HAL
open science

Transformations topologiques discrètes

Gilles Bertrand, Michel Couprie

To cite this version:

Gilles Bertrand, Michel Couprie. Transformations topologiques discrètes. Coeurjolly David, Montanvert Annick, Chassery Jean-Marc. Géométrie discrète et images numériques, Hermès, pp.187-209, 2007. hal-00622392

HAL Id: hal-00622392

https://hal.science/hal-00622392

Submitted on 12 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transformations topologiques discrètes

Gilles BERTRAND et Michel COUPRIE
IGM, Laboratoire A^2SI, ESIEE

11 mars 2008

Référence : Transformations topologiques discrètes, G. Bertrand et M. Couprie, Chapitre 8 du livre *Géométrie discrète et images numériques*, David Coeurjolly, Annick Montanvert et Jean-Marc Chassery, pages 187–209, Hermès, 2007.

En traitement d'image, il est souvent utile de transformer un objet tout en préservant les caractéristiques topologiques de cet objet, par exemple pour le simplifier et en extraire un squelette. Dans ce rapport, nous verrons comment définir et implémenter efficacement de telles transformations. Nous verrons également qu'il est intéressant et possible de pouvoir modifier sélectivement la topologie : nous présenterons en particulier une méthode permettant de fermer les trous (ou tunnels) dans des objets tridimensionnels. Nous étendrons ensuite ces transformations au cas des images 2D en niveaux de gris, et montrerons comment exploiter ces opérateurs topologiques pour filtrer, segmenter et restaurer des images.

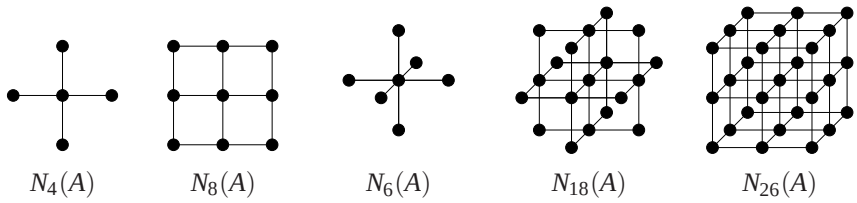
1 Transformations topologiques binaires

1.1 Voisinages, connexité

Nous rappelons ici les définitions de base de la topologie digitale pour les images binaires [18].

Un point $A \in \mathbb{Z}^d$ $(d = 2,3)$ est défini par $(A_1, \ldots, A_d)$ avec $A_i \in \mathbb{Z}$. Nous considérons les relations de voisinage N_4 et N_8 définies par, pour tout point $A \in \mathbb{Z}^2$:
$N_4(A) = \{B \in \mathbb{Z}^2; |B_1 - A_1| + |B_2 - A_2| \leq 1\}$,
$N_8(A) = \{B \in \mathbb{Z}^2; \max(|B_1 - A_1|, |B_2 - A_2|) \leq 1\}$,
et les relations de voisinage N_6, et N_{26} et N_{18} définies par, pour tout point $A \in \mathbb{Z}^3$:
$N_6(A) = \{B \in \mathbb{Z}^3; |B_1 - A_1| + |B_2 - A_2| + |B_3 - A_3| \leq 1\}$,
$N_{26}(A) = \{B \in \mathbb{Z}^3; \max(|B_1 - A_1|, |B_2 - A_2|, |B_3 - A_3|) \leq 1\}$,
$N_{18}(A) = \{B \in N_{26}(A); |B_1 - A_1| + |B_2 - A_2| + |B_3 - A_3| \leq 2\}$.
Ces voisinages sont illustrés dans la figure 1.

FIG. 1 – Les différents voisinages d'un point A (le point central) en 2D et en 3D.

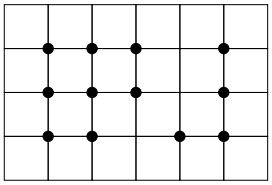


Dans la suite, nous désignerons par α un nombre tel que $\alpha \in \{4, 8, 6, 18, 26\}$. Nous définissons $N^*_\alpha(A) = N_\alpha(A) \setminus \{A\}$. Le point $B \in E$ est dit α-*adjacent* au point $A \in E$ si $B \in N^*_\alpha(A)$. Un α-*chemin* est une séquence de points $A_0 \ldots A_k$ telle que A_i est α-adjacent à A_{i-1} pour $i = 1 \ldots k$.

Soit $X \subseteq E$, nous disons que deux points A, B de X sont α-*connectés dans* X s'il existe un α-chemin dans X entre ces deux points. Ceci définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour cette relation sont les *composantes* α-*connexes de* X (voir la figure 2). Un sous-ensemble X de E est dit α-*connexe* s'il se compose exactement d'une composante α-connexe.

L'ensemble composé de toutes les composantes α-connexes de X est noté $C_\alpha(X)$. Un sous-ensemble de Y de E est dit α-*adjacent* à un point $A \in E$ s'il existe un point $B \in Y$ qui soit adjacent à A. L'ensemble des composantes α-connexes de X α-adjacentes au point A est noté $C^A_\alpha(X)$. Remarquons que $C_\alpha(X)$ et $C^A_\alpha(X)$ sont des ensembles de

FIG. 2 – L'ensemble formé par les points noirs se compose de deux composantes 4-connexes, ou d'une composante 8-connexe.



sous-ensembles de X et non des ensembles de points. De plus, si S est un ensemble, nous désignerons par $|S|$ le nombre de ses éléments.

1.2 Nombres de connexité

Nous désignerons par E l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$. Intuitivement, un point A d'un objet $X \subseteq E$ est dit simple si l'on peut le supprimer de X tout en préservant les caractéristiques topologiques de X. Dans le cas de $\mathbb{Z}^2$, cela implique de préserver le nombre de composantes connexes de l'objet et de son complémentaire. Dans $\mathbb{Z}^3$, il faut en plus préserver les trous (ou tunnels), notion que l'on peut formaliser grâce au groupe fondamental (voir par exemple [17]).

La définition d'un point simple repose donc sur des notions (composantes connexes, tunnels) qui sont qualifiées de globales, car elles ne peuvent se définir sans prendre en compte l'objet tout entier. Cependant, nous allons voir qu'il est possible de caractériser localement les points simples en 2D et en 3D grâce aux nombres de connexité qui sont introduits dans cette section, ce qui permet d'obtenir des algorithmes efficaces pour les transformations topologiques.

Donnons tout d'abord la définition des nombres de connexité pour le cas 2D. Nous verrons par la suite que le cas 3D est plus complexe.
Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et $A \in \mathbb{Z}^2$. Les *nombres de connexité* $T_\alpha(A,X)$ sont définis par : $T_\alpha(A,X) = |C_\alpha^A[N_8^*(A) \cap X]|$

Si nous utilisons une α-connexité pour X nous devons utiliser une $\overline{\alpha}$-connexité pour $\overline{X}$, par exemple en 2D la 4-connexité pour X est associée à la 8-connexité pour $\overline{X}$ (et vice-versa), et en 3D la 6-connexité pour X est associée à la 18- ou la 26-connexité pour $\overline{X}$ (et vice-versa). Ceci est nécessaire pour avoir une correspondance entre la topologie de X et celle de $\overline{X}$ (voir [18]). De plus, il est parfois nécessaire en 3D de distinguer la 6-connexité associée avec la 18-connexité de la 6-connexité associée avec la 26-connexité. Pour rendre explicite cette distinction, nous utiliserons le symbole 6^+ pour indiquer la notion de 6-connexité associée avec la 18-connexité (voir [7]). Donc, nous avons les possibilités suivantes en 2D : $(\alpha,\overline{\alpha}) = (4,8)$ ou $(8,4)$; et en 3D : $(\alpha,\overline{\alpha}) = (6,26)$, $(26,6)$, $(6^+,18)$ ou $(18,6^+)$.

Dans le cas 3D, la définition des nombres de connexité repose sur la notion de voisinage géodésique. Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ et $A \in \mathbb{Z}^3$, l'α-*voisinage géodesique de A dans X d'ordre k* est l'ensemble $N_\alpha^k(A,X)$ défini récursivement par :
$N_\alpha^1(A,X) = N_\alpha^*(A) \cap X$, et
$N_\alpha^k(A,X) = \cup\{N_\alpha(B) \cap N_{26}^*(A) \cap X, B \in N_\alpha^{k-1}(A,X)\}$.
En d'autres termes, $N_\alpha^k(A,X)$ est l'ensemble composé des points B de $N_{26}^*(A) \cap X$ tels qu'il existe un α-chemin π de A à B de longueur inférieure ou égale à k, tous les points

de π, sauf éventuellement A, appartenant à $N^*_{26}(A) \cap X$. Les *voisinages géodesiques* $G_\alpha(A,X)$ sont définis par : $G_6(A,X) = N^2_6(A,X)$, $G_{6^+}(A,X) = N^3_6(A,X)$, $G_{18}(A,X) = N^2_{18}(A,X)$, et $G_{26}(A,X) = N^1_{26}(A,X)$.
Nous pouvons maintenant donner une définition des nombres de connexité en 3D [19, 7, 9]. La figure 3 contient des exemples illustrant cette définition.

