



**HAL**  
open science

## A survey of discrete shape analysis for computer imagery

Yukiko Kenmochi

► **To cite this version:**

Yukiko Kenmochi. A survey of discrete shape analysis for computer imagery. *IEICE Transactions on Information and Systems (Japanese Edition)*, 2004, J87-D-II (7), pp.1373-1390. hal-00622382

**HAL Id: hal-00622382**

**<https://hal.science/hal-00622382>**

Submitted on 18 Aug 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## 離散画像解析のための形状表現法に関するサーベイ

剣持 雪子<sup>†</sup>

A survey of discrete shape analysis for computer imagery

Yukiko KENMOCHI<sup>†</sup>

あらまし デジタル画像における形状解析手法の中でも、整数、あるいは有理数のみを用いた離散的解析手法に着目し、それらを離散画像解析と呼ぶことにする。離散画像解析に用いられる形状表現は、解析目的とそのアプローチの歴史的推移から、集合表現、関数表現、グラフ表現、位相幾何学的表現、距離表現、代数幾何表現に大別できる。本稿では上記の形状表現法を紹介し、それらの長所・短所を整理するとともに、それらの関係を明らかにする。

キーワード 形状表現, 離散幾何学, 離散位相幾何学, デジタル画像解析

### 1. ま え が き

パターン認識, コンピュータ・ビジョン, 医療画像処理など, 2次元あるいは3次元のデジタル画像解析が行われている研究分野において, 物体の形状解析は, テクスチャ解析, カラー解析とならび, 主要な画像解析の1つである。物体は, 空間中に格子状に規則正しく並ぶ標本点において観測され, その観測結果はデジタル画像の各画素の画素値となる。本稿では, デジタル画像のような格子空間(2次元では正方格子空間, 3次元では立方格子空間)に分布している格子点の集合から, 画像中の物体の形を解析することを考える。ここで, 格子幅を1とおくと格子点の座標は整数となり, このような格子点すなわち整数のみを用いた画像解析を特に離散画像解析とよぶ。

デジタル画像における形状解析では, 空間を連続空間とみなし, 空間中の任意の点の値をまわりの画素値から推定して, 空間全体の点を用いて物体の形状を解析する方法も数多く提案されている。しかし, 本稿では, 解析処理の入力として与えられるデジタル画像が離散であり, かつ解析部の計算機による演算も離散であることから, あくまでも空間中の格子点のみを用いて形状を解析する方法(離散画像解析)に着目し, 上記のような画素値を考慮した連続的方法は扱わな

いことにする<sup>(注1)</sup>。このような離散画像解析の利点は, 離散であることから有限個の組合せ数の代数構造を利用して解析処理を高速化したり, あるいは解析計算の結果の保証(常に正しい解を導出すること)や精度の限界を示したりすることが期待できることである。

#### 1.1 離散画像解析の歴史的背景

形状解析に使われる数学的道具として, 物の形, 大きさ, 位置を研究する幾何学がある。これを離散的なアプローチで, 特にデジタル画像解析のために正方格子, あるいは立方格子の空間における点の集合からの幾何学を考えたとき, それをデジタル幾何学[53]とよぶ。さらに, 幾何学の中でも, 位相写像によって不変な幾何学的性質を研究する学問を位相幾何学といい, デジタル画像解析のための離散的なアプローチによる位相幾何学をデジタル位相幾何学[60]とよぶ。以下に, 文献[14], [53], [60], [69], [87], [103], [106]を参考に, それぞれの分野の概要をその歴史的な流れとともに説明する。

デジタル幾何学に関する最初の論文は1960年代後半のRosenfeldとPfaltzによる距離変換に関する論文[81], [82]であることが知られており, その中ですでに点の近傍と連結の概念が使われている。デジタル幾何学を「デジタル画像における図形領域の幾

(注1): 空間の次元をひとつ上げることによって, 画素値を考慮した離散画像解析を行うことは可能である。例えば, 2次元濃淡画像は, 量子化された濃淡値を3次元の軸とおき, 3次元格子空間として考えればよい。

<sup>†</sup> 岡山大学工学部情報工学科, 岡山県  
Department of Information Technology, Okayama University, 3-1-1 Tsushimanaka Okayama 700-8530 Japan

何学的特徴に関する数学的研究」と定義づけたのも Rosenfeld である [89]。その後、上記の連結の概念を用いて、1970 年代には点列の直線性 [31] や点集合の凸性 [94] の研究が、1990 年代前半には点列の曲率 [14] などの研究がはじめられた。これらの 2 次元画像に関する研究に対応した 3 次元画像に関する研究としては、1980 年代に点集合の平坦性 [49] と凸性 [48] に関する研究成果が、そして 1990 年代後半には曲率 [75] に関する研究成果が見られはじめている。この他に、2 次元画像に関してだけではあるが、1980 年代後半から 2 つの点列の平行性、直交性が調べられている [63]。また、点集合の長さ、面積、体積などのモーメント計算に関する研究が、2 次元では 1980 年代後半 [111] に、3 次元では 1990 年代前半 [65] にそれぞれ始められている。

一方、デジタル位相幾何学に関する最初の論文は、1970 年の Rosenfeld による点の連結性に関する論文 [83] だといわれている。そして、デジタル位相幾何学という言葉は Rosenfeld によってはじめて文献 [84] で使われ、その後文献 [88] などによって広く紹介され、知られるようになった。その研究内容は、離散版の Jordan 曲線定理 [84]、デジタル位相 (点の連結の仕方) を保存した形状変形である細線化 [86]、境界点探索 [85] などで、いずれも点の連結の概念を用いて、1970 年代前半に Rosenfeld によりその研究成果が報告されている。それらの 2 次元画像に関する研究に対応した 3 次元画像に関する研究としては、それぞれ 1980 年代から 1990 年代にかけて Jordan 曲面定理 [55], [61]、細線化 [8]、境界探索 [6] に関する研究成果が見られるようになった。

### 1.2 離散画像解析のための形状表現法

本稿では、上記のような歴史的経緯を踏まえて、形状表現という断面から離散画像解析全体を理解することを目指す。まず、離散画像解析の基本となる形状表現として、集合表現と関数表現をあげることができる。デジタル画像の対象領域を集合として表現する集合表現は、数理形態学という集合演算によるデジタル画像解析の実現を目指した分野において、1970 年代に Serra らの研究グループによって用いられた形状表現である [71], [92]。また、関数表現は鳥脇らの研究グループにより同じく 1970 年代から提案されており [100]、デジタル画像を空間における関数として表現し、この関数を用いた簡易な演算によって高速な形状解析を目指す。1980 年代にはその関数表現と独

自の位相幾何学的表現とを組み合わせ、3 次元デジタル位相幾何学的問題を解いているという実績を持つ [103]。

ところで、前章より、デジタル幾何学・デジタル位相幾何学とも、そのはじまりには点の近傍と連結の概念が深く関わっていたことが分かる。この近傍の概念を形状表現にも反映させるため、上記の二つの集合表現・関数表現が使われ始めた同時期の 1970 年代に、デジタル画像の図形領域を集合としてだけでなく、近傍の概念も加えたグラフとして扱うようになった。グラフ表現のはじまりである。このグラフ表現を用いて、2 次元のデジタル位相幾何学の問題は 1970 年代前半に解決されたが、3 次元の問題の解決にはその後 20 年もかかっている (問題によっては今だに解決されていないものもある)。その 20 年の間に、研究者たちは 3 次元のデジタル位相幾何学の問題はグラフ表現で解決できないことに気づき、さまざまな位相幾何学的表現を提案した。このように位相幾何学的表現が複数提案されたのは、デジタル画像のような離散空間 (本稿では格子空間  $Z^n$  という) への位相の導入が数学的にも難しく、またグラフ表現による研究成果との整合性を保とうと努力したためである。

ここで、位相という言葉はあまりデジタル画像解析の分野では表れない。表れたとしても、連結 (点のつながり) の概念のみがクローズアップされ定義されていることが多く、厳密な意味での位相空間が定義されていることは少ない。しかし、出現頻度は少ないが、形状解析においてこの「位相」が暗に使われていることは実は非常に多い。例えば、2 次元図形の境界は曲線で、3 次元物体の境界は曲面であり、平面と平面の交わりは直線になる、といったユークリッド幾何学では当たり前で成立する事実を利用した形状解析アルゴリズムは多数存在する (曲線構造を利用した 2 次元境界探索アルゴリズム、曲面であることを仮定した 3 次元境界の曲率計算など)。しかし、離散空間で上記の事実が成り立つ保証はなく、保証を与えるためには離散空間における曲線や曲面、直線などの (ユークリッド空間とは別の) 定義が必要であり、さらにそれらの定義の上に上記の関係が成り立つことを証明する必要がある。そして、実際にはそれらの定義・証明は簡単ではなく、根本的に問題を解決するためには離散空間に位相を導入する必要がある。そうしなければ、上記の事実を利用した形状解析アルゴリズムが常に正しい結果を出力するという保証は得られない。そこで、

よくとられる方法が、空間を連続空間とみなし、空間中の任意の点の値を格子点の値から補間して求め、ユークリッド幾何学の枠組みで問題を解決しようというものである。デジタル画像解析だけでなく、物理現象の可視化や数値計算の主流はこの方法であるといつてよい(例えば、可視化でよく使われる等値面生成法 [68], [107] は、格子点の情報からユークリッド空間における補間面を生成していると考えられる)。しかし、本稿では、前述したとおり、あくまでも空間中の格子点のみを用いて形状を解析する方法(離散画像解析)にこだわり、格子点の集合に位相を導入した位相幾何学的表現をいくつか紹介する。

幾何学を扱う際には、位相のほかに距離の定義が必要となる。そのため、デジタル幾何学では格子空間の距離の定義から出発し、2次元のデジタル幾何学的問題(直線性、凸性、曲率、モーメント計算など)は、グラフ表現と集合表現に整数論、代数幾何、微分幾何、積分幾何などの知識が結び付き、組合せ理論的なアプローチで1970年代から取り組まれた。ところが、3次元のデジタル幾何学問題に対しては、組合せ数が膨大になるため、上記のような組合せ理論的なアプローチでは対応できないことがわかってきた。平坦性の問題に関しては、1990年代前半に整数論の研究成果を利用した代数幾何表現が離散数学の分野より提案され、風穴を明けた [80]。ここで、連続空間では代数幾何表現は代数方程式を満たす点の集合として表されるのだが、格子空間では点が離散に分布しているため、二つの不等式を満たす格子点の集合として表現される。その後、この代数幾何表現とグラフ表現の関係も徐々に明らかになってきている。また、曲率、モーメント計算に関する研究に関しては、位相幾何学的表現を用いた問題解決手法が1990年代から現れはじめている。

### 1.3 関連分野

CAD や CG においても三角形や四角形のメッシュを用いた位相幾何学的形状表現や、距離の定義が提案されている [21]。それらと離散画像解析のための形状表現との大きな違いは、CAD や CG では扱っている図形や物体の元の形状が分かっている場合がほとんどであり、その問題設定が「ユークリッド空間に存在する、形や構造が既知の物体を計算機内で離散的に表現するためにはどうすればよいか」となっている点である。したがって、例えば、位相的に球と同相な曲面であることが分かっている場合には、球と同相なメッシュ曲面を初期形状とし、位相を保存しながらメッシュの

