stratégie de résolution du problème est basée sur une discrétisation du problème d'évolution. Sur un pas de temps (durée h) compris entre t_i et t_{i+1} , trois grandes étapes vont être nécessaires à la résolution du problème : la détection du contact, la résolution du problème de contact (détermination des forces de contact) et le calcul du mouvement des éléments de la collection résultant des forces extérieures et de contact.

Construction du problème de contact

Le mouvement de chaque corps de la collection d'objet en présence de contacts (mais en l'absence de chocs) est régi par les équations de la dynamique :

$$\mathbb{M}(q, t) \frac{d^2 q}{dt^2} = F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, t) + F_{int}(q, \frac{dq}{dt}, t) + r \quad (4)$$

où \mathbb{M} est la matrice de masse, q sont des variables de Lagrange généralisées (par exemple la translation et la rotation du centre de gravité du corps rigide ou le déplacement d'un nœud d'un maillage d'un corps déformable), r indique la contribution de l'effort de contact, $F_{int}(q, dq/dt, t)$ représente la somme des efforts d'inertie (termes gyroscopiques et centrifuges) et des forces intérieures et $F_{ext}(q, dq/dt, t)$ des efforts extérieurs.

Afin de pouvoir prendre en compte les chocs, on utilisera une formulation proposée par J.J. Moreau pour décrire la dynamique des corps

$$\mathbb{M} \left[\frac{dq(t_{i+1})}{dt} - \frac{dq(t_i)}{dt} \right] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{int}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r ds. \quad (5)$$

On constate que l'équation (5) est un bilan de la conservation de mouvement sur un pas de temps qui fait intervenir l'intégrale des forces extérieures et intérieures, et l'impulsion des forces de contact. On peut la réécrire en intégrant les forces intérieures :

$$\mathbb{M} \left[\frac{dq(t_{i+1})}{dt} - \frac{dq(t_i)}{dt} \right] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds + h \left[(1 - \theta) F_{int}^i(q, \frac{dq}{dt}, t_i) + \theta F_{int}^{i+1}(q, \frac{dq}{dt}, t_{i+1}) \right] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r ds, \quad (6)$$

ce qui revient à écrire, en posant $v_i = \frac{dq(t_i)}{dt}$ et $v_{i+1} = \frac{dq(t_{i+1})}{dt}$,

$$\mathbb{M} [v_{i+1} - v_i] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds + h \left[(1 - \theta) F_{int}^i(q, \frac{dq}{dt}, t_i) + \theta F_{int}^{i+1}(q, \frac{dq}{dt}, t_{i+1}) \right] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} r ds \quad (7)$$

On introduit le résidu L en posant $v = \frac{dq(t_{i+1})}{dt}$,

$$L(v) = \mathbb{M} [v - v_i] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds - h \left[(1 - \theta) F_{int}^i(q, \frac{dq}{dt}, t_i) + \theta F_{int}^{i+1}(q, \frac{dq}{dt}, t_{i+1}) \right] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r ds = 0 \quad (8)$$

On cherche la solution de (8) par une méthode de Newton-Raphson :

$$D_v L(v) \delta_v = -L(v_i) = \mathbb{M} + h \theta C + h^2 \theta^2 \mathbb{K}. \quad (9)$$

Soit, en posant $\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M} + h \theta C + h^2 \theta^2 \mathbb{K}$,

$$\tilde{\mathbb{M}} [v_{i+1} - v_i] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} r ds = 0. \quad (10)$$

Par ailleurs, la vitesse u est considérée comme intégrable pour tout intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, et reliée à q par la relation :

$$q(t_{i+1}) = q(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} v ds \quad (11)$$

et $r_{i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} r ds / h$ est la force de contact « moyenne » sur l'intervalle.

En posant $\int_{t_i}^{t_{i+1}} r_{i+1} ds = p_{i+1}$ et $\int_{t_i}^{t_{i+1}} F_{ext}(q, \frac{dq}{dt}, s) ds = p_{Free}$, l'équation (10) se réécrit :

$$\tilde{\mathbb{M}}[v_{i+1} - v_i] = p_{Free} + p_{i+1} \quad (12)$$

avec p_{i+1} , impulsion due aux contacts.