DÉFINITION **1.1** *Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ et $A \in \mathbb{Z}^3$. Les* nombres de connexité $T_\alpha(A,X)$ *sont définis par :* $T_\alpha(A,X) = |C_\alpha[G_\alpha(A,X)]|$

Notons qu'une formulation en termes de voisinages géodésiques permet également de retrouver la définition des nombres de connexité en 2D.

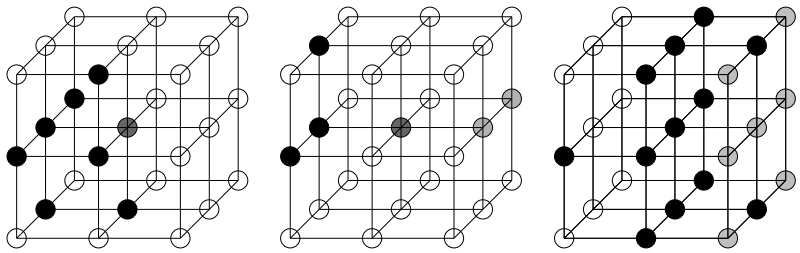
1.3 Classification topologique des points d'un objet

Si nous utilisons l'α-connexité pour X et l'$\overline{\alpha}$-connexité pour $\overline{X}$, les nombres $T_\alpha(A,X)$ et $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X})$ permettent de décrire les caractéristiques topologiques du point A dans l'objet X. En particulier, les nombres de connexité permettent de détecter si un point est simple ou non [7, 9], en 2D comme en 3D :

THEORÈME **1.1** *Soit $X \subseteq E$ et $A \in X$. Le point A est α-simple si et seulement si $T_\alpha(A,X) = 1$ et $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) = 1$.*

L'interprétation intuitive de cette caractérisation est que pour qu'un point soit simple, il faut et il suffit qu'il ait dans son voisinage une seule composante "objet" et une seule composante "fond" (voir figure 3a). Il est remarquable qu'une notion globale, la notion de point simple, puisse être caractérisée localement : cette propriété va nous permettre d'implémenter efficacement des transformations topologiques.

FIG. 3 – Posons $(\alpha,\overline{\alpha}) = (6,26)$. (a) : Le point central A est un point simple ($T_\alpha(A,X) = T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) = 1$) : l'unique composante "objet" dans son voisinage est en noir, et l'unique composante "fond" est en blanc. (b) : Le point central A est un isthme 1D ($T_\alpha(A,X) = 2$) ; les deux composantes "objet" sont en noir et en gris clair. (c) : Le point central A est un isthme 2D ($T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) = 2$) ; les deux composantes "fond" sont en blanc et en gris clair.



(a) (b) (c)

Les nombres de connexité permettent également de détecter d'autres types de points. Un point A tel que $T_\alpha(A,X) = 0$ est un *point isolé*. Si $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) = 0$, nous avons un *point intérieur*. Les *points de frontière* sont caractérisés par $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) \neq 0$.

Plaçons-nous dans le cas où $E = \mathbb{Z}^3$, et considérons maintenant un point A tel que $T_\alpha(A,X) \geq 2$. Si nous supprimons A de X, nous déconnectons localement l'objet X (voir

figure 3b). Nous pouvons dire qu'un tel point est un *isthme 1D*. Deux situations peuvent se rencontrer : soit les deux composantes "locales" qui servent à définir $T_\alpha(A,X)$ sont en fait reliées entre elles par un chemin dans X en dehors du voisinage du point A, et la suppression de celui-ci fait disparaître un tunnel de l'objet ; soit elles ne sont pas reliées et la suppression de A déconnecte effectivement X. Dans les deux cas, la topologie est modifiée, autrement dit le point A n'est pas simple.

De la même manière, un point $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) \geq 2$ peut être appelé *isthme 2D* car sa suppression conduit à fusionner des composantes connexes du voisinage de A dans $\overline{X}$ (voir figure 3b). Si ces composantes sont en fait reliées entre elles dans $\overline{X}$, supprimer A crée un nouveau tunnel pour l'objet, et si elles ne le sont pas, la suppression de A entraîne la diminution du nombre de cavités. Ici aussi, le point A est non-simple.

1.4 Amincissements et épaississements homotopiques

Retirer un point simple d'un objet X permet d'obtenir un objet Y inclus dans X qui est "topologiquement équivalent" à X. En itérant cette opération élémentaire, on peut obtenir une famille d'ensembles emboîtés qui sont tous topologiquement équivalents à X. Plus formellement, on dit que Y *est un amincissement homotopique élémentaire de* X, et l'on note $X \xrightarrow{e} Y$, s'il existe un point A simple pour X tel que $Y = X \setminus \{A\}$. On dit que Y *est un amincissement homotopique de* X si $Y = X$ ou s'il existe une séquence $\langle Y_0, \ldots, Y_k \rangle$ telle que $Y_0 = X$, $Y_k = Y$ et $Y_0 \xrightarrow{e} \ldots \xrightarrow{e} Y_k$. Si, de plus, aucun point de Y n'est simple, on dit que Y *est un amincissement homotopique ultime de* X

Il est souvent utile, lorsque l'on veut transformer un objet X par un amincissement homotopique, de garantir qu'un certain sous-ensemble K de X soit préservé. On dit que Y *est un amincissement homotopique de* X *contraint par* K si Y est un amincissement homotopique de X tel que $K \subseteq Y$. Si, de plus, aucun point de $Y \setminus K$ n'est simple, on dit que Y *est un amincissement homotopique ultime de* X *contraint par* K.

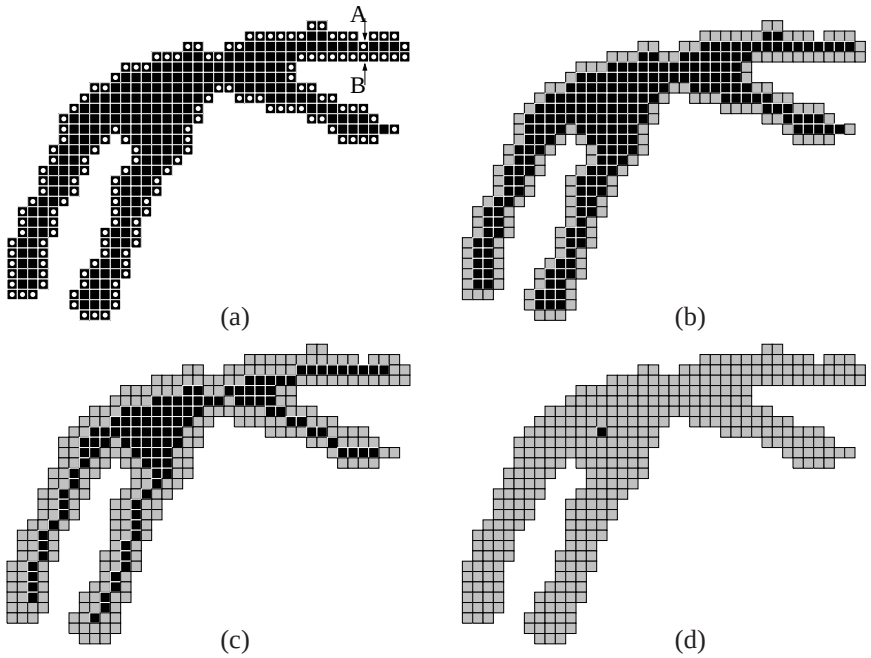
Notons enfin que pour épaissir un objet X en préservant sa topologie, il suffit de calculer un amincissement homotopique du complémentaire de X (dans la connexité duale), et de prendre le complémentaire du résultat.

1.5 Amincissements en largeur

Dans la figure 4a, on voit un objet X dont l'ensemble des points simples, noté $\mathrm{S}(X)$, a été marqué (dans cet exemple, nous utilisons la 8-adjacence pour l'objet). Il est important d'observer que l'on ne peut pas retirer simultanément tous ces points simples sans changer la topologie. En effet, dans le cas présent, l'enlèvement simultané des points simples A et B aurait pour effet de déconnecter la branche supérieure droite de l'objet. Deux approches sont possibles pour faire face à ce problème. L'approche parallèle consiste à identifier un sous-ensemble de points de $\mathrm{S}(X)$ qui peuvent être retirés simultanément sans changer la topologie [3, 5, 6]. L'approche séquentielle consiste à retirer un point simple, à recalculer l'ensemble des points simples pour le nouvel objet obtenu, et à réitérer cette opération. Par exemple, dans le cas de la figure 4a, si l'on retire le point A de l'objet X, alors le point B devient non simple pour le nouvel objet $X \setminus \{A\}$ obtenu. Nous étudions l'approche séquentielle dans ce rapport.

