



HAL
open science

Problèmes inverses : Géométrie, Intégrabilité et formalisme de Lax

Claire David

► **To cite this version:**

| Claire David. Problèmes inverses : Géométrie, Intégrabilité et formalisme de Lax. 2013. hal-00620127

HAL Id: hal-00620127

<https://hal.science/hal-00620127>

Submitted on 7 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Problèmes inverses : Géométrie, Intégrabilité et formalisme de Lax

Claire David^{1 2}

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

¹ Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR CNRS 7190,

² Faculté de Mathématiques

Boîte courrier n^o162, 4 place Jussieu, 75252 Paris, cedex 05, France

7 septembre 2011

0.1 Introduction

Les travaux de C. Lacave et D. Iftimie ..., dans la lignée de ceux de J.Y. Chemin ..., permettent d'étudier l'influence d'obstacles immergés sur des champs de vitesses soit connus, soit solutions d'équations classiques régissant le mouvement d'un fluide incompressible (divergence nulle) : l'application de la loi de Biot et Savart permet en effet d'obtenir l'expression du champ de vitesses résultant : si l'on considère un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , constitué de \mathbb{R}^2 privé d'un obstacle Ω et de sa frontière $\bar{\Omega}$, où se trouve un fluide incompressible dont le champ de vitesse U est régi par les équations d'Euler, alors, le champ résultant v est donné par :

$$v = \iint \frac{\vec{r} \wedge \text{curl} U}{r^3} dV \quad (1)$$

Dans ce type de problème, la forme "géométrique" de l'obstacle est connue.

Il serait intéressant de considérer le problème "à l'envers" : connaissant le champ de vitesses initial, et le champ de vitesses final, peut-on en déduire la forme de l'obstacle ???

Il va sans dire que les applications pourraient être très intéressantes, ainsi, de "forcer la forme de l'obstacle" en fonction du champ de vitesses que l'on souhaite obtenir.

A cet effet, il serait intéressant de considérer, pour le champ initial, non pas un champ spécifiquement donné (ce qui, en général, n'est d'ailleurs pas le cas puisque celui est, le plus souvent, considéré en tant que solution d'un système d'équations, Euler ou Navier-Stokes), mais, bien en tant que solution d'un système donné, mais, non pas, classiquement, comme un système d'équations aux dérivées partielles, mais, plutôt, comme solution de "l'équation de Lax" correspondante, sous la forme

$$\frac{dL}{dt} = [L, B] \quad (2)$$

où L et B sont deux opérateurs différentiels, symétrique pour L , antisymétrique pour B .

Le système dont est solution le champ de départ, qui est un système intégrable, peut aussi se traduire par une condition de compatibilité entre deux problèmes linéaires.

De même : le champ que l'on souhaite obtenir, et qui est donc connu, peut être lui aussi considéré comme la solution d'un système intégrable, que l'on met aussi sous forme de Lax.

Pour ce type de problèmes, existent donc des surfaces remarquables (condition de courbure nulle notamment, tores invariants, etc ...), passer du champ initial au champ final via une approche "géométrico-différentielle" devrait donc donner des résultats intéressants.

Notamment, utiliser le fait que les trajectoires du système hamiltonien intégrable correspondant s'enroulent sur des tores.

0.2 Un début : couple de Lax pour les équations d'Euler 3D

Sous forme rotationnelle, les équations d'Euler tridimensionnelles s'écrivent :

$$\partial_t \Omega + (u \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) u = 0 \quad (3)$$

où Ω désigne le rotationnel du champ u :

$$\Omega = \nabla \wedge u \quad (4)$$

Un couple de Lax correspondant est alors donné par [4] :

$$\begin{cases} L\varphi & = \lambda\varphi \\ \partial_t \varphi + A\varphi & = 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec :

$$\begin{cases} L\varphi & = (\Omega \cdot \nabla) \varphi - (\varphi \cdot \nabla) \Omega \\ A\varphi & = (u \cdot \nabla) \varphi - (\varphi \cdot \nabla) u \end{cases} \quad (6)$$

Bibliographie

- [1] P. Bracken, Surfaces specified by integrable systems of partial differential equations determined by structure equations and Lax pair, *Journal of Geometry and Physics* 60 (2010), 562-569.
- [2] J.-Y. Chemin, On some recent results in Fluid mechanics, *Journées Equations aux dérivées partielles*, 1994, pp.1-45.
- [3] C. Lacave, ...
- [4] Y.C. Li, Isospectral Theory of Euler Equations, arXiv :math/0203125v1 [math.AP] 13 Mar 200.