HAL
open science

Utilisation de Polynômes de Chebychev pour l'Identification à Temps Continu

Jérémy Lizandier, Minh Tu Pham, Didier Rémond, Corinne Rouby

To cite this version:

Jérémy Lizandier, Minh Tu Pham, Didier Rémond, Corinne Rouby. Utilisation de Polynômes de Chebychev pour l'Identification à Temps Continu. JIME, Apr 2011, Douai, France. pp.CD. hal-00619025

HAL Id: hal-00619025

https://hal.science/hal-00619025v1

Submitted on 5 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Utilisation de Polynômes de Tchebychev pour l'Identification à Temps Continu

Jérémy Lizandier[1], Minh Tu Pham[1], Didier Rémond[2], Corinne Rouby[3]

[1]Laboratoire Ampère, UMR CNRS 5005,
Université de Lyon, INSA-Lyon,
Bâtiment St-Exupéry, 25 Avenue Jean Capelle,
F-69621 Villeurbanne Cedex, France
(jeremy.lizandier, minh-tu.pham,)@insa-lyon.fr

[2]LaMCoS, CNRS UMR5259
Université de Lyon, INSA-Lyon,
F-69621 Villeurbanne Cedex, France
didier.remond@insa-lyon.fr

[3]UR Navier Ecole des Ponts ParisTech
Université Paris-Est
77455 Marne-la-Vallée, France
corinne.rouby@enpc.fr

Résumé— **Dans ce papier, une présentation des propriétés des polynômes de Tchebychev et une formulation dérivée utilisant ces polynômes sont effectuées. La méthode d'identification présentée consiste à appliquer une transformation linéaire sur le système d'équations qui régit le processus. Pour cela, l'opérateur mathématique utilisé s'appuie sur une décomposition du signal dans une base formée de polynômes orthogonaux. Nous montrons que cette projection se comporte comme un filtre passe-bande, de telle sorte qu'une seule opération est nécessaire pour le pré-traitement des données avant le processus d'identification, à savoir la dimension de la base des polynômes Tchebychev. L'identification expérimentale en boucle fermée d'un robot à 2 axes avec cette méthode est effectuée dans une dernière partie. Les résultats obtenus sont comparés à une technique utilisée classiquement en robotique et montrent des résultats identiques.**

Mots-clés— **polynômes orthogonaux, analyse fréquentielle, identification en boucle fermée, problème inverse, robotique**

I. Introduction

Dans le contexte de la mécanique, la prédiction du comportement dynamique de mécanismes ou de structures complexes exige des modèles fins. Malheureusement les conditions aux frontières, le caractère incertains des paramètres, les coefficients de viscosité rendent l'identification de tels modèles délicate. L'une des difficultés principales se situe dans la transformation des équations différentielles de ce type de procédé en un système d'équations algébriques. Traditionnellement, lorsque les hypothèses de linéarité sont possibles et vérifiées, une forme discrète des équations à temps continu est obtenue en appliquant la transformée en Z sur les signaux. Ceci conduit à des équations récurrentes équivalentes quand les signaux sont récoltés à pas constant avec un échantillonneur et un bloqueur d'ordre zéro. A ce stade, le choix de la période d'échantillonnage peut être critique car un suréchantillonnage rend difficile l'identification des paramètres physiques [14]. Au cours de ces dernières décennies, des méthodes alternatives ont été proposées et référencées sous la terminologie méthodes d'identification à temps continu [14], [1], [3], [11]. Parmi ces approches, des méthodes s'appuyant sur des fonctions orthogonales ont été employées à travers une formulation intégrale des équations différentielles. Leur principal avantage est qu'elles transforment l'intégration directe des signaux en intégration plus simple de ces fonctions en se servant d'une matrice carrée qui dépend des fonctions orthogonales. Par conséquent, les équations régissant le comportement du système mécanique peuvent être transformées en un jeu d'équations algébriques. Un autre avantage de ces fonctions est leur propriété d'orthogonalité qui permet de décomposer un signal sur une base polynomiale.Dans [15], les auteurs comparent différentes bases orthogonales telles que les polynômes de Jacobi, de Legendre ou de Tchebychev, les fonctions Walsh et, naturellement, les séries de Fourier. Ils y mentionnent également la facilité de mise en oeuvre de la formulation intégrale dans le contexte de l'identification de problèmes inverses et la simplification du calcul dans des problèmes d'analyse de sensibilité. Dans [16], les auteurs emploient également cette formulation intégrale en présence des non-linéarités telles que l'oscillateur de Duffing ou les frottements secs. Dans le domaine de l'identification du comportement non linéaire, d'autres auteurs ont proposé des approches semblables utilisant des polynômes de Tchebychev [12] ou en employant les autres polynômes ou série chronologique [2], [8]. Dans [6], [7], les auteurs présentent des travaux reposant sur une formulation dérivée à partir d'ondelettes. Les auteurs arrivent aux mêmes conclusions sur la pertinence de l'utilisation des fonctions orthogonales pour résoudre des problèmes d'identification dynamique de systèmes à comportement linéaire ou non linéaire à paramètres variants ou non. Il apparaît à travers cette bibliographie que la formulation dérivée est beaucoup plus commode pour