Considérons l'algorithme *AmincissementLargeur*. Il prend pour paramètres d'entrée un objet X, un nombre d'itérations L et une contrainte K (ensemble de points á préserver) éventuellement vide. Au début de chaque itération de la boucle "tant que" (ligne 2), l'ensemble P contient tous les points simples de l'objet courant. Pour la raison discutée précédemment, il n'est pas possible d'ôter tous les points de P sans précaution. Pour

FIG. 4 – (a) : Un objet X (en noir), ses pixels simples sont marqués en blanc, les pixels simples A et B ne peuvent être retirés simultanément. (b) : Un amincissement homotopique de X, obtenu après une étape de l'algorithme *AmincissementLargeur*. (c) : Après deux étapes de l'algorithme *AmincissementLargeur*. (d) : Un amincissement homotopique ultime de X, obtenu par l'algorithme *AmincissementLargeur* avec $K = \emptyset$ et $L = +\infty$.



décider du retrait éventuel d'un point A (ligne 6), un test est donc effectué (ligne 5) pour savoir si le point est toujours simple pour l'ensemble X. Si le point est effectivement retiré, ses voisins qui sont dans l'objet (ensemble $N(A) \cap X$, ligne 5) sont mémorisés pour examen à l'itération suivante. Notons que le voisinage considéré est $N = N_8$ en 2D, et $N = N_{26}$ en 3D. La composition de l'ensemble P permet de ne retirer de X à chaque itération que des points qui étaient simples pour X en début de l'itération. Autrement dit, une itération de l'algorithme *AmincissementLargeur* retire une "couche unitaire" de points de X, avec en premier lieu l'obligation de préserver la topologie et l'ensemble K. Le paramètre L permet donc de contrôler l'étendue de l'amincissement (voir figure 4b,c). Cet algorithme permet également d'obtenir un amincissement homotopique ultime si l'on choisit $K = \emptyset$ et $L = +\infty$ (voir figure 4d). Il peut être implémenté de façon à s'exécuter en temps linéaire, grâce à l'utilisation de structures de listes pour les ensembles P, Q et d'un tableau de booléens permettant de tester en temps constant quels sont les éléments de E qui se trouvent dans Q, évitant ainsi la duplication d'éléments dans la liste correspondante. Le test pour savoir si un point est simple peut être effectué en temps constant grâce à la caractérisation locale du théorème 1.1.

Algorithme 1 : algorithme *AmincissementLargeur*

Données : $X \subseteq E$, $L \in \mathbb{N}$, $K \subseteq X$
Résultat : X

1 $P = \{A \in X \mid A \text{ est simple pour } X\}$;
2 **tant que** $P \neq \emptyset$ *et* $L > 0$ **faire**
3 $\quad Q = \emptyset$;
4 $\quad$ **pour chaque** $A \in P$ **faire**
5 $\quad\quad$ **si** $A \notin K$ *et* A *est simple pour* X **alors**
6 $\quad\quad\quad X = X \setminus \{A\}$;
7 $\quad\quad\quad$ **pour chaque** $B \in N(A) \cap X$ **faire** $Q = Q \cup \{B\}$;
8 $\quad P = \emptyset$; $L = L - 1$;
9 $\quad$ **pour chaque** $A \in Q$ **faire si** A *est simple pour* X **alors** $P = P \cup \{A\}$;

1.6 Squelettes curvilignes et surfaciques

Nous avons vu comment obtenir un amincissement homotopique ultime d'un objet X qui soit approximativement centré dans X, grâce à l'amincissement en largeur. Un tel amincissement homotopique ultime, parfois également appelé squelette ultime, est par définition minimal dans le sens où aucun point ne peut en être retiré sans modifier la topologie. En 2D, dans le cas où l'objet est fini, connexe et sans trou, il est démontré dans [21] que tout amincissement homotopique ultime est réduit à un point (voir figure 4d). Or dans beaucoup d'applications des squelettes, il est nécessaire de préserver en plus de la topologie, des caractéristiques géométriques de l'objet initial, comme ses parties saillantes. Dans la littérature, on trouve principalement deux stratégies permettant d'obtenir ce résultat. La première consiste à garantir l'inclusion de l'axe médian (voir [10]). dans le squelette, cette stratégie sera étudiée section 1.7. La seconde consiste à définir une notion de point extrémité (de courbe en 2D et 3D, de surface en 3D). Habituellement, un *point extrémité de courbe pour* X est défini comme un point de X qui n'est adjacent qu'à un seul autre point de X. Les extrémités de surfaces sont plus difficiles à définir, nous verrons dans la suite comment surmonter cette difficulté. Les points extrémités seront préservés, en plus des points non simples, au cours du processus d'amincissement, ce qui permettra de conserver dans le squelette des "branches" et/ou des éléments surfaciques. Pour obtenir un tel résultat, il suffit de modifier l'algorithme *AmincissementLargeur* en ajoutant au début de la boucle " **pour chaque** $A \in P$ **faire** " (juste après la ligne 4) l'instruction : "**si** *A est un point extrémité pour* X **alors** $K = K \cup \{A\}$". La contrainte K initiale est, sauf nécessité particulière, l'ensemble vide.

On notera que l'ordre des points dans le processus peut jouer un rôle important. En effet, un ruban vertical de 2 pixels de large (en 2D) sera réduit en un couple de pixels si l'ordre choisi est l'ordre habituel de balayage (gauche-droite, haut-bas) alors qu'un ruban horizontal de 2 pixels de large sera aminci en une ligne de même longueur et d'un pixel de large avec ce même balayage. Pour éviter ce défaut, il faudra choisir avec soin un ordre qui traite "équitablement" les différentes orientations. En 2D, certains auteurs préconisent un parcours (horaire ou anti-horaire) du contour de l'objet [23], mais cette stratégie s'applique difficilement en 3D. La méthode la plus couramment employée consiste à classer les points suivant leur position relative à l'objet (en 2D : nord, sud, est, ouest), à se donner un ordre sur ces orientations, et à traiter tous les

Algorithme 2 : algorithme *AmincissementDirectionnel*

Données : $X \subseteq E$, $L \in \mathbb{N}$, $K \subseteq X$
Résultat : X

1 $P = \{A \in X \mid A \text{ est simple pour } X\}$;
2 **tant que** $P \neq \emptyset$ *et* $L > 0$ **faire**
3 $Q = \emptyset$;
4 **pour** $t = 1$ **à** *nombre de directions* **faire**
5 **pour chaque** $A \in P$ *tel que* $type(A) = t$ **faire**
6 **si** A *est un point extrémité pour* X **alors** $K = K \cup \{A\}$;
7 **si** $A \notin K$ *et* A *est simple pour* X **alors**
8 $X = X \setminus \{A\}$;
9 **pour chaque** $B \in N(A) \cap X$ **faire** $Q = Q \cup \{B\}$;
10 $P = \emptyset$; $L = L - 1$;
11 **pour chaque** $A \in Q$ **faire si** A *est simple pour* X **alors** $P = P \cup \{A\}$;

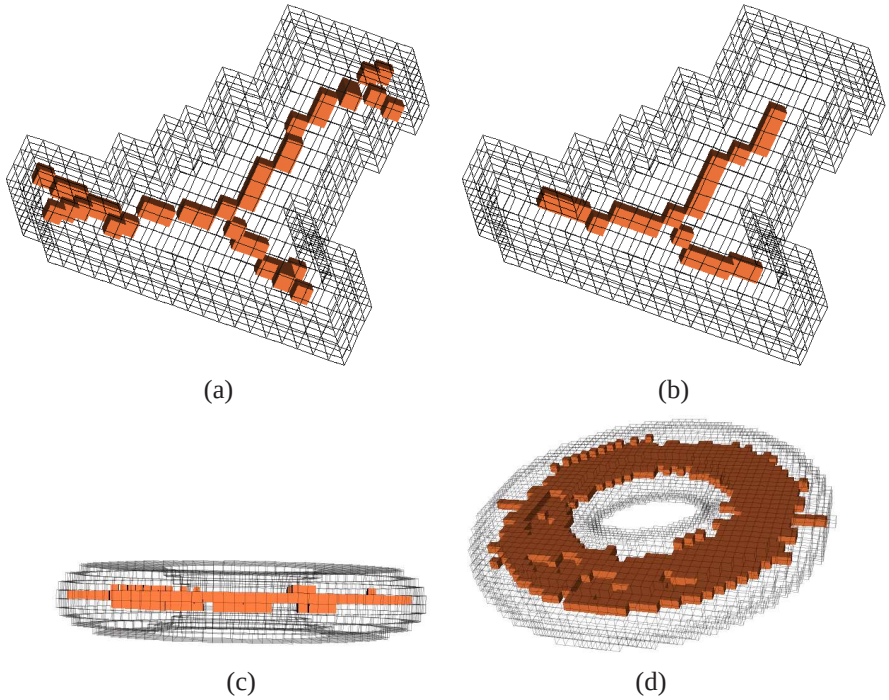
points ayant une même orientation avant de passer à l'orientation suivante.