頂点を動かしたり、メッシュの数を増やしたり減らしたりしてそれを变形させ、幾何学的なある距離を最小あるいは最大にすることで元の形状に近いメッシュ曲面を生成する。一方、離散画像解析では、入力として与えられるデジタル画像、すなわち格子点の集合から、元の形状がどうであったかを解析することを目的とし、形状表現法は形の解釈に用いられる。この形の解釈を一意に決定するためには、デジタル画像に対して(人間が介入することなく)一意に形状表現が得られることが要求される。本稿で紹介する形状表現法はその要求を満たしている。例えば、与えられたデジタル画像中に図形がいくつあるか分からない場合や、図形の形が分からない場合にもそれらの形状表現は有効であり、さらに図形の位相幾何学的特徴の解釈を与えることも可能となる。このように、用いられる形状表現法が似ていても、使用目的が異なれば形状表現法が満たすべき条件も異なってくる。

代数幾何表現は、幾何モデリングの分野から生まれ、その後画像認識へ応用されたという歴史的経緯からも分かるとおり、CAD や CG との関連は深い。例えば、空間直線はレイトレーシングの高速アルゴリズムへ応用 [17] されたり、空間平面を用いた多面体の単純化(面の削減)アルゴリズム [5], [30], [45] はプログレッシブメッシュ [37] とその目的が似ている。

### 1.4 本稿の流れ

次章以降、上記にあげた集合表現、関数表現、グラフ表現、位相幾何学的表現、距離関数、代数幾何表現をそれぞれ紹介し、それらの形状表現の関係を明らかにする。さらに、それぞれの長所・短所を調べるとともに、いくつかの評価基準を紹介し、それらを用いて上記の形状表現の評価を試みる。その評価結果より、どのような場合にどの形状表現を使うのがよいのか、形状表現の選択の指針を与えることを目指す。

## 2. 集合表現

画像内の物体領域を有限部分集合  $V \subset \mathbb{Z}^n$  で表す。そして、erosion, dilation といった集合演算子を用意し、有限集合  $V$  に対しそれらの演算(あるいは演算の組合せ)を施すことにより、さまざまな形状解析を実現する。このような集合演算による形状解析手法は数理形態学とよばれ、1970年代に G. Matheron や J. Serra らによりデジタル画像解析のための数理形態学が研究され [71], [92], [93]、今日ではデジタル画像解析の主要な手法のひとつとしてその有用性が認め

らている．数理形態学の理論的なフレームワークは文献 [32] にもまとめられており，最近の研究成果を中心とした幅広い応用分野への適用に関するサーベイとしては文献 [95] が参考になる．文献 [54] は日本語で書かれた唯一の数理形態学の入門本である．

数理形態学によるデジタル画像の形状解析の一例として，構造要素  $S$  による  $V$  の *erosion* は以下のように定義される．

$$e_S(V) = \{x \in V : S_x \subseteq V\} \quad (1)$$

ただし， $S_x$  は， $S$  にあらかじめ定められた基準点が  $x$  に一致するように  $S$  を平行移動させた結果を表す．数理形態学における主要トピックの 1 つに構造要素の決め方がある．例えば構造要素として，以下のように定義される  $m$  近傍  $N_m(x)$  を採用すると，上記の *erosion* は  $N_m(x)$  を用いた  $V$  の内点の集合を与える演算となる [106]．

$$N_m(x) = \{y \in Z^n : \|x - y\| \leq t\}. \quad (2)$$

ただし， $n = 2$  のとき  $m = 4, 8$  に対してそれぞれ  $t = 1, \sqrt{2}$  とし， $n = 3$  のとき  $m = 6, 18, 26$  に対してそれぞれ  $t = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  とする [87]．他にも，方向性を考慮した境界画素の抽出などさまざまな形状解析が集合演算を用いて実現できることが実証されている．

この表現の長所は，画像から集合表現が一意に得られることであり，また集合演算も簡単に計算機によって実現できることである．しかし，望みの形状解析に対応する集合演算が必ずしも簡単に得られるとは限らず，その場合，経験と実験に基づき集合演算を探すことになる．

### 3. 関数表現

関数表現では，各点  $x \in Z^n$  に対する 2 値関数  $f(x)$  として画像を表す [100], [103]．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in V \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

文献 [95] では，2 値画像は部分集合  $D_f \subset Z^n$  (定義域) から  $\{0, 1\}$  の 2 値への写像

$$f : D_f \subset Z^n \rightarrow \{0, 1\}$$

として定義されている．集合表現においては形状解析が集合演算によって実現されるのに対して，関数

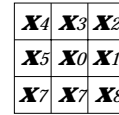


図 1 点  $x_0$  の 8 近傍の画素とそれらの順序付け  
Fig. 1 The 8-neighborhood of a pixel and the counterclockwise order of pixels.

表現では  $f(x_k)$  を変数とする関数によって解析を行う [100], [103]．

以下に例を示す．まず， $x_0 \in Z^2$  の 8 近傍  $N_8(x_0)$  の  $x_0$  を除く 8 点に，図 1 に示すように  $x_0$  の右隣りの点を始点に反時計回りに順序付けする．すると，式 (2) で定義された  $Z^2$  における 2 種類の近傍系である 4 近傍と 8 近傍は，以下のようにも定義できる．

$$N_4(x_0) = \{x_i : i \in S_4\} \cup \{x_0\},$$

$$N_8(x_0) = \{x_i : i \in S_8\} \cup \{x_0\}$$

ここで， $S_4 = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $S_8 = S_4 \cup \{2, 4, 6, 8\}$  とする．次に， $m = 4, 8$  に対して点  $x_0$  の  $m$  連結数  $c_m$  を

$$c_4(x_0) = \sum_{k \in S_4} (f(x_k) - f(x_k)f(x_{(k+1) \bmod 8})f(x_{(k+2) \bmod 8})),$$

$$c_8(x_0) = \sum_{k \in S_4} (\bar{f}(x_k) - \bar{f}(x_k)\bar{f}(x_{(k+1) \bmod 8})\bar{f}(x_{(k+2) \bmod 8})),$$

と定義する．ただし， $\bar{f}(x_k) = 1 - f(x_k)$  とする．この連結数を用いることにより，前章では集合演算を用いて定義した内点を，関数を用いて定義することができる．ある点  $x \in V$  が以下の 2 式を満たすとき， $x$  は  $V$  の内点であるという．

$$c_m(x) = 0,$$

$$\sum_{y \in N_m(x) \setminus \{x\}} f(y) \neq 0,$$

ここで， $m$  の値の選択は，式 (1) における構造要素  $S_x$  の選択に対応しており， $S_x$  が  $N_4(x)$  のときは  $m = 4$  に， $N_8(x)$  のときは  $m = 8$  にそれぞれ対応している．

上記の連結数を用いると内点と同様に境界点の定義もでき，曲率係数とよばれる関数をさらに用いると，境界点をその幾何学的条件または位相幾何学的条件に基づいて端点，連結点，分岐点，交差点などに分類することができる [100], [103], [109]．鳥脇らの研究グ

ループにより、関数表現はまず 2 次元 2 値画像に対して定義され、その後 2 次元多値画像 [109], そして 3 次元 2 値画像 [101], [110] に拡張され、最近では医療画像への応用を考えた 3 次元多値画像にも拡張した研究成果が発表されている [35], [103] .

他にも、必要な関数を用意することによって、さまざまな形状解析を高速に実現することができる。しかし、集合演算同様、望みの形状解析に対応する関数を得ることは必ずしも簡単ではない。実際には、次章以降の形状表現を併用することで関数の導出を行なうことが多く、また経験と実験に基づいて関数を得ることもある。また、関数表現による解析結果だけから、その幾何学的な解釈を与えることは難しい。

#### 4. グラフ表現

式 (2) の  $m$  近傍を用いて、 $n$  次元画像の物体  $V \subset Z^n$  のグラフ表現を以下のように与える。点  $x \in V$  をグラフの頂点とし、2 点  $x, y \in V$  が  $m$  近傍の関係  $x \in N_m(y)$  にあるとき、 $\{x, y\} \in E_m$  をグラフの枝とする。そのとき、 $V$  の  $m$  近傍グラフは

$$G_m = (V, E_m)$$

と表わされる [58], [77], [87], [106] . グラフ表現は、離散画像解析の中のデジタル位相幾何学とよばれる分野における古典的な形状表現法の一つである。この表現の長所は、集合表現と同様、入力画像からグラフ表現が一意に得られること、また計算機内での表現 (すなわちデータ構造) が容易に得られることである。

グラフ表現は点の近傍関係を枝として持っていることから、点列のつながり (パスと呼ぶ) を定義でき、さらに点の集合のつながり関係 (連結と呼ぶ) を定義することができる [58] . これらの概念を用いることで、 $Z^n$  において、ある点  $x \in V$  の近傍  $N_{3^{n-1}}(x)$  内の  $V$  と  $\bar{V}$  のそれぞれの点のつながり方 (点のつながり方はどの近傍系を用いるかで決まり、用いる近傍系はあらかじめ設定しておく) を調べることができる。そして、 $x$  の所属を  $V$  から  $\bar{V}$  に変えても、 $N_{3^{n-1}}(x)$  内の点のつながり方が変化しなければ、その点  $x$  は消去しても位相が変わらない単純点であるという [8], [58] (消去可能点 [103] ともいう) .  $V$  からこの単純点を順に消去していく操作を細線化とよぶ [58], [103] . そのため、細線化は位相を保存した  $V$  の変形とも言われ、文字認識や、血管や気管などの細長いものを対象とした 3 次元医療画像解析などに使われる。

ここで、この「位相」という言葉に注意しなければならない。この「位相」は、近傍や連結の概念を用いた「点のつながり方」を表しているだけで、次章で説明するような厳密な数学的定義にもとづいた位相空間を構成しているわけではない<sup>(注2)</sup> . 特に、 $Z^3$  においては、論文によってその「位相」の定義が異なることもあり、またどのような細線化をよいとするのかその評価基準の設定も難しいため、処理結果の比較や評価は難しい。最近では、いかに多くの点を一度に消去するかという並列化による高速計算の研究がされており、それらのアルゴリズムの詳細や比較については文献 [103] が詳しい。

グラフ表現において昔から指摘されてきた問題として、格子空間  $Z^n$  全体の点に対して同一の近傍系を用いると、位相幾何学的問題を引き起こすことが知られている [14], [77], [87], [106] . 例えば、物体の境界の点の集合が Jordan 曲線/曲面定理を満たすためには、 $V$  とその補集合  $\bar{V}$  のグラフ  $G_m$  と  $G_{m'}$  はそれぞれ別の近傍系を用いなければならないことが分かっている。具体的には、 $n = 2$  のとき  $(m, m') = (4, 8), (8, 4)$ ,  $n = 3$  のとき  $(m, m') = (6, 26), (26, 6), (6, 18), (18, 6)$  とすると位相的に破綻がおきないことが証明されている [55], [58]<sup>(注3)</sup> . これらの近傍系ペア  $(m, m')$  を考慮したグラフ表現は、2 次元画像解析において境界探索などによく使われている [14], [77], [87], [106] . これは、グラフ表現が持つ点の近傍構造を用いることによって、2 次元図形の境界を曲線として表現できることを暗に示している。しかし、3 次元画像解析においては、3 次元物体の境界は曲面となり、点の近傍構造のみでは曲面を表現することは難しいため、曲面構造を利用した 3 次元境界探索でグラフ表現を用いることはすすめられない。グラフ表現を用いた曲面の定義は、例えば文献 [76] で試みられているが、定義に用いられている制約が強過ぎ、曲面とみなされる場合が少な過ぎることがその後の研究で指摘されている [9], [19] . 上記の例を見ても分かる通り、グラフ表現はその位相情報の不足から、曲面構造を用いた境界探索をはじめとするさまざまな位相幾何学的問題に対処できないのであ

(注2): デジタル画像処理の分野で英語で digital topology というとき、この「位相」をさすことが多い。一方、次章で示すような (数学的に厳密な意味での) 格子空間  $Z^n$  における位相空間に対応する英語には discrete topology という言葉が用いられていることが多い。しかし、その使い分けは明確にされているわけではないので、注意が必要である。  
(注3): ただし、この証明はグラフ表現ではなく、continuous analog という位相幾何学的表現 (多面体的複体) を用いて導き出している。

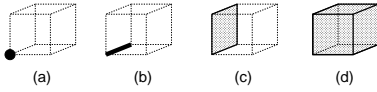


図 2 (a)0次元胞体, (b)1次元胞体, (c)2次元胞体, (d)3次元胞体

Fig. 2 (a) a 0-cell, (b) a 1-cell, (c) a 2-cell and (d) a 3-cell.