l'identification, où l'évaluation des états initiaux n'est pas exigée, et pour des problèmes inverses, où aucune inversion matricielle n'est nécessaire. Finalement Pacheco et Steffen montrent dans [5] que les résultats d'identification obtenus avec des polynômes de Tchebychev, de Jacobi ou de Legendre ne sont pas satisfaisants quand des excitations aléatoires sont appliquées, bien qu'aucune explication n'ait été fournie. Cette difficulté s'explique par la forme des polynômes de Tchebychev qui aboutit à des projections de faible qualité pour des signaux à large bande de fréquences. Par conséquent, une attention particulière doit être prêtée à la qualité de la projection des signaux avant l'étape d'estimation paramétrique. Cet inconvénient des polynômes de Tchebychev nous oblige à proposer une méthodologie plus générale d'identification qui peut être facilement prolongée à d'autres polynômes classiques.

L'organisation de l'article est le suivant, dans un premier temps les propriétés des polynômes de Tchebychev et une formulation dérivée utilisant ces polynômes sont rappelées. La méthode d'identification présentée dans ce papier consiste à appliquer une transformation linéaire sur le système d'équations qui régit le processus. Pour cela, l'opérateur mathématique utilisé s'appuie sur une décomposition du signal dans une base formée de polynômes orthogonaux. Nous montrons dans un second temps que cette projection a l'avantageuse propriété de se comporter comme un filtre passe-bande, de telle sorte qu'une seule opération est nécessaire pour le pré-traitement des données avant le processus d'identification. L'identification en boucle fermée d'un robot à 2 axes avec cette méthode est effectué dans une dernière partie. Les résultats obtenus sont comparés à une technique utilisant les différences finies classiquement utilisée en robotique.

II. Polynômes Orthogonaux

A. Base de polynômes orthogonaux

L'étude présentée dans ce papier donne suite à une méthode originale [18] visant à exploiter les propriétés de dérivation des familles de polynômes orthogonaux. La famille considérée est la base de Tchebychev type I mais la technique utilisée est tout aussi bien applicable aux familles de Tchebychev II ou encore Legendre. Le i-ème terme de la suite polynomiale de Tchebychev défini sur l'intervalle de temps [-1 ; 1] s'écrit :

$$P_i(\tau) = \cos\left(i\mathrm{arcos}(\tau)\right) \tag{1}$$

Cet élément satisfait l'équation de récurrence suivante :

$$P_{i+1}(\tau) = 2\tau P_i(\tau) - P_{i-1}(\tau) \quad \text{avec } 1 \leq \mathrm{i} \leq n-1 \tag{2}$$

Où les premiers membres de la suite sont :

$$\begin{cases} P_0(\tau) = 1 \\ P_1(\tau) = \tau \end{cases} \tag{3}$$

B. Projection d'une fonction continue sur la base de Tchebychev

Toute fonction $x(\tau)$ continue sur l'intervalle [-1 ; 1] peut alors se décomposer de telle sorte que :

$$x(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{x}_i P_i(\tau) \tag{4}$$

Afin de reconstituer de manière exacte la fonction $x(\tau)$, nous devons disposer d'une base formée par une infinité de polynômes. Dans la pratique, une troncature à l'ordre n est nécessaire menant à une approximation de la fonction $x(\tau)$. Soit :

$$x(\tau) \simeq \sum_{i=0}^{n} \tilde{x}_i P_i(\tau) \tag{5}$$

Ou encore sous forme vectorielle :

$$x(\tau) \simeq \left\langle \begin{array}{ccccc} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \dots & \tilde{x}_{n-1} & \tilde{x}_n \end{array} \right\rangle \{P^n(\tau)\} \tag{6}$$

avec

$$\{P^n(\tau)\} = \left\langle P_0(\tau) \quad P_1(\tau) \quad \dots \quad P_{n-1}(\tau) \quad P_n(\tau) \right\rangle^T \tag{7}$$