En considérant ce qui précède, l'équation (12) devient donc, en posant $v_{Free} = v_i + \tilde{\mathbb{M}}^{-1} p_{Free}$,

$$v_{i+1} = v_{Free} + \tilde{\mathbb{M}}^{-1} p_{i+1}. \quad (13)$$

Le schéma de résolution utilisé est de type prédicteur / correcteur : le terme de vitesse libre v_{Free} correspond à la « prédiction » et renvoie au comportement qu'auraient eu les objets s'il n'y avait pas eu de contacts ; le terme $\tilde{\mathbb{M}}^{-1} p_{i+1}$ correspondant quant à lui à la correction de vitesse relatif à la contribution réelle des contacts sur l'objet.

A l'échelle locale, les contacts peuvent parfaitement être identifiés pour une configuration q_m de la collection donnée *id est* à un temps donné. En utilisant les relations de passage de l'échelle locale à l'échelle globale,

$$p^\alpha = H^\alpha(q_m) P^\alpha, \quad U^\alpha = {}^T H^\alpha(q_m) u \quad \text{et} \quad p = \sum_{\alpha} p^\alpha, \quad (14)$$

l'équation (13) peut être réécrite en termes d'inconnues locales :

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_{Free} + \tilde{\mathbb{M}}^{-1} \sum_{\beta} H^\beta(q) P_{i+1}^\beta \\ {}^T H^\alpha(q) v_{i+1} &= {}^T H^\alpha(q) v_{Free} + \sum_{\beta} {}^T H^\alpha(q) \tilde{\mathbb{M}}^{-1} H^\beta(q) P_{i+1}^\beta \\ U_{i+1}^\alpha &= U_{Free}^\alpha + \sum_{\beta} \mathbb{W}^{\alpha\beta}(q) P_{i+1}^\beta \quad \text{où } \mathbb{W} \text{ est l'opérateur de Delassus} \\ U_{i+1}^\alpha &= U_{Free}^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbb{W}^{\alpha\beta}(q) P_{i+1}^\beta + \mathbb{W}^{\alpha\alpha}(q) P_{i+1}^\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Si l'on considère que tous les contacts adjacents au contact α sont connus ($\forall \beta \neq \alpha$), il est donc possible de déterminer un couple (P^α, U^α) solution de (15) et des lois d'interactions. Le couple (P^α, U^α) est solution du système à 2 équations et 2 inconnues formé par les relations d'interactions et l'équation de la dynamique condensée au contact. Connaissant la solution, il est dès lors possible de remonter à la résultante du contact sur les corps concernés.

Approche numérique

L'approche de résolution numérique du problème de contact découle de celle présentée ci-avant et s'apparente à une méthode de Gauss Seidel non linéaire GSNL. Le calcul de la vitesse libre est obtenu par multiplication de l'intégrale des forces extérieures et intérieures par l'inverse de la pseudo matrice de masse $\tilde{\mathbb{M}}$. Le terme auxiliaire $\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbb{W}^{\alpha\beta}(q) P_{i+1}^\beta$, quant à lui, caractérise la contribution en vitesse des contacts $\beta \neq \alpha$ au point de contact α . Ce terme peut être estimé en introduisant une réaction auxiliaire $r_{aux} = \sum_{\beta \neq \alpha} H^\beta(q) P_{i+1}^\beta$, en calculant la vitesse auxiliaire $\tilde{\mathbb{M}} u_{aux} = r_{aux}$ et en remontant cette vitesse au contact $U_{aux} = {}^T H^\alpha u_{aux}$. Sans précaution particulière cette opération nécessite la résolution de 2 systèmes linéaires. La matrice $\tilde{\mathbb{M}}$, si le problème est linéaire (matériau et géométrie), peut être factorisée au début du calcul. Toutefois on constate qu'à ce niveau uniquement le calcul des vitesses aux nœuds supports d'éléments de contact est nécessaire. Aussi une précondensation de la matrice $\tilde{\mathbb{M}}^{-1}$ sur ces nœuds permet de s'économiser du temps. Cette opération de précondensation n'est plus valable dès que la matrice $\tilde{\mathbb{M}}$ change, notamment à cause des rotations des objets. Une technique de type corotationnelle permet de pallier ce défaut.

Il est à noter, par ailleurs, qu'en présence d'objets de grande taille, un grand nombre de contacts a tendance à être « couplé » entre eux, même si la physique (rapport taille de maille/ célérité des ondes) n'est que partiellement impactée.