る<sup>(注4)</sup>. そのため, 次章で紹介するようなさまざまな位相幾何学的表現が提案された.

## 5. 位相幾何学的表現

位相幾何学的表現は, 上記の集合表現に位相構造を付加したものであり, さまざまな表現が提案されている. それらの相違点は,  $\mathcal{Z}^n$  への位相の導入の仕方である. 以下に 3次元デジタル画像解析のために提案された主要な 4種類の位相空間について説明する. それらを含む,  $\mathcal{Z}^2$  と  $\mathcal{Z}^3$  における可能な位相空間に関する最近の研究成果としては, 例えば文献 [26] がある.

### 5.1 Kovalevsky 位相空間表現

Kovalevsky 位相空間は, 胞体の集合  $A$  と胞体の順序関係  $B \subset A \times A$  からなる順序集合, すなわち胞複体  $C = (A, B)$  による位相空間である [62].  $\mathcal{Z}^3$  に対する Kovalevsky 位相空間の胞体とその順序関係は, 具体的には以下の手順で得られる. まず, 各格子点  $x \in \mathcal{Z}^3$  を中心とする各辺の長さが 1 の立方体を考える. そして, 立方体の頂点, 辺, 面をそれぞれ 0, 1, 2次元胞体とよび, 立方体自身を 3次元胞体とよぶ (図 2). そして,  $n$ 次元胞体  $e$  が  $n'$ 次元胞体  $e'$  の境界部分に含まれるとき (ただし,  $n < n'$  とする),  $(e, e') \in B$  とする.

文献 [62] では,  $V$  に対して得られる  $C$  の 3次元部分複体  $C_V = (A_V, B_V)$  (ただし,  $A_V \subset A, B_V \subset B$ ) の求め方がいくつか示されている. この問題は, 以下の写像を求めることと同等である.

$$g: A \rightarrow \{0, 1\} \quad (3)$$

ただし,

$$g(e) = \begin{cases} 1 & (e \in A_V \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

(注4): ただし, 3次元空間を複数の断面, すなわち複数の 2次元空間に分割して考え, 3次元境界探索問題を複数の 2次元境界探索問題ととらえればグラフ表現による問題解決も可能である [106]. しかし, このアプローチは問題を 3次的に解決しているとは言えない.

とする. 一般的によく使われる  $g$  は以下の手順で決定される [62]. まず,  $x$  を 3次元胞体  $e \in A$  の重心とすると,

$$g(e) = \begin{cases} 1 & (x \in V \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義する. そして,  $n$ 次元胞体  $e (n < 3)$  に関して,  $(e, e') \in B$  の関係をもつすべての 3次元胞体  $e'$  の集合を  $D(e)$  とすると,

$$g(e) = \max_{e' \in D(e)} g(e') \quad (4)$$

と定義する. そうして決定された写像  $g$  より胞体の集合  $A_V$  がまず決まり, 次に

$$B_V = \{(e', e) \in B : e', e \in A_V\}$$

を得る. このような  $g$  による  $C_V$  の決定則を最大ラベル則とよぶ. 同様に, 式 (4) のかわりに

$$g(e) = \min_{e' \in D(e)} g(e') \quad (5)$$

を用いた  $C_V$  の決定則を最小ラベル則とよぶ. 他にも, 式 (4), (5) 以外の写像  $g$  を用いた  $C_V$  のさまざまな決定則が提案されている.

3次元部分複体  $C_V$  を求める際に用いる写像  $g$  の選択は, 前章におけるグラフ表現  $G_m, \overline{G}_{m'}$  の近傍系ペア  $(m, m')$  の選択と関連している. 文献 [62] において, 最大ラベル則は近傍系ペア  $(m, m') = (26, 6)$  に, 最小ラベル則は  $(m, m') = (6, 26)$  に対応していることが指摘されている. 文献 [7] ではさらに, すべての近傍系ペア  $(m, m') \in \{6, 18, 26\} \times \{6, 18, 26\}$  に対応した関数  $g(e)$  が示されている.

Kovalevsky 位相空間表現では, 3次元複体  $C_V$  の境界  $\partial C_V$  は  $C_V$  と  $C_{\overline{V}}$  の共通部分である 2次元複体となり, 位相的に矛盾のない定義となっている.  $\partial C_V$  を構成する 2次元胞体は, 幾何学的には隣り合う 2つの格子点  $p \in V$  と  $q \in \overline{V}$  を中心とする 3次元胞体が共有する正方形面であり, そのデータ構造は格子点ペア  $\{p, q\}$  (ただし,  $p \in N_6(q)$ ) として表される [6], [34], [62].

この表現の長所は,  $n$ 次元画像の物体  $V \subset \mathcal{Z}^n$  から  $C_V$  が一意に決定できること, また,  $\partial C_V$  を構成する 2次元胞体の集合は格子点ペアの集合であるため, 計算機への実装が容易であることである. そのため, この表現を用いた高速な 3次元境界探索アルゴリ

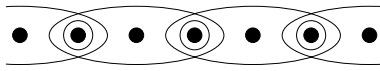


図 3 1次元格子空間  $\mathcal{Z}$  における連結位相空間 COTS  
Fig. 3 A part of COTS on  $\mathcal{Z}$  with the minimal neighborhoods of points.

ズムなどがすでに提案されており [6], 医用画像解析の分野ではすでに実用されている実績がある [34]. また, Kovalevsky 位相空間表現を用いて Jordan 曲面が定義できることも示されている [33], [34]. その一方, 3次元胞体の形状が立方体に限定されているため, 可視化や幾何学特徴量 (例えば, 表面積) の計算には不向きであることも指摘されている [43].

### 5.2 Khalimsky 位相空間表現

Khalimsky 位相空間は, 1次元格子空間  $\mathcal{Z}$  へ導入される位相空間の一つである連結順序位相空間 COTS(Connected Ordered Topological Space) の 3次元格子空間  $\mathcal{Z}^3$  への拡張である [47]. COTS は, 各点  $p \in \mathcal{Z}$  に特定の最小近傍  $S(p)$  を割り当てることにより,  $\mathcal{Z}$  に位相を導入する. すべての点は 2 つタイプに分けられ, タイプ 1 の点  $p \in \mathcal{Z}$  は最小近傍として  $S(p) = \{p-1, p, p+1\}$  をもち, タイプ 2 の点  $p \in \mathcal{Z}$  は最小近傍として  $S(p) = \{p\}$  をもち. そして, 例えば奇数の点をタイプ 1, 偶数の点をタイプ 2 (あるいはその逆) とすると, 図 3 のように  $\mathcal{Z}$  において COTS を形成することができる. ここで, 集合  $\{p\}$  は  $S(p) = \{p\}$  のとき開集合であることに注意する.

いま各  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を COTS とし,

$$X = X_1 \times X_2 \times X_3$$

という積位相空間を構成し, これを Khalimsky 位相空間とよぶ [47], [61]. Khalimsky 位相空間では, 3次元格子空間  $\mathcal{Z}^3$  の各点  $p = (p_1, p_2, p_3)$  は最小近傍  $S(p) = \{(p_1 + k_1, p_2 + k_2, p_3 + k_3)\}$  を持つ. ここで, すべての  $i = 1, 2, 3$  に対し,  $p_i \in \mathcal{Z}$  がタイプ 1 のとき (あるいは, 上記の例では奇数のとき),  $k_i = -1, 0, 1$  と設定し,  $p_i \in \mathcal{Z}$  がタイプ 2 のとき (あるいは, 上記の例では偶数のとき),  $k_i = 0$  と設定する. このような設定のもとでは, 3次元格子空間  $\mathcal{Z}^3$  の各点  $p$  は, 図 4 に示されたように 4 種類の最小近傍のうちの一つを持つ. 最小近傍の種類は  $p$  の座標によって決まり, 例えばすべての座標値が奇数のときにはタイプ (a), 一つの座標値が偶数で残り二つが奇数のときにはタイプ

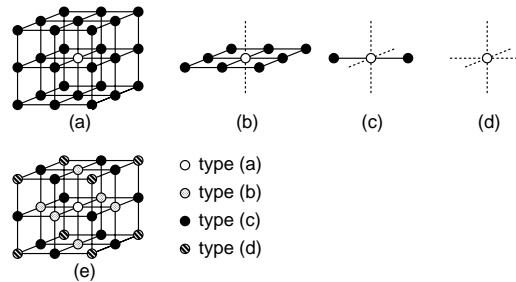


図 4 Khalimsky 位相空間における 4 種類の最小近傍 (a), (b), (c), (d) と, それらの最小近傍を持つ点の空間配置 (e)

Fig. 4 The four different points of  $\mathcal{Z}^3$  with their minimal neighborhoods such as (a) 26-, (b) 8-, (c) 2-, (d) 0-neighborhoods and (e) their configuration in  $\mathcal{Z}^3$ .

(b), 二つの座標値が偶数で残り一つが奇数のときにはタイプ (c), すべての座標値が偶数のときにはタイプ (d) となる. ここで, 集合  $\{p\}$  は  $S(p) = \{p\}$  のとき開集合であり,  $S(p) = N_{26}(p)$  のとき閉集合である. そして, それぞれの場合に応じて, 点  $p$  を開点, あるいは閉点とよぶ. さらに, 開点と閉点 (図 4 の (a) と (d)) を pure, それ以外の点 (例えば図 4 の (b) と (c)) を mixed であるという.

図 4 に示すように,  $\mathcal{Z}^3$  における点はその座標により異なる最小近傍を持つため,  $\mathcal{Z}^3$  上の Khalimsky 位相空間  $X$  は非等質空間であることがわかる. そのため, Khalimsky 位相空間を用いた画像解析では, 各画素にどの最小近傍系を割り当てるか, その割り当て方により解析結果がかわってしまうという問題を抱えている. その問題に対する解決策として, 1 種類の最小近傍を持つ点 (例えば, 開点, あるいは閉点) のみを画像の画素に対応させるという工夫がなされている. このようにして画像空間より得られる Khalimsky 位相空間は, 前述の胞複体による Kovalevsky 位相空間と類似した位相構造を持っていることが知られており, 文献 [52] においては二つの位相空間の間の同相写像が示されている. この二つの位相空間の関係については, 次節でも扱う. また, Kopperman らは Khalimsky 位相空間において Jordan 曲面定理を証明した [61]. さらに, Evako らは  $n$  次元に拡張した Khalimsky 位相空間における曲面の定義を示した [27].