Ces dernières composantes $\tilde{x}_i$ peuvent s'obtenir analytiquement en intégrant le signal multiplié par le polynôme sur le domaine d'orthogonalité. Néanmoins l'échantillonnage de l'équation (5) le long d'une trajectoire à différent instants τ_i $(i = 0, \dots, f)$ permet d'écrire la relation suivante :

$$\langle x \rangle = \langle \tilde{x} \rangle \, [P] \tag{8}$$

avec $\langle x \rangle = \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ x(\tau_1) \\ \vdots \\ x(\tau_{f-1}) \\ x(\tau_f) \end{bmatrix}^T$, $\langle \tilde{x} \rangle = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}^T$ et

$$[P] = \begin{bmatrix} P_0(\tau_0) & \dots & P_0(\tau_f) \\ P_1(\tau_0) & \dots & P_1(\tau_f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1}(\tau_0) & \dots & P_{n-1}(\tau_f) \\ P_n(\tau_0) & \dots & P_n(\tau_f) \end{bmatrix}$$

De cette manière il est possible d'estimer les composantes $\tilde{x}_i$ par une méthode de moindres carrés menant à l'expression :

$$\langle \tilde{x} \rangle = \langle x \rangle \, [P]^+ \tag{9}$$

où $[P]^+$ est la matrice pseudo-inverse de $[P]$.

C. Estimation des dérivées successives

Parmi les propriétés des polynômes, notons que la dérivée de chaque polynôme P_i se décompose en somme de polynômes de degrés inférieurs, l'expression obtenue est décrite ci-dessous pour le cas de la famille de Tchebychev type I [1] :

$$\frac{dP_n}{dt} = \begin{cases} P_0 & \text{pour n} = 1 \\ 2n \sum\limits_{m=0}^{n/2-1} P_{2m+1} & \text{pour n} \geq 2 \text{ et n pair} \\ nP_0 + 2n \sum\limits_{m=1}^{(n-1)/2} P_{2m} & \text{pour n} \geq 3 \text{ et n impair} \end{cases} \tag{10}$$

Il est ainsi possible d'introduire une matrice carrée D tel que :

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} &\simeq \left\langle \begin{array}{ccccc} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \dots & \tilde{x}_{n-1} & \tilde{x}_n \end{array} \right\rangle \left\{ \dot{P}^n(\tau) \right\} = \dots \\ &\dots \left\langle \begin{array}{ccccc} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \dots & \tilde{x}_{n-1} & \tilde{x}_n \end{array} \right\rangle D \, \{P^n(\tau)\} \end{aligned} \tag{11}$$

Et de la même manière, pour la dérivée seconde :

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2} \simeq \left\langle \begin{array}{ccccc} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \dots & \tilde{x}_{n-1} & \tilde{x}_n \end{array} \right\rangle \left\{ \ddot{P}^n(\tau) \right\} = \dots$$
$$\dots \left\langle \begin{array}{ccccc} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \dots & \tilde{x}_{n-1} & \tilde{x}_n \end{array} \right\rangle D^2 \left\{ P^n(\tau) \right\} \tag{12}$$

A titre d'information, la matrice D en question est donnée par (13), dans le cas de Tchebychev type I, pour n pair [1] :

$$D = \frac{2}{\tau_f - \tau_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2n & 0 & 2n & 0 & 2n & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

D. *Analyse fréquentielle de la projection sur la base de Tchebychev*

La dimension de la base de projection (i.e. le degré maximum du plus grand polynôme de la base) influence la qualité de l'approximation (6) du signal. Afin de caractériser le comportement d'un tel opérateur, une étude portant sur l'influence du contenu spectral observé par rapport au degré maximum de polynômes choisis est présentée ci-dessous. Dans un premier temps, l'analyse est mené sur un signal sinusoïdal de fréquence f_i. Un nombre de 15 points par période a été défini arbitrairement pour réaliser une telle étude. L'atténuation en amplitude en décibel entre le signal initial et le signal reconstitué après projection est représentée par la nappe de la figure 1.