Plus précisément, en 2D, on dira qu'un pixel A appartenant à l'objet est de type 1, et l'on notera $\text{type}(A) = 1$ (resp. 2, 3, 4), si son voisin nord (resp. sud, est, ouest) est hors de l'objet. Une classification analogue peut être définie pour le cas 3D. L'algorithme *AmincissementDirectionnel* est une modification de l'algorithme *AmincissementLargeur* qui implémente cette stratégie.

Bien que d'apparence simple, la méthode basée sur les points extrémités pour obtenir un squelette curviligne ou surfacique pose pourtant des problèmes difficiles à résoudre. Tout d'abord, si la définition d'un point extrémité de courbe en 2D ou en 3D est relativement naturelle, il n'en est pas de même pour la définition d'un point de bord de surface en 3D. Il n'existe pas à l'heure actuelle un consensus sur la "bonne" définition d'une telle notion, dans le cadre de la topologie digitale. La seconde difficulté concerne la robustesse du squelette vis-à-vis des petites altérations du contour de l'objet. En effet, cette stratégie est particulièrement sensible au "bruit" affectant le contour, qui se traduit en général par un grand nombre de branches parasites pouvant perturber les étapes ultérieures d'exploitation du squelette.

Nous présentons ici une troisième stratégie, originale, basée sur la classification topologique des points présentée section 1.3. Cette stratégie consiste à détecter dynamiquement lors de l'amincissement, non pas des extrémités de courbe ou de surface, mais des points amenés à devenir dans le squelette des points de courbe ou de surface. Ces points sont accumulés dans l'ensemble K (la contrainte) pour la suite de l'amincissement. Pour obtenir un squelette curviligne (resp. surfacique), il suffit de modifier l'algorithme *AmincissementDirectionnel* en remplaçant la ligne 6 par l'instruction : "**si** *A est un isthme 1D (resp. 2D) pour X* **alors** $K = K \cup \{A\}$". Une illustration est donnée figure 5. En comparant le résultat (b) de cette stratégie avec (a), on voit que seules les saillances les plus significatives de cet objet donnent naissance à des branches du squelette. La figure 5(c,d) montre un exemple de squelette surfacique obtenu grâce à cette approche.

FIG. 5 – (a) : Un objet X et un squelette curviligne de X basé sur les extrémités de courbes. (b) : Un squelette curviligne de X basé sur les isthmes 1D. (c,d) : Un squelette surfacique (vu sous deux angles) d'un objet X' basé sur les isthmes 2D.



1.7 Transformations guidées par une fonction de priorité

Nous allons maintenant étudier une autre stratégie d'amincissement qui consiste à contrôler, à l'aide d'une fonction numérique appelée fonction de priorité, l'ordre dans lequel les points sont traités. Cette fonction associe à tout point A de X un nombre entier ou réel $P(A)$, qui représente la priorité du point A. Les points de X seront traités selon les valeurs croissantes de P. On pourra donner à certains points A la priorité $P(A) = +\infty$, ce qui aura pour signification que ces points ne doivent pas être retirés ; autrement dit, l'ensemble des points de priorité infinie sera la contrainte pour l'amincissement.

Cette stratégie est réalisée par l'algorithme *AmincissementGuidé*. La complexité de cet algorithme est déterminée par le choix de la structure de données utilisée pour représenter la fonction P, par exemple, un arbre de recherche équilibré permet d'obtenir une complexité globale en $O(n \log n)$, où n est le nombre de points de l'image. Dans certains cas particuliers de la fonction P, dont celui très courant où P est une carte de distance (voir [10]), il est possible d'implémenter l'algorithme *AmincissementGuidé* en temps linéaire (voir [2]).

Une première utilisation des squelettes guidés consiste à prendre pour P la carte de distance au complémentaire de l'objet. Ainsi, seront choisis en priorité les points de l'objet qui sont les plus proches du fond. Ceci permet de prendre une décision sur la notion de distance utilisée pour centrer le squelette : distances discrètes, distances de chamfrein, distance euclidienne, etc. (voir [10]) ; et d'obtenir, en particulier par le

Algorithme 3 : algorithme *AmincissementGuidé*

Données : $X \subseteq E, P$ une fonction de X dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$
Résultat : X
répéter
  Soit A un élément de X tel que A est simple pour X et $P(A)$ est minimal ;
  $X = X \setminus \{A\}$;
jusqu'à *stabilité* ;

choix de la distance euclidienne, une bien moindre sensibilité aux rotations qu'avec la stratégie d'amincissement en largeur.

Il paraît naturel d'associer à un amincissement guidé par une carte de distance, la contrainte de préserver en totalité ou en partie les points de l'axe médian défini par cette même distance. On peut ainsi associer les qualités géométriques de l'axe médian, partout centré dans l'objet selon une définition précise, et la préservation de la topologie assurée par l'amincissement homotopique.

Il n'est cependant pas suffisant pour obtenir un squelette correctement centré, dans le cas de la distance euclidienne en particulier, d'utiliser l'algorithme *Amincissement-Largeur* avec la fonction de priorité définie par $P(A) = +\infty$ si $A \in \mathrm{AM}_E(X)$, et $P(A) = d_E(A, \overline{X})$ sinon (où $\mathrm{AM}_E(X)$ désigne l'axe médian euclidien de X, et d_E la distance euclidienne). Cette méthode donne habituellement des résultats corrects sur des petites images, mais ne garantit pas, en particulier dans le cas de grandes images, que les points du squelette homotopique qui ne sont pas dans l'axe médian soient "bien centrés" dans l'objet. En 2D par exemple, cela se manifeste par des branches du squelette qui ne suivent pas les lignes de plus grande pente de la carte de distance.

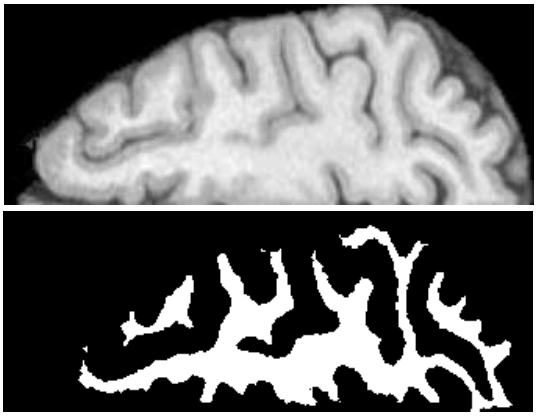
Ce problème a été mis en évidence dans [22] (voir également [14]). Une solution à ce problème, qui s'applique aux cas 2D et 3D, a été proposée dans [14]. Elle consiste à définir une fonction de priorité qui prend en compte à la fois la carte de distance et une fonction auxiliaire définie dans le voisinage de chaque point du squelette détecté dynamiquement.

Dans certaines applications, il peut être également pertinent de prendre pour fonction de priorité les niveaux de gris d'une image. Ceci a du sens lorsqu'il est possible d'interpréter le niveau de gris comme la "vraisemblance" pour un pixel d'appartenir à une certaine classe ou région. Considérons par exemple l'application qui consiste à extraire, à partir d'une image IRM en 3D de la tête, la matière blanche du cerveau (voir figure 6a). D'après les connaissances de la physiologie humaine et les paramètres de l'imageur à résonance magnétique, on sait qu'un élément de volume A se situant dans la matière blanche produit une réponse, codée par une valeur $F(A)$ du voxel correspondant, qui se situe entre deux bornes $\mu_1 < \mu_2$. On sait de plus, d'après les données anatomiques, que la matière blanche du cerveau constitue un volume simplement connexe, c'est-à-dire topologiquement équivalent à une boule. D'où l'idée de partir d'un objet $X = \{A_0\}$, où A_0 est un point quelconque se situant dans la matière blanche, par exemple un point choisi par l'opérateur, et d'effectuer un amincissement homotopique de $\overline{X}$ (*i.e.*, un épaississement homotopique de X) guidé par la fonction de priorité P définie par :

$$P(A) = \begin{cases} |F(A) - \mu|, \text{ où } \mu = \frac{\mu_1+\mu_2}{2} & \text{si } \mu_1 \leq F(A) \leq \mu_2, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a ainsi la garantie que l'objet résultat (le complémentaire de l'ensemble obtenu par le processus d'amincissement) aura bien la topologie d'une boule, et que les points de

FIG. 6 – (a) : Détail d'un plan (2D) extrait d'une IRM 3D du cerveau. (b) : Résultat de la méthode décrite dans le texte. Noter que le résultat est connexe en 3D, bien que la coupe présentée ici ne le soit pas en 2D.



cet objet ont tous dans l'image F des valeurs se situant dans la plage permise (voir figure 6b). Cette méthode a été exploitée avec succès et généralisée pour segmenter d'autres structures cérébrales, en particulier le cortex, dans [15, 16].