### 5.3 順序集合表現

Khalimsky 位相空間における最小近傍の包含関係の



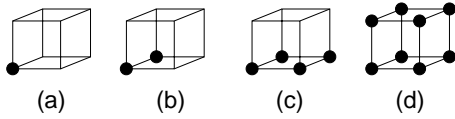


図5  $H_k^3$  の  $k$ -cube ((a)  $k = 0$ , (b)  $k = 1$ , (c)  $k = 2$ , (d)  $k = 3$ ).

Fig. 5 A  $k$ -cube of  $H_k^3$  for (a)  $k = 0$ , (b)  $k = 1$ , (c)  $k = 2$  and (d)  $k = 3$ .

かわりに、順序関係を用いて  $Z^n$  に位相を導入する方法も提案されている [11]。まず、集合族

$$H_0^1 = \{a\}; a \in Z,$$

$$H_1^1 = \{a, a+1\}; a \in Z,$$

$$H^1 = H_0^1 \cup H_1^1$$

を考える。そして、 $H_1^1$  の  $k$  個 ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) の要素と  $H_0^1$  の  $(n-k)$  個の要素による直積  $H_k^n$  を作成する。このとき、 $H_k^n$  の各要素を  $Z^n$  における  $k$ -cube と呼び、 $Z^n$  におけるすべての  $k$ -cube の集合を  $H^n$  とする。図5に  $Z^3$  の4種類の  $k$ -cube ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) を示す。そして、二つの集合  $x, y \in H^n$  が  $x \subset y$  という関係をもつとき、二項関係  $(x, y) \in \alpha$  を与えると、順序集合  $(H^n, \alpha)$  が得られる。有限部分集合  $V \in Z^3$  に対応した  $H^3$  の部分集合は、例えば

$$H(V) = \{x \in H^3 : x \subseteq V\} \quad (6)$$

で求められ、二項関係

$$\alpha_{H(V)} = \alpha \cap H(V) \times H(V) \quad (7)$$

とすると、部分順序集合  $(H(V), \alpha_{H(V)})$  が得られる。ここで、 $k$ -cube のかわりに、 $k$ -cube のすべての点の凸包を考えると、順序集合  $(H(V), \alpha_{H(V)})$  は次節で紹介する多面的複体に対応する。

順序集合  $(H^3, \alpha)$  のデータ構造には、3次元配列  $I[p][q][r]$  を用いる [10]。  $I[p][q][r]$  の各要素は、 $p, q, r$  がすべて偶数のときには 3-cube、ひとつが奇数のときには 2-cube、2つが奇数のときには 1-cube、すべてが奇数のときには 0-cube に対応させる。そして、 $k$ -cube 間の順序関係は、配列の要素間の近傍関係から求める。ここで、 $p, q, r$  の値の偶奇の組合せにより、 $k$ -cube の順序関係の大小が決定できることがポイントとなる。また、 $H^3$  内の  $k$ -cube を  $x$  としたとき、 $x$  に対応する配列  $I[p][q][r]$  の各要素の値を

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \in H(V) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

とする。この  $g(x)$  の値の決め方は  $H(V)$ 、すなわち  $V \subset Z^3$  に対応して決められ、その決定法については Kovalevsky 位相空間における式 (3) の  $g(e)$  と似た議論が展開される。例えば、式 (6) の  $H_V$  の決定法は、Kovalvsky 位相空間における最大ラベル則による  $A_V$  の決定法と対応している。

文献 [11] において、順序  $\alpha$  の大小関係を逆にした双対順序集合  $(H^3, \beta)$  が定義されており、そのデータ構造は Kovalevsky 位相空間  $C = (A, B)$  のデータ構造と一致する。このことから、Kovalevsky 位相空間と Khalimsky 位相空間は、順序関係 (あるいは包含関係) を互いに逆にした双対順序集合であることが分かる。

Bertrand らの研究グループを中心に、この順序集合表現を用いて、離散画像解析におけるさまざまな位相幾何学的問題がその解決に向けて取り組まれている。順序集合表現は Khalimsky 位相空間と同一視できるため、文献 [27] と似た方法による曲面の定義を試み、グラフ表現による曲面の定義と比較を行なっている [11]。また、元の形状の離散化表現の位相構造の解析 [20] や、細線化アルゴリズム [67]、等値面生成法 [22] などの研究成果がこれまでに報告されている。この形状表現を理解することにより、Kovalevsky 位相空間表現と Khalimsky 位相空間表現をデータ構造の視点からみることができるようになり、また、その二つの表現の間に順序集合表現を介在させることにより、それらの関係を理解しやすくなる。また、データ構造のシンプルさから計算機への実装が比較的容易に行なえることも長所としてあげられる。

#### 5.4 多面的複体表現

離散画像解析を目的とした多面的複体による形状表現では、多面体の頂点を格子点に限るという制約の元に、 $V \subset Z^n$  から如何に多面的複体を得るか、という問題を解く必要がある。この問題は、組合せ位相幾何学の立場では空間の多面体 (あるいは胞体) 分割問題として捉えられる。ここで、Kovalevsky 位相空間の胞複体による形状表現との違いは、多面体 (胞体) の頂点を格子点に限るという制約があることである。Kovalevsky 位相空間では、格子点を中心とする長さ 1 の立方体を 3次元胞体としており、胞体の頂点が格子点でないことは明らかである。

##### 5.4.1 Tournakis 多面的複体

離散画像解析を目的として、上記のような制約を持つ多面的複体による形状表現を最初に提唱したのは、おそらく文献 [104] であろう。文献 [104] では、前節の

順序集合表現に似た方法で位相空間を生成する．ある整数  $r_i$  を考え，集合  $I_i$  を开区間  $(r_i, r_i + 1)$ ，あるいは点  $r_i$  とする．そして， $k$  個の开区間と  $(n - k)$  個の点からなる直積として  $k$ -cube

$$e_k = \prod_{i=1}^n I_i$$

を定義する． $n = 3$  のときの  $k$ -cube ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) は図 2 の  $k$  次元胞体と形がまったく同じになる．ただし， $k$ -cube のときには，格子点は立方体の重心ではなく，頂点に位置する．この  $k$ -cube の集合を多面体の集合  $\mathbf{P}$  とし，Kovalsky の胞複体と同様に，その順序関係を  $\mathbf{R} \subset \mathbf{P} \times \mathbf{P}$  を与えると，多面体的複体  $\mathbf{T} = (\mathbf{P}, \mathbf{R})$  が得られる． $k$ -cube を生成する際に开区間ではなくその端点の集合を用いると，前節の順序集合が得られることが容易に分かる．見方をかえると，多面体的複体  $\mathbf{T} = (\mathbf{P}, \mathbf{R})$  のデータ構造が順序集合  $(H^n, \alpha)$  に相当すると考えることもできる．有限部分集合  $\mathbf{V} \subset \mathcal{Z}^3$  に対応した  $\mathbf{T}$  の部分複体  $\mathbf{T}_{\mathbf{V}} = (\mathbf{P}_{\mathbf{V}}, \mathbf{R}_{\mathbf{V}})$  は，順序集合の部分集合  $(H(\mathbf{V}), \alpha_{H(\mathbf{V})})$  と同様に，式 (6), (7) に相当する方法で求めることができる．

#### 5.4.2 Continuous analogs

さて，ここで多面体的複体  $\mathbf{T}_{\mathbf{V}}$  に相当するグラフ表現  $\mathbf{G}_m$  ( $m = 6, 18, 26$ ) を考えてみると， $\mathbf{G}_6$  にしか対応していないことがわかる．そのため，グラフ表現  $\mathbf{G}_{18}$  や  $\mathbf{G}_{26}$  にも対応した位相空間，continuous analog が Kong らの研究グループにより提案された [55], [57], [59]．彼らの研究目的は， $\mathbf{V}$  と  $\bar{\mathbf{V}}$  のそれぞれのグラフ  $\mathbf{G}_m$  と  $\bar{\mathbf{G}}_{m'}$  を考えたとき，位相的に破綻しない近傍ペア  $(m, m')$  を得ることであった (4 章参照)．したがって，彼らが提案した空間の多面体分割は， $\mathbf{V}$  と  $\bar{\mathbf{V}}$  の点の配置とその近傍関係を考慮したものとなっている． $\mathcal{Z}^2$  の各単位正方形は，以下のように多面体分割 (この場合は三角形分割ともいう) される．単位正方形において， $\mathbf{V}$  あるいは  $\bar{\mathbf{V}}$  の点対角の位置関係にあり，かつ隣接している (グラフ表現の意味で近傍の位置関係にある) とき，その隣接関係を保持するように，図 6(a) のような対角線方向に単位正方形を分割する． $\mathcal{Z}^2$  における良い近傍ペアは  $(m, m') = (4, 8), (8, 4)$  であるため，上記のような対角線方向は最大でもひとつしか見つからないことが分かる．そのような対角線方向がない場合には， $\mathbf{V}$  あるいは  $\bar{\mathbf{V}}$  の点の配置に関係なく，図 6(b) のように，対角線の端点の座標の和が偶数になる方向に単位正方形を分割する． $\mathcal{Z}^3$  では各単位立方体領域を以下の手順

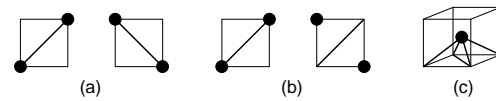


図 6 Continuous analog における  $\mathcal{Z}^2$  の単位正方形分割 (a), (b) と  $\mathcal{Z}^3$  の単位立方体分割 (c)．

Fig. 6 For continuous analogs, (a) a square is divided into two triangle by choosing the diagonal whose endpoints are adjacent, (b) a square is divided into two triangle each of whose endpoints has coordinates that sum to an even number, and (c) a cube is divided into twelve congruent tetrahedra each of which has a vertex at the centroid of the unit cube and a face of a triangle in a square.

で多面体分割する．まず，立方体の 6 つの正方形面上上記の  $\mathcal{Z}^2$  の単位正方形と同じ手順で 2 つの三角形に分割する．そして，図 6(c) のようにその各三角形と単位立方体の重心とで四面体をつくり，最終的には単位立方体を 12 個の合同な四面体に分割する．各単位立方体の重心  $c$  の値  $f(c)$  は，単位立方体内の  $\mathbf{V}$  と  $\bar{\mathbf{V}}$  の点の配置の仕方によって決定される．すべての単位立方体の重心  $c$  の集合を  $\mathbf{D}$  とすると，

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \cup \{c \in \mathbf{D} : f(c) = 1\}$$

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{V}} \cup \{c \in \mathbf{D} : f(c) = 0\}$$

の二つの集合を考えることができる．そして，頂点がすべて  $\mathbf{W}$  の点である四面体の和集合をデジタル画像空間  $(\mathcal{Z}^3, m, m', \mathbf{V})$  の continuous analog とよぶ [55], [57], [59]．この continuous analog を用いることにより，細線化アルゴリズムなどで必要とされるデジタル基本群を定義することができることが文献 [57] に示されている．しかし，その定義から分かるように，格子点以外の点 (すなわち立方体の重心) も扱っているため，格子点のみの集合による曲面表現には上記の方法とは異なる continuous analog が必要となる [56]．逆に，continuous analog は格子点を通らなくても構成できることから，格子点を通らない continuous analog を位相的に矛盾のない等値面生成に利用した例もある [64]．

#### 5.4.3 離散凸多面体による複体

Continuous analog は，位相的に矛盾のないグラフ表現ペア  $\mathbf{G}_m, \bar{\mathbf{G}}_{m'}$  に対応するように構成することができるが，そのかわりに格子点以外の点も使うことを許さなければならない．そこで，格子点のみからなる多面体的複体を構成することを優先させるために，空

表 1  $m$  近傍系 ( $m = 6, 18, 26$ ) に対応した  $n$  次元離散凸多面体 ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) . アスタリスクのついた離散凸多面体は離散単体ともよばれる .