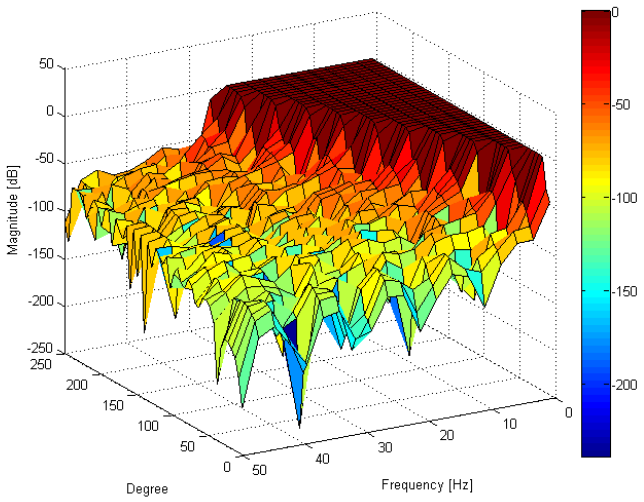

Fig. 1. Atténuation du signal reconstitué par rapport au signal initial

Cette courbe montre que lorsque la fréquence f_i croît, une augmentation de la dimension de la base de projection est nécessaire pour reconstituer correctement le signal original. Ainsi l'opérateur linéaire de projection polynomiale peut-être considéré comme un filtre passe bas avec la dimension de la base comme paramètre variant en fonction de la fréquence de coupure du filtre. Un autre aspect que nous avons souhaité analyser est le comportement fréquentiel de l'opérateur de dérivation construit sur la base de Tchebychev en fonction de la fréquence normalisée f_N. Cette dernière est définie par l'équation suivante :

$$f_N = \frac{f}{f_e} \tag{14}$$

où f_e est la fréquence d'échantillonnage. Le principe d'obtention des gabarits fréquentiels de l'opérateur de dérivation est résumé sur le schéma suivant :

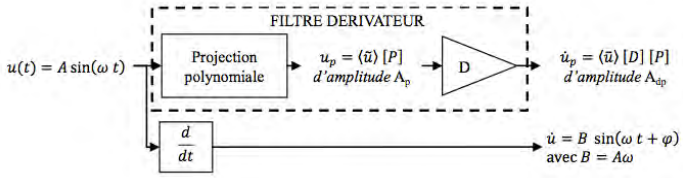

Fig. 2. Analyse fréquentielle

On constate dans la pratique que si le signal $\dot{u}_p$ approximant la dérivée parfaite $\dot{u}$ est en phase avec celle-ci, en revanche ce signal reconstruit subit une distorsion en amplitude en fonction de la fréquence du signal d'entrée u.

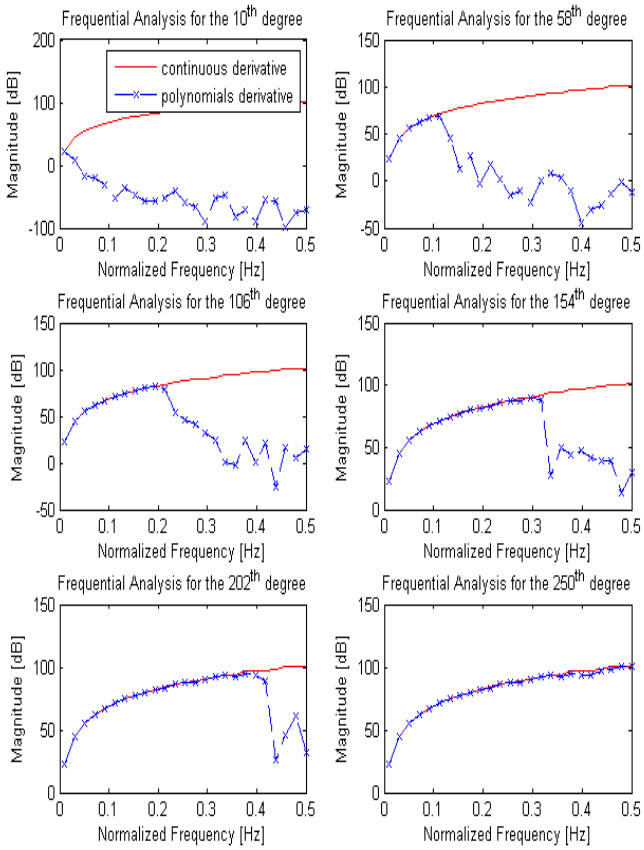

Fig. 3. Caractérisation fréquentielle de l'opérateur dérivé par projection polynomiale. Fréquence d'échantillonnage de 100 Hz

La courbe 3 fournit les rapports des amplitudes en fonction de la fréquence du sinus initial puis pour différentes dimensions de la base de projection :

– $\left|\frac{B}{A}\right|_{dB}$ en trait continu représente le gabarit fréquentiel de la dérivée exacte ;

– $\left|\frac{A_{dp}}{A}\right|_{dB}$ en trait pointillés représente celui de l'opérateur de dérivation par projection polynomiale.