Dans ce dernier type d'application, il est particulièrement utile de pouvoir opérer des filtrages de type morphologique (ouvertures, fermetures, filtres séquentiels alternés) sur un objet tout en garantissant la préservation de la topologie. On trouvera dans [12] la définition d'opérateurs permettant de tels filtrages.

1.8 Fermeture de trous

Nous avons vu qu'il est possible, grâce à la notion de point simple, de concevoir des opérateurs qui transforment un objet en préservant strictement sa topologie. Cependant, modifier la topologie de manière contrôlée est nécessaire dans certaines applications. Ce thème est très peu abordé dans la littérature. Nous présentons ici ce qui est à notre connaissance, le premier algorithme permettant de fermer des trous (ou tunnels) dans un objet en trois dimensions. Un trou dans un objet en 3D n'est pas une région de l'espace, comme on peut s'en convaincre en considérant un tore plein, qui est un objet comportant un unique trou (voir aussi les exemples figure 7). Intuitivement, la présence d'un trou dans un objet peut être caractérisée par l'existence d'un chemin fermé inclus dans l'objet, et ne pouvant être transformé de façon continue en un point unique, tout en restant dans l'objet. Fermer des trous dans des objets 3D n'est donc pas un problème trivial, en particulier il n'est pas possible d'utiliser, comme en 2D, des algorithmes de recherche de composantes connexes. Basée sur les nombres de connexité (section 1.2) et la notion d'amincissement guidé (section 1.7), la méthode présentée ici permet de fermer des trous dans un objet 3D. Cette méthode permet de plus de contrôler par un paramètre la "taille" des trous à fermer (figure 7b). Elle peut être implantée par un algorithme linéaire en temps de calcul.

L'idée de base de la méthode consiste à plonger l'objet X dont on veut fermer les trous, dans un autre objet Y connexe, sans trou et sans cavité (une cavité est une composante connexe finie du fond), tel qu'un cube par exemple. On amincit itérativement

Y en enlevant des points n'appartenant pas à l'objet X, et en s'assurant à l'aide des nombres de connexité que l'enlèvement du point ne crée pas de trou ni de cavité. Cette méthode a été introduite et formalisée dans [1, 2], nous en rappelons ici les principales notions et propriétés.

DÉFINITION **1.2** *Soient X,Y tels que $X \subseteq Y \subseteq E$. On dit que Y* est une enveloppe topologique de *X si Y n'a ni trou ni cavité, et si $\forall A \in Y \setminus X$, l'ensemble $Y \setminus \{A\}$ a un trou ou une cavité.*

Le théorème suivant permet de caractériser localement la classe des ensembles qui sont des enveloppes topologiques, relativement à la classe des ensembles qui sont sans cavité et sans trou.

THEORÈME **1.2** *Soient X,Y tels que $X \subseteq Y \subseteq E$. Supposons que Y soit sans cavité et sans trou. Alors, Y est une enveloppe topologique de X si et seulement si, pour chaque A de $Y \setminus X$, A est un point intérieur ou un isthme 2D pour Y.*

COROLLAIRE **1.1** *Soient X,Y,Z tels que $X \subseteq Y \subseteq Z \subseteq E$ et que Z soit sans cavité et sans trou. Si Y peut être obtenu à partir de Z en retirant séquentiellement et jusqu'à stabilité des points A tels que $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{Z}) = 1$, alors Y est une enveloppe topologique de X.*

Afin d'obtenir un résultat bien "centré" sur l'objet X, on guide le processus décrit ci-dessus par une carte de distance à l'objet, calculée pour les points du complémentaire de X (les points situés à la plus grande distance de l'objet seront traités en priorité). On peut également introduire un paramètre t permettant de contrôler la "taille" des trous que l'on ferme : si l'on décide de retirer durant l'exécution de l'algorithme les points A tels que $T_{\overline{\alpha}}(A,\overline{X}) \geq 1$, et ayant une valeur supérieure à t pour la carte de distance, on laissera ouverts les trous de grande taille. Une légère modification de l'algorithme *AmincissementGuidé* avec un choix de structures de données adaptées permet d'obtenir un algorithme linéaire en temps de calcul.

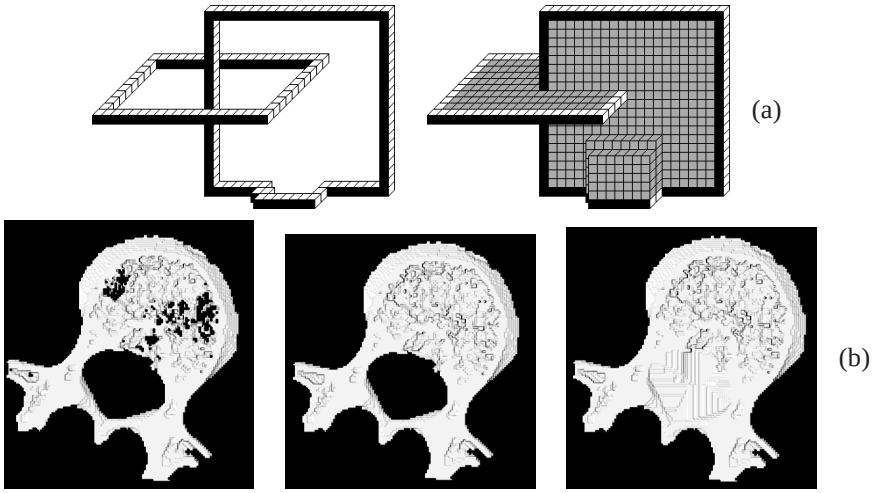
2 Transformations topologiques en niveaux de gris

Dans cette section, les notions topologiques telles que celles de point simple, d'amincissement et d'amincissement ultime, sont étendues au cas des images en niveaux de gris. Des applications au filtrage, à la segmentation et à la restauration d'images sont présentées.

Une image 2D en niveaux de gris peut être vue comme une fonction F de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$. Pour tout point A de $\mathbb{Z}^2$, $F(A)$ est le niveau de gris, ou luminosité de A. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit $F \in \mathcal{F}$ et $k \in \mathbb{Z}$, la *coupe (ou seuil) de F au niveau k* est l'ensemble F_k composé de tous les points $A \in \mathbb{Z}^2$ tels que $F(A) \geq k$. Observons qu'une coupe est un ensemble de points, *i.e.*, une image binaire. Comme dans le cas binaire, si nous utilisons l'α-adjacence pour les coupes F_k de F, nous devons utiliser l'$\overline{\alpha}$-adjacence pour les ensembles complémentaires $\overline{F_k}$, avec $(\alpha,\overline{\alpha}) = (8,4)$ ou $(4,8)$. Considérons la fonction $-F$, appelée *fonction complémentaire* de F (pour chaque point A de $\mathbb{Z}^2$, $(-F)(A) = -F(A)$). Notons que les ensembles complémentaires des coupes de F sont des coupes de $-F$. Dans tous les exemples et figures de ce rapport, nous choisirons $\alpha = 8$ pour les coupes de F, donc nous devrons utiliser $\overline{\alpha} = 4$ pour les coupes de $-F$.

FIG. 7 – Illustration d'un algorithme de fermeture de trous dans des objets 3D. (a) : L'utilisation d'une carte de distance permet de "centrer" la position de la surface qui ferme le trou. (b) : Un paramètre permet de régler la"taille" des trous à fermer.



Une composante connexe non vide X d'une coupe F_k de F est un *maximum (régional) pour* F si $X \cap F_{k+1} = \emptyset$. Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ est un *minimum (régional) pour* F s'il est un maximum régional pour $-F$.

2.1 Topologie des coupes

Intuitivement, nous dirons qu'une transformation de F préserve la topologie si la topologie de chacune des coupes de F est préservée. Donc, la "topologie des coupes" d'une fonction (*i.e.*, d'une image en niveaux de gris) dérive directement de la topologie des images binaires [8]. Basées sur cette idée, les notions suivantes généralisent aux fonctions la notion de point simple.