Table 1 All possible  $n$ -dimensional discrete convex polyhedra for each  $m$ -neighborhood,  $m = 6, 18, 26$ . Discrete convex polyhedra with asterisks are also called discrete simplexes.

dim.	discrete convex polyhedra		
	N <sub>6</sub>	N <sub>18</sub>	N <sub>26</sub>
0			
1			
2			
3			

間  $\mathcal{Z}^3$  全体ではなく、その部分集合  $V \subset \mathcal{Z}^3$  の多面体分割を考え、それぞれの  $G_m (m = 6, 18, 26)$  に対応した多面体的複体の構成方法が提案された [44] . まず、単位立方体領域において、頂点がすべて格子点で、かつ、隣接する頂点がすべて  $m$  近傍 ( $m = 6, 18, 26$ ) の関係になるような凸多面体をすべて数えあげると、各近傍系ごとに、可能な  $n$  次元凸多面体 ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) が表 1 のように得られる . それらを離散凸多面体とよぶ . そして、 $V$  のすべての点が必ず離散凸多面体の頂点となるように、なるべく大きな (次元と幾何学の両方の意味において)、かつ多くの離散凸多面体からなる集合  $P_m$  を考える . また、Kovaevsky 位相空間同様、 $n$  次元離散凸多面体  $e$  が  $n'$  次元離散凸多面体  $e'$  の境界部分に含まれるとき ( $n < n'$ )、 $(e, e') \in R_m$  として順序関係  $R_m \subset P_m \times P_m$  を与えると、多面体的複体  $K_m = (P_m, R_m)$  が得られる .

ここで、離散凸多面体が開凸包ならば、 $K_6$  は Tourlakis 多面体的複体  $T_V$  とまったく同じものになる . また、その定義から、 $K_m$  は  $m$  近傍系のグラフ表現  $G_m$  に対応していることがわかる . この多面体的複体

$K_m$  の組合せ境界  $\partial K_m$  は 2 次元複体になり、集合表現による  $V$  の境界  $\partial_{m'} V = \{x \in V : N_{m'}(x) \cap \bar{V} \neq \emptyset\}$  との関係が最近の研究成果 [44] で明らかにされている . 具体的には、3 次元複体  $K_m$  が斉次元のとき<sup>(注5)</sup>、 $\partial K_m$  に含まれる格子点の集合と  $\partial_{m'} V$  は、それらの近傍ペアが  $(m, m') = (6, 18), (18, 6), (6, 26), (26, 6)$  のときに一致する .

離散凸多面体のうち、それ以上小さい離散凸多面体に分割できない最小単位のを離散単体 (表 1 参照) とよぶと、離散単体から単体的複体を構成できる [39] . 直観的には、多面体的複体も単体的複体もそんなに差異がないように思える . しかし、 $V$  から単体的複体を構成するアルゴリズムを考えたとき、6 近傍と 26 近傍の離散単体を空間に矛盾なく詰めていくアルゴリズムは提案できたものの、18 近傍の離散単体を空間に矛盾なく詰めていくアルゴリズムを構築することはついにできなかった [40] . その原因は、18 近傍の離散単体は 6 近傍ほど形状が単純ではなく、26 近傍ほどいろいろなケースに柔軟に対応できるほど種類が豊富でないことであった . そこで、文献 [44] では、離散単体かわりに離散凸多面体を用いて、空間の単体分割 (多面体分割) 問題をもっと簡単にすることで、あらゆる近傍系に対応した多面体的複体を  $V$  から構成するアルゴリズムを提案している . 文献 [40], [44] ではさらに、参照表を利用して  $V$  から 3 次元多面体的複体の境界部分を直接生成する、マーチング・キューブ法 [68] (等値面生成法のひとつ) に似たアルゴリズムが提案されており、文献 [42] では、そのアルゴリズムは格子点の連結性を考慮した離散版のマーチング・キューブ法と考えることができることが示されている .

上記のような組合せ位相学による、格子空間  $\mathcal{Z}^3$  における組合せ離散曲面の定義が文献 [28] に示されている . また、離散単体と形の似た単体を用いて、オイラー数や連結成分数を計算する方法が鳥脇らにより提案されている [102], [103], [110] . 彼らの方法の特長は、格子空間中の  $V$  の形状を解釈するには単体的複体表現を用い、その計算アルゴリズムには関数表現を用いていることである (3 章参照) . 単体的複体は位相幾何学的問題を解くには都合がよいが、その複雑な位相構造を計算機上へ実装するのは困難である . そこで、問題をいったん解いてしまったら、単体的複体表現か

(注5):  $K_m$  内の 2 次元以下の多面体は必ず  $K_m$  のある 3 次元多面体の境界になっている .

ら関数表現に形状表現変換をして、計算機への実装の負担を軽減しているのである。同様に、離散凸多面体による複体表現を用いて、複体上で曲率を定義し、その曲率を利用して複体のオイラー数を求める方法が提案されている [38]。これは、多面体的複体表現からグラフ表現に形状変換していると解釈することもできる。

この離散凸多面体による複体表現を用いることで、3次元境界探索、位相同相問題、曲面の定義、オイラー数算出など、位相幾何学的な問題に対処できる。また、グラフ表現  $G_{18}$ ,  $G_{26}$  に対応した多面体的複体表現  $K_{18}$ ,  $K_{26}$  を得ることも可能である。その一方、 $K_{18}$  や  $K_{26}$  は、点ごとに異なる変則的な位相構造を持つので、Kovalevsky 位相空間表現や順序集合表現のように単純な配列ではデータ構造を実現できない。多面体的複体の位相情報だけなら、数学的には、集合と二項関係からなるので、有向グラフなどで実現できる（それらのデータ構造については、例えば文献 [1], [18] 参照）。しかし、実際には位相幾何学的情報だけでなく、多面体の位置といった幾何学情報も効率よくデータとして持たせておく必要があるため、工夫が必要である [66]。3次元複体  $K_m$  の組合せ境界  $\partial K_m$  に関していえば、グラフィクスの分野でよく知られている翼状エッジ構造 [96] を利用することが可能である。しかし、この翼状エッジ構造は、 $\partial K_m$  内の 1次元離散凸多面体は必ずただ 2つの 2次元離散凸多面体に共有される、という条件が成り立つときのみ使え、その条件が成り立たないときには、翼状エッジ構造に修正を施す必要がある [36]。多面体的複体の効率のよいデータ構造の問題をつきつめていくと、計算幾何学の中でも比較的新しい分野である計算位相幾何学 [25] という分野に行きつくのだが、本稿ではそこまで踏み込まないことにする。

## 6. 集合と距離による表現

前章では、格子空間  $\mathcal{Z}^3$  あるいはその有限部分集合  $V$  にいかに位相を導入するかということを議論した。しかし、位相幾何学的表現のみを用いて幾何学的特徴量を扱った形状解析を行うことはできない。例えば、位相幾何学的表現を用いた細線化処理の結果が元の形状の位相を保持している保証は得られても、元の形状の幾何学的中心に位置しているかどうかの保証はない。そのような解析を可能にするためには、空間に幾何学計量を持ち込む必要がある。そこで、本章では、 $\mathcal{Z}^3$  あるいは  $V$  にいかに距離を定義するかということ

を考える。距離を定義することによって、骨格化、形状分解 [91], [97] といった処理が可能になる。

ユークリッド空間  $\mathcal{R}^n$  では一般的にユークリッド距離  $d_e(x, y)$  が使われる。一方、格子空間  $\mathcal{Z}^n$  でまず最初に使われた距離は、2点  $x, y$  間の最短パスのステップ数として定義された [81], [82]。したがって、最短パスを定義するときを選んだ近傍系によって距離が決まるため、 $m$  近傍に対応した距離を  $d_m(x, y)$  とかく。そのうち、 $\mathcal{Z}^2$  で 4 近傍を用いた距離  $d_4(x, y)$  は街区画距離、8 近傍を用いた  $d_8(x, y)$  はチェス盤距離とも呼ばれる [87]。定義からも明らかのように、これらの距離とユークリッド距離が大きく異なることは多く、その改善方法として、最短パス中の連続した 2 点の隣接関係によりステップに対する重み付けを変えた、重み付き距離変換が提案された [12], [13]。このとき、この距離をユークリッド距離へさらに近付けるために、 $\mathcal{Z}^n$  における近傍系の大きさを  $3^n$  より大きくする工夫がされている。

$\mathcal{Z}^3$  における重み付け距離変換に関する研究では、最適な重みを求めるための方法がいくつか提案されている [79], [98], [105]。それらの方法の違いは、よい重み付け距離変換を得るための制約や、最適化の基準が異なっていることに起因している。例えば、文献 [79] ではノルムであることが距離変換の必要条件として与えられている。また、文献 [98] は、重み付け距離変換が正則性 [12], [50] という性質を持つように、重みに対する必要十分条件を与えている。ここで、上記のいずれの方法 [79], [98], [105] も、重みは整数値のみを考えており、整数計算による高速計算を目指している。また、並列化による高速計算の観点からの議論もされている [78]。これら重み付き距離変換は、骨格化だけでなく、面状骨格化、曲面の骨格化、物体分解などさまざまな形状解析に有用であることが文献 [97] にまとめられている。

文献 [103] では、応用の立場から距離変換に関する研究を整理している。その中で、応用の場面ではユークリッド距離をその二乗で代替できる場合が多いとして、ユークリッド二乗距離変換 [90] の計算アルゴリズムの有効性が述べられている。文献 [91] では、実際に、細線化にこの距離を持ち込んだ、骨格化と融合<sup>注6)</sup>し

(注6): 最近では、位相と距離の両方を考慮したアルゴリズムの提案が多く、細線化と骨格化の用語の使い分けがはっきりしなくなってきた。本稿では位相を保存した変形を細線化、距離を用いて幾何学中心（その定義は複数ある）を求める変形を骨格化と呼び、区別している。

たようなアルゴリズムの提案と、その実験結果の報告も確認できる。最近では、文献 [90] のアルゴリズムを最適化した、線形時間的高速計算を実現するアルゴリズムが提案されており [72], [73], それらはさらに並列計算も考慮されている。その他の距離として、空間におけるある制約下での最短距離に関する研究も行なわれている。例えば、空間に障害物があり、それを避けて最短距離を測る必要があるとき [16] や、空間中のある曲面に沿った最短距離を求めたいとき [108] などが、その例としてあげられる。いずれも医療画像への応用を念頭においていることから、医療画像では距離情報が重要な情報の一つとして考えられていることがわかる。