L'analyse de la figure 4 montre clairement que l'opérateur de dérivation par projection polynomial se comporte comme un filtre. Plus le degré de décomposition augmente et plus haute est la fréquence de coupure. Il devient alors possible de choisir la dimension de la base de projection en fonction de la fréquence de coupure désirée. L'opérateur peut alors être assimilé à un filtre passe bande, composé d'un filtre dérivateur en basses fréquences et d'un filtre passe bas en haute fréquence.

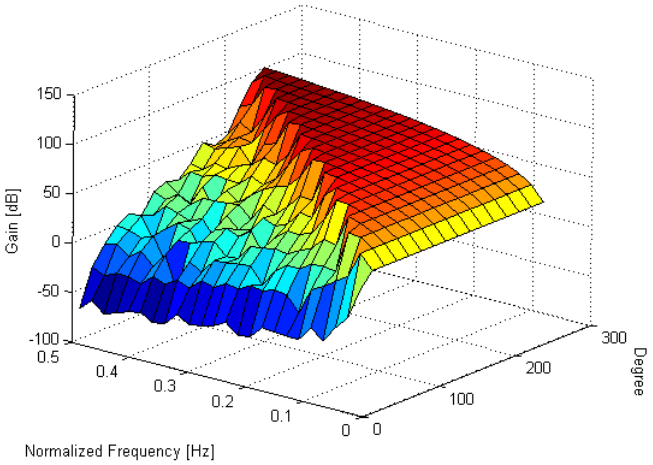

Fig. 4. Distorsion en amplitude du filtre dérivateur en fonction de la fréquence du signal d'entrée et du degré des polynômes

De manière similaire les figures 5 et 6 montrent le comportement frequentiel de l'opérateur de dérivation polynomial pour l'estimation de la dérivée seconde.

III. Application à l'identification d'un robot à deux degrés de libertés

A. Modèle d'identification

Le système étudié est un robot planaire SCARA à deux articulations rotoïdes. La démarche généralement adoptée pour ce type de système consiste à utiliser le modèle dynamique inverse du robot qui s'exprime sous une forme linéaire par rapport aux paramètres dynamiques à estimer. Ce modèle dynamique inverse d'un tel robot exprime le vecteur de couples Γ de moteur (l'entrée de commande) en fonction des coordonnées généralisées (le vecteur d'état et sa dérivée). Il peut être obtenu à partir du lagrangien ou de l'algorithme de Newton Euler et il est possible de montrer qu'il peut s'écrire sous la forme suivante [9], [10] :

$$\Gamma = D_s(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta \tag{15}$$

où $q = [q_1, q_2]^T$ est le vecteur des variables articulaires et la matrice de régression D_s est donnée par :

$$D_s(\ddot{q}, \dot{q}, q) = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 \\ sign\,(\dot{q}_1) & 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\,C_2 - \dot{q}_2\,(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\,S_2 & \ddot{q}_1 C_2 + \dot{q}_1^2 S_2 \\ -\,(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\,S_2 - \dot{q}_2\,(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\,C_2 & \dot{q}_1^2 C_2 - \ddot{q}_1 S_2 \\ 0 & \dot{q}_2 \\ 0 & sign\,(\dot{q}_2) \end{pmatrix}^T \tag{16}$$