DÉFINITION **2.1** *Soit $F \in \mathcal{F}$, le point $A \in \mathbb{Z}^2$ est* destructible (pour F) *si A est simple pour F_k, avec $k = F(A)$. Le point $A \in \mathbb{Z}^2$ est* constructible (pour F) *si A est destructible pour $-F$.*

Nous voyons que le niveau de gris d'un point destructible (resp. constructible) peut être abaissé (resp. élevé) d'une unité, tout en préservant la topologie de F. Par exemple figure 8 (a), le point au niveau 8 est à la fois destructible et constructible ; les deux points au niveau 2 sont constructibles, mais seulement l'un de ceux-ci peut être élevé car, ensuite, l'autre point deviendrait non-constructible.

Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$. On dit que *G est un amincissement homotopique élémentaire de F*, et l'on note $G \xrightarrow{e} F$, s'il existe un point A destructible pour F tel que $G(A) = F(A) - 1$, et pour tout $B \neq A$, $G(B) = F(A)$. On dit que *G est un amincissement homotopique de F* si $G = F$ ou s'il existe une séquence $\langle G_0, \ldots, G_k \rangle$ telle que $G_0 = F$, $G_k = G$ et $G_0 \xrightarrow{e} \ldots \xrightarrow{e} G_k$. De plus, si aucun point de G n'est destructible, on dit que G *est un amincissement homotopique ultime de F*. On définit de façon duale les notions d'*épaississement homotopique* et d'*épaississement homotopique ultime*.

FIG. 8 – (a) : Image originale. (b) : Un amincissement homotopique ultime de (a). (c) : Un épaississement homotopique ultime de (a).

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	4	9	7	7	7	0	1
1	0	9	9	3	7	7	0	1
1	0	8	6	7	7	7	0	1
1	0	7	6	2	2	7	0	1
1	0	0	6	7	7	7	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

(a)

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	7	0	0	0	1
1	0	0	9	3	7	0	0	1
1	0	0	0	7	2	6	0	1
1	0	0	6	2	2	6	0	1
1	0	0	0	6	6	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

(b)

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	9	9	9	9	9	0	1
1	0	9	9	3	7	7	0	1
1	0	9	9	9	9	9	0	1
1	0	9	6	6	2	9	0	1
1	0	9	6	9	9	9	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

(c)

Par exemple figure 8, l'image (b) est un amincissement homotopique ultime de (a), et (c) est un épaississement homotopique ultime de (a).

2.2 Caractérisations locales et classification topologique des points

Soit $F \in \mathcal{F}$ et $A \in \mathbb{Z}^2$. Pour alléger les notations, nous omettrons dans la suite la mention de F lorsqu'elle n'est pas indispensable, par exemple, nous noterons $N^{++}(A)$ plutôt que $N^{++}(A,F)$. Nous définissons les quatre voisinages suivants :
$N^{++}(A) = \{B \in N_8^*(A); F(B) > F(A)\}$;
$N^{+}(A) = \{B \in N_8^*(A); F(B) \geq F(A)\}$;
$N^{--}(A) = \{B \in N_8^*(A); F(B) < F(A)\}$;
$N^{-}(A) = \{B \in N_8^*(A); F(B) \leq F(A)\}$.
Nous définissons également :

$$\eta^-(A) = \begin{cases} \max\{F(B); B \in N^{--}(A)\}, & \text{si } N^{--}(A) \neq \emptyset, \\ F(A) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de démontrer qu'abaisser un point destructible A à la valeur $\eta^-(A)$ est une transformation homotopique. Par exemple figure 8 (a), le point au niveau 9 dans la troisième rangée peut être abaissé à 7, puis à 4, et finalement à 0 sans changer la topologie des coupes. Cette propriété, en plus de la caractérisation locale des points destructibles et constructibles que nous allons présenter maintenant, permet de concevoir des algorithmes efficaces pour calculer des transformations préservant la topologie des coupes, sur le modèle de l'algorithme *AmincissementLargeur* et de l'algorithme *AmincissementGuidé* (voir [13]).

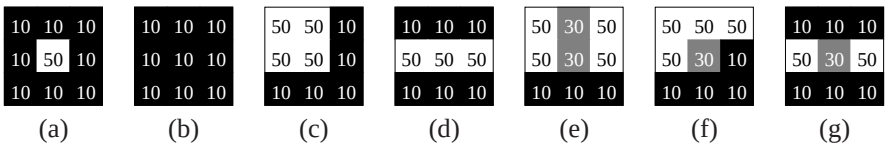
Nous définissons les quatre *nombres de connexité* :
$T^{++}(A) = |C_\alpha[A, N^{++}(A)]|$; $T^{+}(A) = |C_\alpha[A, N^{+}(A)]|$;
$T^{--}(A) = |C_{\overline{\alpha}}[A, N^{--}(A)]|$; $T^{-}(A) = |C_{\overline{\alpha}}[A, N^{-}(A)]|$.
La propriété suivante peut être dérivée directement des définitions ci-dessus et de la caractérisation locale des points simples pour les images binaires (voir théorème 1.1). Elle montre que les nombres de connexité permettent de caractériser localement les points destructibles et constructibles.
Soit $F \in \mathcal{F}$ et $A \in \mathbb{Z}^2$.

A est destructible pour $F \Leftrightarrow T^+(A) = 1$ et $T^{--}(A) = 1$;
A est constructible pour $F \Leftrightarrow T^-(A) = 1$ et $T^{++}(A) = 1$.

De plus, les nombres de connexité permettent une classification des caractéristiques

topologiques d'un point :
A est un *pic* si $T^{+}(A) = 0$; A est *minimal* si $T^{--}(A) = 0$;
A est *k-divergent* si $T^{--}(A) = k$ avec $k > 1$;
A est un *puits* si $T^{-}(A) = 0$; A est *maximal* si $T^{++}(A) = 0$;
A est *k-convergent* si $T^{++}(A) = k$ avec $k > 1$;
A est un *point bas* s'il n'est pas maximal ; A est un *point haut* s'il n'est pas minimal ;
A est un *point intérieur* s'il est à la fois minimal et maximal ;
A est une *marche simple* s'il est à la fois destructible et constructible ;
A est un *point selle* s'il est à la fois convergent et divergent.

FIG. 9 – Type topologique. Le point central est du type suivant : a : pic ; b : intérieur ; c : destructible maximal ; d : maximal 2-divergent ; e : destructible 2-convergent ; f : marche simple ; g : selle.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

En considérant toutes les valeurs possibles des quatre nombres de connexité, on montre [8] que le type d'un point $A \in \mathbb{Z}^2$, quelle que soit la fonction $F \in \mathcal{F}$, est nécessairement l'un des suivants, et seulement celui-ci : 1) un pic ; 2) un puits ; 3) un point intérieur ; 4) un point constructible minimal ; 5) un point destructible maximal ; 6) un point minimal convergent ; 7) un point maximal divergent ; 8) une marche simple ; 9) un point destructible convergent ; 10) un point constructible divergent ; 11) un point selle. La figure 9 montre des exemples de sept de ces types de points ; les quatre autres types peuvent être obtenus par dualité (par exemple un puits est le dual d'un pic, etc).

Nous terminerons ce rapport en décrivant trois applications de la topologie des coupes. Ces applications combinent des étapes de transformation homotopique, et des étapes durant lesquelles la topologie doit être modifiée de manière contrôlée.

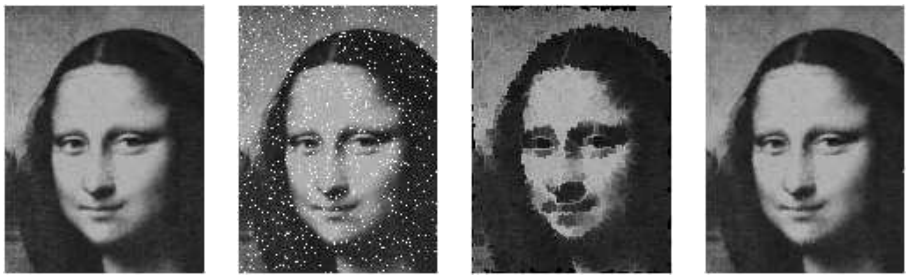
2.3 Filtrage topologique

Dans le cas de bruit impulsionnel, une impulsion positive apparaît dans l'image comme un groupe constitué de quelque pixels, dont la valeur est plus élevée que celles des pixels du voisinage. Nous pouvons détecter une impulsion constituée d'un pixel A isolé en testant le type topologique de A : il s'agit d'un pic. On peut "détruire" ce pic en abaissant A à la valeur $\eta^{-}(A)$. Pour des impulsions formées par plusieurs pixels adjacents, cette procédure n'est pas suffisante. Cependant, si nous amincissons l'image en abaissant des points destructibles, une impulsion formée de quelques pixels se réduira à un pic, qui pourra donc être détecté puis abaissé.