## 7. 代数幾何表現

$n$  次元ユークリッド空間  $\mathcal{R}^n (n = 2, 3)$  において、代数方程式を用いて表現される、直線、平面、円、球といった幾何学物体を考える。例えば、 $\mathcal{R}^2$  における直線  $L$  は

$$L = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : ax + by + c = 0\},$$

また  $\mathcal{R}^3$  における平面  $P$  は

$$P = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$$

のように、それぞれ等式を満たす点の集合として定義される。一方、Reveillès により、それらに対応した格子空間  $\mathcal{Z}^n$  での離散表現が提案されている [80]。直線  $L \subset \mathcal{R}^2$  に対応して、離散直線  $DL \subset \mathcal{Z}^2$  が以下のように不等式を用いて定義される。

$$DL = \{(x, y) \in \mathcal{Z}^2 : 0 \leq ax + by + c < w\},$$

ここで、 $w$  は幅と呼ばれ、その  $w$  の値により、2 つの不等式によって挟まれる格子点の数を調整することができる。文献 [80] では、 $w = \max(|a|, |b|)$  のときに  $DL$  は 8 近傍の Jordan 曲線となること、 $w = |a| + |b|$  のときには 4 近傍の Jordan 曲線なることが証明されている。

同様に、平面  $P \subset \mathcal{R}^3$  に対応した離散平面  $DP \subset \mathcal{Z}^3$  の定義も以下のように与えられる。

$$DP = \{(x, y, z) \in \mathcal{Z}^3 : 0 \leq ax + by + cz + d < w\}.$$

幅が  $w = |a| + |b| + |c|$  のとき、 $DP$  は standard 平面とよばれ [2], [29], その点の集合は 6 近傍で連結しており (6 連結という)、その補集合  $\overline{DP}$  は 6, 18, 26

連結のいずれでもないことが示されている [3], [46]。また、グラフ表現または多面体的複体表現を用いて、standard 平面が 6 近傍系に基づく組合せ多様体を成していることが証明されている [29], [46]。同様に、 $w = \max(|a|, |b|, |c|)$  のとき、 $DP$  は naive 平面とよばれ [23], [80], その点の集合は 18 連結 (26 連結でもある) であり、その補集合  $\overline{DP}$  は 6 連結ではないが、18 連結 (26 連結でもある) となる可能性のあることが示されている [3], [46]。また、naive 平面は 18 および 26 近傍系に基づく組合せ多様体を成していることが証明されている [46]。

これらの不等式による平面 (直線) の離散的代数表現は、離散平面 (直線) がユークリッド空間における平面 (直線) と一対一に対応しないことを明示するとともに、画像における直線、平面の認識アルゴリズムが等式ではなく、不等式で行われることを示している [24]。そのような離散平面の認識アルゴリズムを用いることによって、有限部分集合  $V \subset \mathcal{Z}^3$  の点をすべて含む、なるべく少ない枚数の離散平面を見つける研究がなされている [5], [30], [45]。それらの離散平面は多面体を形成するため、上記のような問題は  $V$  からの大域的な多面体生成問題ともよばれる。この問題は、離散平面の枚数や、大きさなどに関する最適化問題や、2 つの離散平面の交点の集合が離散直線にならない、などの離散代数幾何モデル特有の問題を抱えており、離散幾何モデルの構築の難しさを表している [5]。

直線、平面だけでなく、円、球などの 2 次曲線、2 次曲面に対しても同様の離散的代数表現の研究が行われており [4]、離散的 2 次曲線の認識アルゴリズムによる離散的な曲率の定義とその計算法の研究へと発展している [15]。さらに、高速な離散レイトレーシングの要求から、3 次元空間における直線の離散的代数表現についても研究されている [17], [24]。

## 8. 形状表現の関係

集合表現と関数表現は入力画像から直接得られる基本的な形状表現であり、いずれも有限部分集合  $V \subset \mathcal{Z}^n$  の点の情報を持っている。この集合表現 (あるいは関数表現) に  $V$  の点の近傍関係を与えることで、デジタル画像解析の古典的な形状表現であるグラフ表現を得る。また、近傍関係のかわりに位相構造を  $V$  (あるいは  $\mathcal{Z}^n$ ) に導入することで、位相幾何学的な形状表現を得ることができる。このとき、位相の導入の仕方によって、Kovalevsky 位相空間、Khalimsky 位相

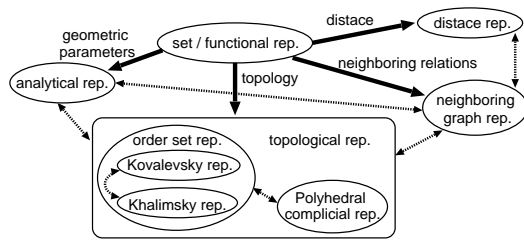


図 7 集合表現, 関数表現, グラフ表現, 位相幾何学的表現, 距離による表現, 代数幾何表現の関係図.

Fig. 7 The relations between set, functional, graph, topological, distance and analytical representations. Graph, topological, distance and analytical representations can be obtained from a set representation by adding neighboring relations, topological structures, distance transformations and geometric parameters, respectively. Some equality or duality relations between different representations are also shown by dotted lines.

空間, 順序集合, 多面的複体などのさまざまな位相空間を構成することができ, それに対応して形状表現法もかわる. いずれの位相空間にも共通しているのは,  $\mathcal{R}^n$  においては存在し得ない, 最小近傍や最小の胞体・多面体が  $\mathcal{Z}^n$  には存在することである. 位相構造のかわりに, 幾何情報, 例えば距離や, 代数不等式とそのパラメータ (平面の法線ベクトルなど) を与えると, 距離表現や代数幾何表現が得られる. 図 7 にその関係を図式化したものを示す.

前章までで述べてきた通り, 異なる形状表現をいくつか用いた研究というのは, これまでに多くされてきている. 例えば, 多面的複体表現を用いてオイラー数を定義し, その後関数表現におきかえて計算式を得たり [102], [103], continuous analog を用いてグラフ表現での Jordan 曲線/曲面の定理を証明したり [55], グラフ表現での連結性の計算を集合演算や関数表現で求めたり [95], [103], と数えあげればきりが無い. しかし, 論文の中で複数の形状表現が違う目的 (例えば, 数学的問題解決のためと計算機への実装のため) で使われていることが明示されていることは少なく, それが離散画像解析に関する論文の理解を難しくしている原因の一つではないかと考えている. 図 7 の関係は, 離散画像解析研究の理解を助けるとともに, 新たな研究テーマの発見も期待できる. なぜなら, 形状表現の間の関係, および形状表現変換に関する研究は, まだまだ未解決の問題が数多くあるからである. また, 異なる形状表現の新しい組合せを考えることで, 今まで

解くことが出来なかった (解けると思わなかった) 問題に解決策を与えることができるようになるかもしれない.

## 9. 形状表現の評価とその基準

### 9.1 評価基準

形状表現の評価に関してはすでにいくつかの基準が提案されている [70], [74]. ここでは, それらを数学的基準, 計算機科学的基準, タスクに特化した基準の 3 種類に分けて紹介する.

#### 9.1.1 数学的基準

形状表現の最も基本的な数学的基準は次のものである.

[基準 1] (数学的問題解決性) 与えられたタスクを数学的問題に翻訳したとき, 数学的に問題を解決できることが保証されている.

例えば, 位相幾何学の問題を集合表現のみで解こうとしてもそれは不可能であり, 位相幾何学的表現を用いるのが適切な選択であるといえる. 他にも, 数学的な意味合いが強い, 情報科学的な形状表現の評価基準をいくつかあげる.

[基準 2] (不変性 [74]) 2つの画像中の物体の形状が等しいとき, それらの画像から得られる形状表現もまた等しい.

[基準 3] (唯一性 [70], [74]) 2つの画像中の物体の形状が異なるとき, それらの画像から得られる形状表現も異なる.

[基準 4] (安定性/敏感性 [70], [74]) 2つの形状が微小に異なるとき, 対応した形状表現の違いも微小であり, かつ, 形状表現が微小に異なるときには形状自身の違いも微小である.

形状表現の安定性は, 形状の類似度を計算する際に必要となる基準であるだけでなく, 形状を変形させることができるかどうか, 形状表現の変形可能性とも深く関係する. そのとき, 幾何学的な形状の変化 (凹凸具合の変化など) だけでなく, 位相幾何学的な形状の変化 (物体の分離, 融合, 穴の出現など) も考慮することができる.

[基準 5] (収束性 [32], [41], [51]) 入力画像の解像度を無限に高くしていったとき, 対応する形状表現が連続空間の原物体に収束すること [32], [41]. また, 形状表現から得られる幾何学特徴量に対しても収束性があること [51].

[基準 6] (可逆性) 形状表現から入力画像が得られ

ること。

### 9.1.2 計算機科学的基準

計算機科学的な見地からは以下の基準が提案されている。

[基準 7](計算効率 [74]) 入力画像から形状表現を算出する際に計算時間、容量が少なくてもすむこと。

[基準 8](プログラム実現性 [74]) 実際にプログラムを書く際に、出来上がりまでに要する時間が短くてすむこと。

[基準 9](特微量計算の容易性 [74]) 形状表現から幾何学特微量(表面積, 体積, 測地線の長さ, など)や位相幾何学特微量(物体の数, 穴の数, オイラー数など)を求める際の計算効率性やプログラム実現性。

[基準 10](頑健性) 画像におけるノイズに対して形状表現が受ける影響が少ないこと。

### 9.1.3 タスクに特化した評価基準

タスクに特化した評価基準は当然タスクによるので, ここではいくつかの例をあげて説明する。例えばタスクが物体形状認識だとすると, 判別可能な異なる形状のクラスを十分持っていることが形状表現の評価基準としてあげられる。この基準は形状表現のスコop(作用域) [70] とよばれ, 上記の唯一性と深く関係している。また別の例として, タスクが形状近似だとすると, その近似の精度が形状表現の重要な評価基準となる。この基準は, 上記の収束性や特微量計算の容易性と関係する。医療画像などから幾何学特微量を求めるときには, 限られた解像度において精度よく, かつ容易に特微量が算出できる形状表現を用いたい, と考えるのは自然なことであろう。他にも, コンテンツベースの画像圧縮では形状表現を用いた方法が提案されているが, その際にはデータ圧縮率がその評価基準となる。また, 形状表現が可逆性を持つとき, 画像圧縮の立場からみるとそれは lossless 圧縮が可能であることを示唆する。

### 9.2 基準による評価

前節であげた評価基準のうち, 離散画像解析において絶対に外せないものは基準 1 と基準 7, 8 だろう。他の基準についてはタスクに依存するので, 個々のケースで必要な基準かどうか検討し, 形状表現がその基準を満たしているかどうか調べればよい。基準 1, 7, 8 により, 2 章から 7 章までで紹介した形状表現を大雑把に分類してみると, 以下のようになる。

- 数学的問題解決性が高く, プログラム実現性および計算効率が低い表現で, 位相幾何学的表現, 代数

幾何表現がこのグループに属す(グループ A)。

- プログラム実現性および計算効率が高く, 数学的問題解決性が低いのは, 集合表現, 関数表現, グラフ表現, 距離関数がこのグループに属す(グループ B)。

したがって, 数学的に問題を解く際にはグループ A の形状表現を用い, 計算機に実装するにはグループ B の形状表現を用いるのが良い選択ということになる。当然のことながら, 両方のグループに属する形状表現あれば, それが一番の選択ということになる。しかし, 大抵の場合は, 上記のように両方のグループに属する形状表現は存在しない。そのような場合には, 異なる形状表現間で変換を行なうことができれば問題は解決する。したがって, 重要になるのは, 異なる形状表現間の関係が分かっている, 形状表現変換が可能か, ということになる。図 7 の形状表現の関係図に表す線がより多く引けると, より多くの問題が解決できるのではないかと考えている。このようなアイデアは実際にはもう使われており, 文献 [38], [103] などにその例をみることができる(5 章参照)。

## 10. あとがき

本稿では離散画像解析においてよく使われている 6 つの形状表現(集合表現, 関数表現, グラフ表現, 位相幾何学的表現, 集合と距離による表現, 代数幾何表現)に関して, それぞれの出現の歴史的経緯を踏まえて, サーベイを行なった。そして, 集合表現を基点とした, それら 6 つの形状表現間の関係を図式化し(図 7 参照), 離散画像解析が必要とする形状情報は解析目的や空間の次元によって異なることを確認した。また, 形状表現を評価する基準をいくつか紹介・提案し, そのうちの数学的問題解決性, 計算効率, プログラム実現性の 3 つの基準を用いて, 上記の 6 つの形状表現の評価を行なった。その結果, 6 つの形状表現は, 数学的問題解決性が高く, 計算効率・プログラム実現性が低い形状表現のグループ(グループ A)と, その逆の(数学的問題解決性が低く, 計算効率・プログラム実現性が高い)形状表現のグループ(グループ B)の 2 つのグループに分かれることがわかった。したがって, タスクによって適切な形状表現を使い分けることが必要であることを確認するとともに, 異なる形状表現間の関係を明らかにし, 多くの形状表現変換を可能にするような横断的研究が今後重要になってくることを示した。また, 異なる形状表現を組み合わせることによる新しい離散画像解析手法の提案も期待できる。

本稿で紹介した形状表現法は離散画像解析においてよく使われているが、論文の中でははっきりと形状表現法が明示されていることは少なく、多くはアルゴリズムの中でデータ構造として表現されている。これは、離散画像解析において、用いられている形状表現法が何であるか、はっきりと意識されていないことが多いということである。上記のようなやり方は、プログラムが正常に動いている（ように見える）ときには問題視されない。しかし、ある入力画像に対して予想外の結果を出力したとき、データ構造の数学的意味である形状表現法が分からないと、場あつりのな対処しかできなくなってしまう。つまり、アルゴリズムにおいてどのような形状表現法が用いられているのかははっきりと意識することによって、これまでに得られている形状表現法の数学的な研究成果を利用して、アルゴリズムの正当性、限界などを調べることができるようになる。このように、形状表現法という側面から離散画像解析を眺めることは非常に重要であると考えている。

謝辞 この論文は、パターン認識とメディア理解研究会における PRPR サーベイシリーズの研究会資料を発展させたものである。サーベイの機会を与えていただいた、パターン認識とメディア理解研究専門委員会に感謝致します。

## 文 献

- [1] A.V. Aho, J.D. Ullman, *Foundations of Computer Science*, Computer Science Press, New York, 1992.
- [2] E. Andrès, “Le plan discret,” in *Actes du 3e Colloque Géométrie discrète en imagerie: fondements et applications*, Strasbourg, France, September 1993.
- [3] E. Andrès, R. Acharya, C. Sibata, “Discrete analytical hyperplanes,” *Graphical Models and Image Processing*, Vol.59, No.5, pp.302–309, September 1997.
- [4] E. Andrès, M.-A. Jacob, “The discrete analytical hyperspheres,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol.3, No.1, January-March 1997.
- [5] E. Andres, “Defining discrete objects for polygonalization: the standard model,” *Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 10th International Conference, DGCI 2002, LNCS Vol.2301*, pp.313–325, Springer, Bordeaux, France, April 2002.
- [6] E. Artzy, G. Frieder, G.T. Herman, “The theory, design, implementation and evaluation of a three-dimensional surface detection algorithm,” *Computer Graphics and Image Processing*, Vol.15, No.1, pp.1–24, January 1981.
- [7] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, A. Quintero, “Digital lighting functions,” *Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 7th International Workshop, DGCI’97, LNCS Vol.1347*, pp.139–150, Springer, Montpellier, France, December 1997.
- [8] G. Bertrand, “Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids,” *Pattern Recognition Letters*, Vol.15, pp.1003–1011, 1994.
- [9] G. Bertrand, R. Malgouyres, “Topological properties of discrete surfaces,” *Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 6th International Workshop, DGCI’96, LNCS Vol.1176*, pp.325–336, Springer, Lyon, France, November 1996.
- [10] G. Bertrand, “New notions for discrete topology,” *Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 8th International Conference, DGCI’99, LNCS Vol.1568*, pp.218–228, Springer-Verlag, Marne-la-Vallée, France, March 1999.
- [11] G. Bertrand and M. Couprie, “A model for digital topology,” *Discrete Geometry for Computer Imagery, LNCS Vol.1568*, pp.229–241, Springer-Verlag, Marne-la-Vallée, France, March 1999.
- [12] G. Borgefors, “Distance transformations in arbitrary dimensions,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.27, No.3, pp.321–345, September 1984.
- [13] G. Borgefors, “Distance transformations in digital images,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.34, No.3, pp.344–371, June 1986.
- [14] J.-M. Chassery, A. Montanvert, *Géométrie Discrète en Analyse d’images*, Hermes, Paris, 1991.
- [15] D. Coeurjolly, S. Miguët, L. Tougne, “Discrete Curvature Based on Osculating Circle Estimation,” *Visual Form 2001, Proceedings of 4th International Workshop on Visual Form, IWVF4, LNCS Vol.2059*, pp.303–312, Springer, Capri, Italy, May 2001.
- [16] D. Coeurjolly, “Visibility in discrete geometry: an application to discrete geodesic paths,” *Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 10th International Conference, DGCI 2002, LNCS Vol.2301*, pp.326–337, Springer, Bordeaux, France, April 2002.
- [17] D. Cohen-Or, A. Kaufman, “3D line voxelization and connectivity control,” *IEEE Computer Graphics and Applications*, pp.80–87, Vol.17, No.3, November/December 1997.
- [18] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, Cambridge, 1999.
- [19] M. Couprie, G. Bertrand, “Simplicity surfaces: a new definition of surfaces in  $\mathbf{Z}^3$ ,” *Proceedings of SPIE, Vol.3454; Vision Geometry VII*, pp.40–51, San Diego, USA, July 1998.
- [20] M. Couprie, G. Bertrand, Y. Kenmochi, “Discretization in 2D and 3D orders,” *Graphical Models*, Vol.65, pp.77–91, May 2003. n
- [21] B. Cutler, J. Dorsey, L. McMillan, M. Müller, R. Jagnow, “A procedural approach to authoring solid mod-



- els," Proceedings of ACM SIGGRAPH pp.302–311, 2002.
- [22] X. Daragon, M. Couprie, G. Bertrand, "Marching chains algorithms for Alexandroff-Khalimsky spaces," Proceedings of SPIE, Vol.4794; Vision Geometry XI, pp.51–62, Seattle, USA, July 2002.
- [23] I. Debled-Rennesson, J-P. Reveillès, "A new approach to digital planes," Proceedings of SPIE, Vol.2356; Vision Geometry III, pp.12–21, Boston, USA, November 1994.
- [24] I. Debled-Rennesson, "Etude et Reconnaissance des Droites et Plans Discretes," Thèse de doctrat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1995.
- [25] T.K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha, "Computational topology," in Advances in Discrete and Computational Geometry, eds. B. Chazelle, J.E. Goodman, R. Pollack, pp.109–143, American Mathematical Society, 1999.
- [26] U. Eckhardt, L.J. Latecki, "Topologies for the digital spaces  $\mathbf{Z}^2$  and  $\mathbf{Z}^3$ ," to appear in Computer Vision and Image Understanding.
- [27] A.V. Evako, R. Kopperman, Y.V. Mukhin, "Dimensional properties of graphs and digital spaces," Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol.6, pp.109–119, 1996.
- [28] J. Françon, "Discrete combinatorial surfaces," Graphical Models and Image Processing, Vol.57, No.1, pp.20–26, January 1995.
- [29] J. Françon, "Sur la topologie d'un plan arithmétique," Theoretical Computer Science, Vol.156, pp.159–176, March 1996.
- [30] J. Françon, L. Papier, "Polyhedrization of the boundary of a voxel object," Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 8th International Conference, DGCI'99, LNCS Vol.1568, pp.425–434, Springer-Verlag, Marne-la-Vallée, France, March 1999.
- [31] H. Freeman, "Boundary encoding and processing," in Picture Processing and Psychopictorics," eds. B.S. Lipkin, A. Rosenfeld, pp.241–266, Academic Press, New York, 1970.
- [32] H.J.A.M. Heijmans, Morphological Image Operators, Academic Press, San Diego, 1994.
- [33] G.T. Herman, "Discrete multidimensional Jordan Surfaces," CGVIP: Graphical Models and Image Processing, Vol.54, No.6, pp.507–515, November 1992.
- [34] G.T. Herman, Geometry of Digital Space, Birkhauser, Boston, 1998.
- [35] 平野靖, 清水昭伸, 長谷川純一, 鳥脇純一郎, "4次元超曲面の曲率を用いた3次元濃淡画像に対する追跡型細線化の一手法" 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol.J83, No.1, pp.126–136, January 2000.
- [36] C.M. Hoffmann, Geometric and Solid Modeling: An Introduction, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, 1989.
- [37] H. Hoppe, "Progressive meshes," Proceedings of ACM SIGGRAPH pp.99–108, 1996.
- [38] A. Imiya, U. Eckhardt, "The Euler characteristics of discrete objects and discrete quasi-objects," Computer Vision and Image Understanding, Vol.75, No.3, pp.307–318, September 1999.
- [39] Y. Kenmochi, A. Imiya and A. Ichikawa, "Discrete Combinatorial Geometry," Pattern Recognition, Vol.30, No.10, pp.1719–1728, October 1997.
- [40] Y. Kenmochi, A. Imiya and A. Ichikawa, "Boundary Extraction of Discrete Objects," Computer Vision and Image Understanding, Vol.71, No.3, pp.281–293, September 1998.
- [41] Y. Kenmochi, A. Imiya, "Discretization of three-dimensional objects: approximation and convergence," Proceedings of SPIE, Vol.3454; Vision Geometry VII, pp.64–74, San Diego, USA, July 1998.
- [42] Y. Kenmochi, K. Kotani, A. Imiya, "Marching cubes method with connectivity," Proceedings of 1999 International Conference on Image Processing, Vol.4, pp.361–365, Kobe, Japan, October 1999.
- [43] Y. Kenmochi, R. Klette, "Surface area calculation by local and global approximation," Proceedings of SPIE, Vol.4117; Vision Geometry IX, pp.100–111, San Diego, USA, July 2000.
- [44] Y. Kenmochi, A. Imiya, "Discrete polyhedrization of a lattice point set," in Digital and Image Geometry, eds. G. Bertrand, A. Imiya, R. Klette, LNCS Vol.2243, pp.148–160, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [45] Y. Kenmochi, C. Li, K. Kotani, "Flatness analysis of three-dimensional images for global polyhedrization," Computer Analysis of Images and Patterns, Proceedings of 9th International Conference, CAIP 2001, LNCS Vol.2124, pp.482–492, Springer-Verlag, Warsaw, Poland, September 2001.
- [46] Y. Kenmochi, A. Imiya, "Combinatorial Topologies for Discrete Planes," to appear in Discrete Geometry for Computer Imagery, Proceedings of 11th International Conference, DGCI 2003, Naples, Italy, November 2003.
- [47] E. Khalimsky, R. Kopperman, P.R. Meyer, "Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets," Topology and its Applications, Vol.36, pp.1–17, July 1990.
- [48] C.E. Kim, A. Rosenfeld, "Convex digital solids," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.4, pp.612–618, 1982.
- [49] C.E. Kim, "Three-dimensional digital planes," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.6, pp.639–645, 1984.
- [50] C. Kislman, "Regularity properties of distance transformations in image analysis," Computer Vision and Image Understanding, Vol.64, No.3, pp.390–398, November 1996.
- [51] R. Klette, J. Zunic, "Multigrid convergence of calcu-