D'un autre côté, nous ne voulons pas abaisser des groupes constitués d'un plus grand nombre de pixels, qui correspondent à des objets significatifs dans l'image. C'est pourquoi nous avons besoin d'un analogue de l'algorithme *AmincissementLargeur*, qui permet de contrôler par le nombre d'itérations, l'étendue spatiale de l'amincissement (voir [13] pour plus de détails).

Dans la figure 10, nous montrons le résultat (c) de trois étapes d'amincissement homotopique appliquées à l'image (b), suivies d'un abaissement des pics. Les impul-

FIG. 10 – Filtrage topologique. (a) : Image originale. (b) : Image originale plus bruit impulsionnel. (c) : Après 3 étapes d'amincissement et abaissement des pics. (d) : Reconstruction homotopique de (c) contrainte par (b).



(a) (b) (c) (d)

sions ont été éliminées, mais des points n'appartenant pas à des impulsions ont aussi été abaissés ; il faut donc leur redonner leur altitude initiale. Nous utilisons pour cela un opérateur de reconstruction homotopique, qui n'est autre qu'un épaississement homotopique contraint par l'image d'origine (c'est-à-dire qu'un point ne pourra atteindre une valeur supérieure à celle qu'il avait dans l'image d'origine). La contrainte de n'élever que des points constructibles garantit que les les pics abaissés ne seront pas restaurés à leur altitude originale. La figure 10 (d) montre une reconstruction homotopique de (c) contrainte par (b). Les impulsions négatives peuvent être filtrées par la procédure duale. Ce filtrage topologique donne, pour filtrer du bruit impulsionnel, de meilleurs résultats qu'un filtre médian ou qu'un filtre basé sur l'ouverture et la reconstruction morphologiques. En particulier, il permet de mieux préserver les structures minces.

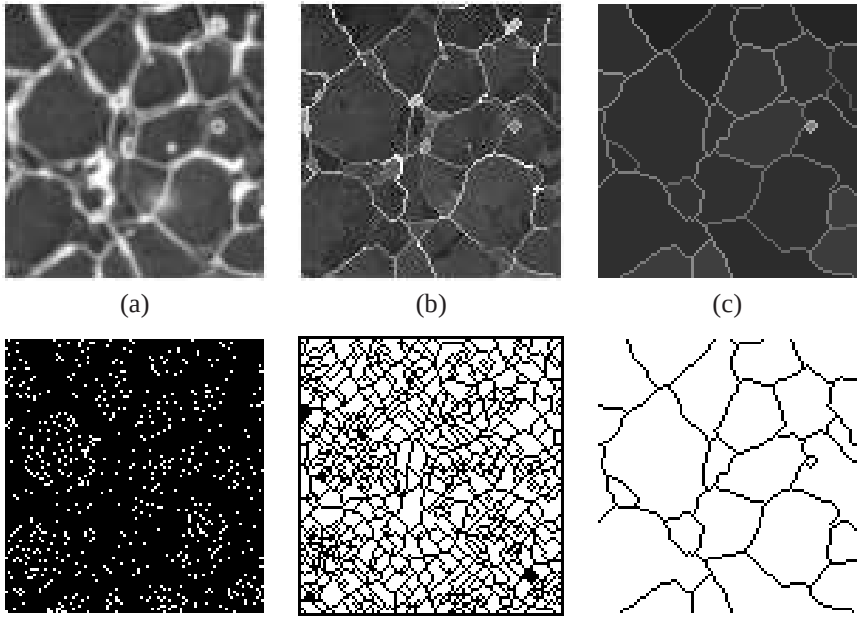
2.4 Segmentation topologique

La figure 11 (a) montre une image dans laquelle on perçoit des cellules sombres séparées par des frontières plus claires. A cause du bruit, cette image contient beaucoup de minima régionaux : ils apparaissent en blanc dans (a'). Un amincissement homotopique ultime (b) préserve par construction tous ces minima et les étend le plus possible (b'). La figure 12 (a) montre un profil 1D extrait d'un tel amincissement homotopique ultime. Dans ce profil, les points A, B et C correspondent à des points divergents qui séparent des minima voisins. Certains de ces points divergents (A, B) peuvent être considérés comme des points "irréguliers" [8] : nous voudrions les abaisser pour éliminer (fusionner) des minima de faible profondeur.

Pour cela, nous introduisons la notion de point λ-destructible et d'amincissement filtré ultime.Intuitivement, un point λ-destructible A est soit un point destructible, soit un pic, soit un point divergent se trouvant sur une crête qui divise son voisinage en plusieurs régions plus basses, telles qu'au plus une de ces régions ait une différence d'altitude supérieure à λ par rapport à A. Par exemple, les points à 20 et 100 dans la figure 12 (b) sont tous deux 10-destructibles, mais ne sont pas destructibles. Un amincissement filtré ultime est défini de manière similaire à un amincissement homotopique ultime, en remplaçant "destructible" par λ-destructible.

Dans la figure 11 (c), nous voyons un amincissement filtré ultime de (a) avec

FIG. 11 – Segmentation topologique. (a) : Image originale. (b) : Amincissement homotopique ultime. (c) : Amincissement filtré ultime avec $\lambda = 40$. (a'), (b'), (c') : En blanc, les minima de (a), (b), (c) respectivement.



$\lambda = 40$. Une segmentation binaire (c') est obtenue par extraction des minima régionaux de (c). Notons que cette méthode de segmentation ne fait intervenir qu'un seul paramètre, qui est lié à une notion de contraste local.

2.5 Restauration de crêtes

Les méthodes de segmentation basées sur l'extraction de minima et la fusion de régions, ainsi que celles basées sur l'extraction de contours, sont sensibles à la qualité des crêtes qui séparent les régions d'intérêt (comme dans la figure 11 ou la figure 14) et qui peuvent se trouver perturbées par le bruit. Nous proposons ici une procédure pour détecter et éliminer les cols étroits sur les crêtes d'une fonction 2D.

Tout d'abord, il est nécessaire d'opérer un amincissement homotopique ou filtré limité, de manière à réduire les crêtes à des lignes minces (voir figure 13 (b)). Maintenant, nous pouvons détecter les points qui appartiennent à des "crêtes minces" et qui vont devoir être élevés pour éliminer des cols.

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et $A \in X$, A est un *point séparant (pour X)* si $\overline{T}(A) \geq 2$. Soit $F \in \mathcal{F}$, un point $A \in \mathbb{Z}^2$ est appelé un *point séparant (pour F)* s'il existe un niveau $k \in \mathbb{Z}$ tel que A est un point séparant pour l'ensemble F_k.

Par exemple, dans la figure 13 (e) les points aux niveaux 15, 20 et 25 sont des points séparants. Nous voyons figure 13 (b) que pour éliminer le col au niveau 90, nous pouvons élever des points séparants qui sont constructibles, jusqu'à ce qu'un point selle apparaisse ; le point selle pourra alors être détecté et remonté. Nous voyons aussi

FIG. 12 – Illustration des points λ-destructibles. (a) : Un profil 1D d'un amincissement homotopique ultime. (b) : Une image avec deux points 10-destructibles (niveaux 20 et 100) qui ne sont pas destructibles.

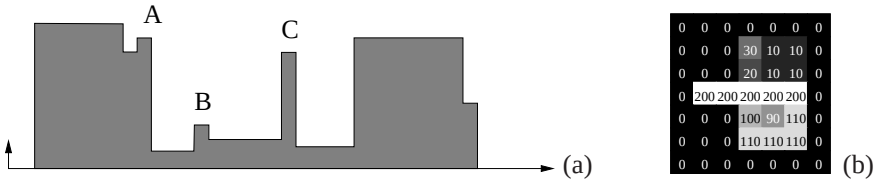


FIG. 13 – Restauration de crêtes. (a) : La valeur la plus basse sur la crête est celle du col (90). (b) : Après une étape d'amincissement homotopique. (c,d) : Après 1 et 3 iterations de l'algorithme de restauration de crêtes. (e) : Les points aux niveaux 15, 20 et 25 sont des points séparants.