- lated features in image analysis,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol.13, pp.173–191, December 2000.
- [52] R. Klette, “Digital topology for image analysis - part 1,” Technical Report CITR-TR-101, Center for Image Technology and Robotics, The University of Auckland, June 2001.
- [53] R. Klette, “Digital geometry - the birth of a new discipline,” in *Foundations of Image Understanding*, ed. L.S. Davis, pp.33–71, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- [54] 小畑秀文, *モルフォロジー*, コロナ社, 東京, 1996.
- [55] T.Y. Kong, A.W. Roscoe, “A theory of binary digital pictures,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.32, No.2, pp.221–243, November 1985.
- [56] T.Y. Kong, A.W. Roscoe, “Continuous analogs of axiomatized digital surfaces,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.29, No.1, pp.60–86, January 1985.
- [57] T.Y. Kong, “Digital fundamental group,” *Computer & Graphics*, Vol.18, No.2, pp.159–166, March 1989.
- [58] T.Y. Kong, A. Rosenfeld, “Digital topology: Introduction and survey,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.48, No.3, pp.357–393, December 1989.
- [59] T.Y. Kong, A.W. Roscoe, A. Rosenfeld, “Concepts of digital topology,” *Topology and its Applications*, Vol.46, pp.219–262, October 1992.
- [60] T.Y. Kong, “Digital topology,” in *Foundations of Image Understanding*, ed. L.S. Davis, pp.73–93, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
- [61] R. Kopperman, P.R. Meyer, R.G. Wilson, “A Jordan surface theorem for three-dimensional digital spaces,” *Discrete and Computational Geometry*, Vol.6, pp.155–161, 1991.
- [62] V.A. Kovalevsky, “Finite topology as applied to image analysis,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.46, No.2, pp.141–161, May 1989.
- [63] R. Krishnaswamy, C.E. Kim, “Digital parallelism, perpendicularity and rectangles,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.9, No.2, pp.316–321, 1987.
- [64] J.-O. Lachaud, A. Montanvert, “Continuous analogs of digital boundaries: a topological approach to iso-surfaces,” *Graphical Models*, Vol.62, pp.129–164, May 2000.
- [65] B. Li, “The moment calculation from polyhedra,” *Pattern Recognition*, Vol.26, pp.1229–1233, August 1993.
- [66] P. Lienhardt, “N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds,” *International Journal of Computational Geometry & Applications*, Vol.4, No.3, pp.275–324, 1994.
- [67] C. Lohou, G. Bertrand, “New parallel thinning algorithms for 2D grayscale images,” *Proceedings of SPIE*, Vol.4117; *Vision Geometry IX*, pp.58–69, San Diego, USA, July 2000.
- [68] W.E. Lorensen, H.E. Cline, “Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm,” *Computer Graphics*, Vol.21, No.4, pp.163–169, 1987.
- [69] S. Marchand-Maillet, Y.M. Sharaiha, *Binary Digital Image Processing: A Discrete Approach*, Academic Press, San Diego, 2000.
- [70] D. Marr, H. Nishihara, “Representation and recognition of the spatial organization of three-dimensional shapes,” *Proceedings of the Royal Society of London, Ser.B*, Vol.200, pp.269–294, 1978.
- [71] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, 1975.
- [72] C.R. Maurer, Jr., R. Qi, V. Raghavan, “A linear time algorithm for computing exact Euclidean distance transforms of binary images in arbitrary dimensions,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.25, No.2, pp.265–270, February 2003.
- [73] A. Meijster, J.B.T.M. Roerding, W.H. Hesselink, “A general algorithm for computing distance transforms in linear time,” *Proceedings of 5th International Conference, Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, pp.331–340, Kluwer, Palo Alto, US, June 2000.
- [74] F. Mokhtarian, A.K. Mackworth, “A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.14, No.8, pp.789–805, August 1992.
- [75] O. Monga, S. Benayoun, “Using partial derivatives of 3D images to extract typical surface features,” *Computer Vision and Image Understanding*, Vol.61, N.2, pp.171–189, March 1995.
- [76] D.G. Morgenthaler, A. Rosenfeld, “Surfaces in three-dimensional digital images,” *Information and Control*, Vol.51, pp.227–247, December 1981.
- [77] T. Pavlidis, *Algorithms for Graphics and Image Processing*, Computer Science Press, Maryland, 1982.
- [78] I. Ragnemalm, “The Euclidean distance transform in arbitrary dimensions,” *Pattern Recognition Letters*, Vol.14, pp.883–888, November 1993.
- [79] E. Remy, E. Thiel, “Optimizing 3D chamfer masks with norm constraints,” *7th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, pp.39–56, Caen, France, July 2000.
- [80] J.-P. Reveillèlles, “Géométrie Discrète, Calcul en Nombres Entiers et Algorithmique,” Thèse d’état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991.
- [81] A. Rosenfeld, J.L. Pfaltz, “Sequential operations in digital picture processing,” *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.13, No.4, pp.471–494, October 1966.

- [82] A. Rosenfeld, J.L. Pfaltz, "Distance functions on digital pictures," *Pattern Recognition*, Vol.1, pp.33-61, July 1968.
- [83] A. Rosenfeld, "Connectivity in digital pictures," *Journal of the ACM*, Vol.17, pp.146-160, 1970.
- [84] A. Rosenfeld, "Arcs and curves in digital pictures," *Journal of the ACM*, Vol.20, pp.81-87, 1973.
- [85] A. Rosenfeld, "Adjacency in digital pictures," *Information and Control*, Vol.26, pp.24-33, 1974.
- [86] A. Rosenfeld, "A characterization of parallel thinning algorithms," *Information and Control*, Vol.29, pp.286-291, 1975.
- [87] A. Rosenfeld, A.C. Kak (長尾真監訳), *デジタル画像処理*, 近代科学社, 東京, 1978.
- [88] A. Rosenfeld, "Digital topology," *American Mathematical Monthly*, Vol.86, pp.621-630, 1979.
- [89] A. Rosenfeld, *Picture Languages*, Academic Press, New York, 1979.
- [90] 斉藤豊文, 鳥脇純一郎, "3次元デジタル画像に対するユークリッド距離変換," *電子情報通信学会論文誌 D-II*, Vol.J76-D-II, No.3, pp.445-453, March 1993.
- [91] 斉藤豊文, 森健策, 鳥脇純一郎, "ユークリッド距離変換を用いた3次元デジタル画像の薄面化および細線化の逐次型アルゴリズムとその諸性質," *電子情報通信学会論文誌 D-II*, Vol.J79-D-II, No.10, pp.1675-1685, October 1996.
- [92] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London, 1982.
- [93] J. Serra, ed., *Image Analysis and Mathematical Morphology Volume 2: Theoretical Advances*, Academic Press, London, 1988.
- [94] J. Sklansky, "Recognition of convex blobs," *Pattern Recognition*, Vol.2, pp.3-10, January 1970.
- [95] P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*, Springer, Berlin, 1999.
- [96] 杉原厚吉, *グラフィックスの数理*, 共立出版, 東京, 1995.
- [97] S. Svensson, "Representing and analysing 3d digital shape using distance information," *Doctoral thesis*, Swedish University of Agricultural Sciences, Uppsala, Sweden, 2001.
- [98] S. Svensson, G. Borgefors, "Distance transforms in 3D using four different weights," *Pattern Recognition Letters*, Vol.23, pp.1407-1418, October 2002.
- [99] J. Toriwaki, T. Fukumura, "Extraction of structural information from grey pictures," *Computer Graphics and Image Processing*, Vol.7, No.1, pp.30-51, February 1978.
- [100] 鳥脇純一郎, *画像理解のためのデジタル画像処理 II*, 昭晃堂, 東京, 1988.
- [101] 鳥脇純一郎, 齋藤豊文, 早瀬研二, "3次元デジタル画像の局所パターンの計数および連結指数の分布について," *電子情報通信学会論文誌*, Vol.J78-D-II, No.7, pp.1080-1090, July 1995.
- [102] J. Toriwaki, T. Yonekura, "Euler number and connectivity indexes of a three dimensional digital picture," *Forma*, Vol.17, No.3, pp.183-209, 2002.
- [103] 鳥脇純一郎, *3次元デジタル画像処理*, 昭晃堂, 東京, 2003.
- [104] G. Tzourlakis, J. Mylopoulos, "Some results in computational topology," *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.20, No.3, pp.439-455, July 1973.
- [105] B.J.H. Verwer, "Local distances for distance transformations in two and three dimensions," *Pattern Recognition Letters*, Vol.12, No.11, pp.671-682, November 1991.
- [106] K. Voss, *Discrete Images, Objects, and Functions in  $Z^3$* , Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [107] G. Wyvill, C. McPheeters, B. Wyvill, "Data structure for soft objects," *Visual Computer*, Vol.2, No.4, pp.227-234, 1986.
- [108] 安江正宏, 森健策, 斉藤豊文, 長谷川純一, 鳥脇純一郎, "仮想化人体における2,3の特徴量の計測法とその能力の評価," *Medical Imaging Technology*, Vol.15, No.2, March 1997.
- [109] S. Yokoi, J. Toriwaki, T. Fukumura, "An analysis of topological properties of digitized binary pictures using local features," *Computer Graphics and Image Processing*, Vol.4, No.4, pp.63-73, March 1975.
- [110] 米倉達広, 横井茂樹, 鳥脇純一郎, 福村晃夫, "3次元デジタル空間における図形の連結性とオイラー数," *電子情報通信学会論文誌*, Vol.J65-D, No.1, pp.80-87, January 1982.
- [111] M.F. Zakaria, L. Vroomen, P.J.A. Zombor-Murray, J.M.H.M. Kessel, "Fast algorithm for the computation of moment invariants," *Pattern Recognition*, pp.639-644, 1987.

(平成 xx 年 xx 月 xx 日受付)



剣持 雪子 (正員)

1993 千葉大・工・情報工卒。1998 同大大学院自然科学研究科博士課程了。工博。同年より北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助手, その間, 2000~2002 仏国 ESIEE 客員研究員。2003 より岡山大学工学部情報工学科講師, 現在に至る。離散幾何学・離散位相幾何学的アプローチによるデジタル画像解析の研究に従事。情報処理学会, IEEE 会員。

**Abstract** This paper gives a survey of shape representation techniques for discrete image analysis based on discrete geometry and topology. With the historical backgrounds, six different techniques such as set, functional, graph, topological, distance and analytic representations are introduced. Their relationships and evaluation criteria are also shown.

**Key words** Shape representation, discrete geometry, discrete topology, digital image analysis.