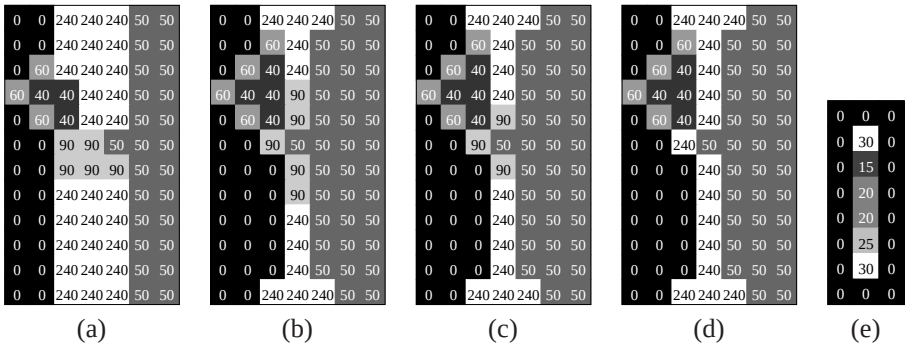


figure 13 (b) que si nous élèvons itérativement, sans restriction, des points séparants constructibles, nous renforcerons également des lignes de crêtes basses comme celle au niveau 60 dans l'image. En effet, le point au niveau 60 qui est voisin d'un point à 240 est un point séparant constructible. De plus nous ne pouvons utiliser ici la notion de point λ-destructible et l'amincissement filtré car nous risquerions d'abaisser les cols que nous voulons précisément remonter.

Nous définissons maintenant une classe de points qui forment de "bon candidats" pour la restauration de crêtes. Soit $F \in \mathcal{F}$, un point $A \in \mathbb{Z}^2$ qui est séparant pour F est dit *extensible* s'il est soit un point constructible, soit un point selle pour F, et si A possède au moins un voisin B qui vérifie les deux conditions suivantes :
i) B est séparant (au sens binaire) pour F_k, avec $k = F(A)$, et
ii) B n'est pas séparant (au sens binaire) pour toute coupe F_j avec $j > k$.

La méthode de restauration de crêtes procède par détection et élévation itérative de points extensibles. Une description plus précise de l'algorithme se trouve dans [13]. Dans la figure 13 (c), nous voyons le résultat après une itération de cet algorithme, appliqué sur (b). En particulier, nous voyons que deux points de niveau 90 dans (b) on été remontés à 240, et que les points de niveau 60 n'ont pas été modifiés. Dans (d), nous voyons le résultat après 3 iterations : la crête à 240 a été restaurée. Des itérations

supplémentaires ne changeraient pas ce résultat.

FIG. 14 – Restauration de crêtes. (a) : Image originale. (b) : Après un opérateur de gradient (les valeurs les plus faibles sont en blanc). (c) : Après un amincissement filtré. (e) : Après restauration de crêtes jusqu'à stabilité. (d,f) : Seuil de (c,e) respectivement, au même niveau.

Dans la figure 14, nous illustrons cette méthode sur une image de gradient (b). L'image (b) est d'abord amincie, ce qui donne (c). Si nous seuillons cette image, soit nous perdons des segments significatifs (d), soit nous obtenons trop de détails. L'image (e) a été obtenue à partir de (c) par restauration de crêtes jusqu'à stabilité. Le même seuil a été appliqué sur (c,e), donnant (d,f) respectivement. Nous voyons que beaucoup de segments significatifs ont été récupérés, sans introduction d'artefacts.

3 Conclusion

Nous avons vu qu'il était possible de définir rigoureusement et d'implémenter efficacement des opérateurs topologiques agissant sur des images binaires en 2D et en 3D, ainsi que sur des images en niveaux de gris. Ces opérateurs permettent, soit de transformer une image en préservant la topologie, soit de modifier sélectivement celle-ci pour parvenir à un filtrage, à un réhaussement ou à une segmentation. Les transformations décrites dans ce rapport sont de nature séquentielle, au sens où après modification de chaque point simple, il est nécessaire de prendre en compte cette modification dans les tests de simplicité d'autres points. Il en résulte que parfois, des choix arbitraires doivent être effectués quant à l'ordre dans lequel les points simples sont examinés, menant à

des résultats différents. Les stratégies d'amincissement en parallèle, non décrites ici, permettent en revanche d'obtenir des squelettes définis de façon unique.

Cependant, les conditions permettant de garantir la préservation de la topologie lorsque l'on retire des points en parallèle sont bien plus complexes à établir que la caractérisation des points simples. De nombreuses tentatives, durant ces quarante dernières années, ont été faites pour essayer de résoudre ce problème [11]. La notion d'ensemble non-simple minimal, introduite par C. Ronse [20], permet de tester si un ensemble donné de points simples peut être enlevé tout en préservant la topologie. La notion de point P-simple proposée dans [3] permet de plus, de concevoir des algorithmes parallèles d'amincissement 3D dont le caractère homotopique est garanti par construction. Récemment, un cadre général pour l'étude de l'amincissement parallèle en dimension quelconque a été développé par un des auteurs de ce rapport [4]. Ce cadre, qui a pour centre la notion de noyau critique, généralise à la fois celui des ensembles non-simples minimaux et celui des points P-simples. Le lecteur intéressé pourra consulter le site `http://www.esiee.fr/~info/a2si/ck` pour une revue complète sur les noyaux critiques.

Références

[1] Z. Aktouf, G. Bertrand, and L. Perroton. A three-dimensional holes closing algorithm. In *Discrete geometry for computer imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 36–48. Springer, 1996.

[2] Zouina Aktouf, Gilles Bertrand, and Laurent Perroton. A three-dimensional holes closing algorithm. *Pattern Recogn. Lett.*, 23(5) :523–531, 2002.

[3] G. Bertrand. On P-simple points. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Math.*, I(321) :1077–1084, 1995.

[4] G. Bertrand. On critical kernels. Technical Report IGM2005-05, Université de Marne-la-Vallée, 2005.

[5] G. Bertrand and M. Couprie. New 2d parallel thinning algorithms based on critical kernels. In *Combinatorial Image Analysis*, volume 4040 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 45–59. Springer, 2006.

[6] G. Bertrand and M. Couprie. New 3d parallel thinning algorithms based on critical kernels. In *Discrete geometry for computer imagery*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2006. to appear.

[7] Gilles Bertrand. Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids. *Pattern Recognition Letters*, 15 :1003–1011, 1994.

[8] Gilles Bertrand, Jean-Christophe Everat, and Michel Couprie. Image segmentation through operators based upon topology. *J. of Electronic Imaging*, 6(4) :395–405, 1997.

[9] Gilles Bertrand and Grégoire Malandain. A new characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 15(2) :169–175, February 1994.

[10] J.M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie discrète en imagerie*. Hermès, Paris, 1991.

[11] M. Couprie. Note on fifteen 2d parallel thinning algorithms. Technical Report IGM2006-01, Université de Marne-la-Vallée, 2006.

[12] M. Couprie and G. Bertrand. Topology preserving alternating sequential filter for smoothing 2d and 3d objects. *J. of El. Imaging*, 13(4) :720–730, 2004.

[13] Michel Couprie, Francisco Nivando Bezerra, and Gilles Bertrand. Topological operators for grayscale image processing. *J. of Electronic Imaging*, 10(4) :1003–1015, 2001.

[14] Michel Couprie, David Coeurjolly, and Rita Zrour. Discrete bisector function and euclidean skeleton in 2d and 3d. *Image and Vision Computing*, 2006. to appear.

[15] Xavier Daragon and Michel Couprie. Segmentation topologique du neo-cortex cérébral depuis des données irm. In *procs. congrès RFIA*, volume 3, pages 809–818, 2002.

[16] P. Dokládal, I. Bloch, M. Couprie, D. Ruijters, R. Urtasun, and L. Garnero. Segmentation of 3d head mr images using morphological reconstruction under constraints and automatic selection of markers. *Pattern Recognition*, 36 :2463–2478, 2003.

[17] S. Fourey and R. Malgouyres. A concise characterization of 3D simple points. *Discrete Applied Mathematics*, 125(1) :59–80, 2003.

[18] T. Yung Kong and A. Rosenfeld. Digital topology : introduction and survey. *Comp. Vision, Graphics and Image Proc.*, 48 :357–393, 1989.

[19] G. Malandain, G. Bertrand, and N. Ayache. Topological segmentation of discrete surfaces. *Int. J. of Comp. Vision*, 10 2 :183–197, 1993.

[20] C. Ronse. Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images. *Discrete Applied Mathematics*, 21(1) :67–79, 1988.

[21] Azriel Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *J. of the Association for Computer Machinery*, 17 :146–160, 1970.

[22] Hugues Talbot and Luc Vincent. Euclidean skeletons and conditional bisectors. In *Procs. VCIP'92, SPIE*, volume 1818, pages 862–876, 1992.

[23] Luc Vincent. *Algorithmes morphologiques à base de files d'attente et de lacets. Extension aux graphes*. PhD thesis, École des Mines de Paris, France, 1990.