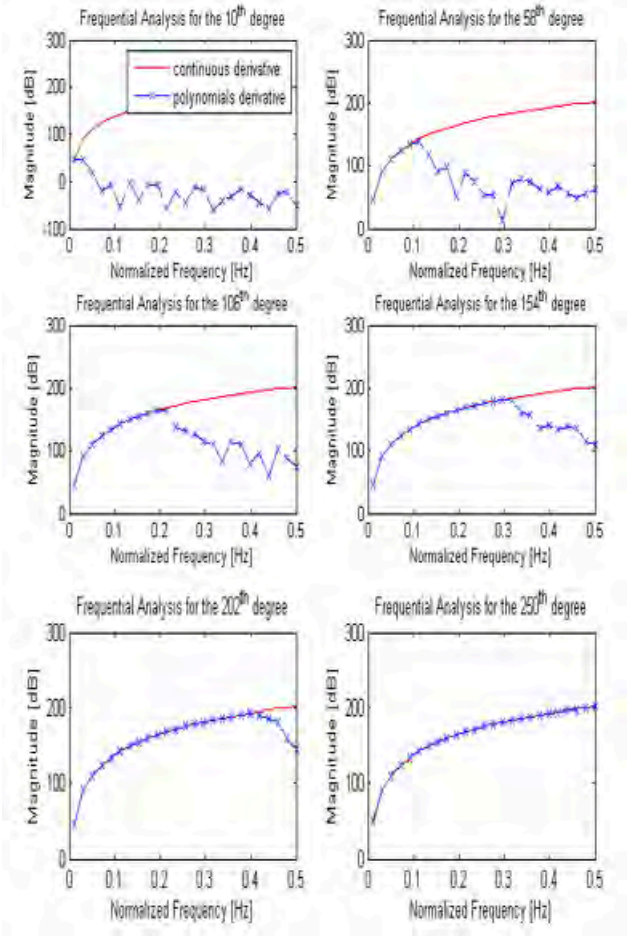

Fig. 5. Caractérisation fréquentielle de l'opérateur dérivé d'ordre 2 par projection polynomiale. Fréquence d'échantillonnage de 100 Hz

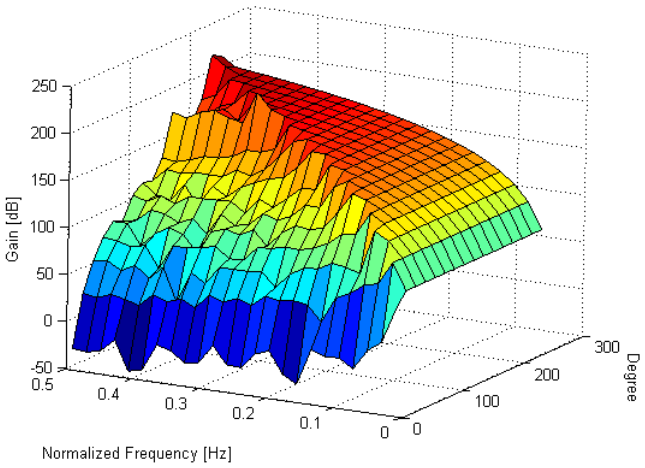

Fig. 6. Distorsion en amplitude du filtre dérivateur d'ordre 2 en fonction de la fréquence du signal d'entrée et du degré des polynômes

avec $C_2 = \cos(q_2)$ and $S_2 = \sin(q_2)$
et le vecteur des paramètres inconnus est défini par :

$$\theta = [\; ZZR_1 \;\; F_{v1} \;\; F_{s1} \;\; ZZ_2 \;\; LMX_2 \;\; LMY_2 \;\; F_{v2} \;\; F_{s2} \;]^T \tag{17}$$

où $ZZR_1 = ZZ_1 + M_2 L^2$,
L étant la longueur du corps 1,
M_2 étant la masse du corps 2,
ZZ_1 and ZZ_2 étant respectivement les moments d'inertie

des corps 1 and 2,
LMX_2 and LMY_2 sont les moments principaux d'inertie du corps 2 multipliés par L,
F_{v1}, F_{s1}, F_{v2}, F_{s2} sont respectivement les paramètres de frottements visqueux et sec des articulations 1 et 2.

B. Méthode d'identification

Le principe de l'identification consiste à échantillonner le modèle dynamique inverse le long de mouvements excitants en boucle fermée, à différents instants t_i $(i = 1, \ldots, n_e)$, de façon à obtenir un système linéaire surdéterminé. Après échantillonnage de l'équation (15), la concaténation des différentes mesures conduit à l'équation :

$$Y = W(\widehat{q}, \widehat{\dot{q}}, \widehat{\ddot{q}})\theta + \rho \tag{18}$$

Où :
- $\widehat{q}$, $\widehat{\dot{q}}$ et $\widehat{\ddot{q}}$ sont respectivement les mesures de positions et les estimations des vitesses et accélérations articulaires,
- Y est le vecteur de dimension $(2n_e \times 1)$ correspondant à l'échantillonnage de l'effort moteur Γ du modèle (15),
- W est la matrice de dimension $(2n_e \times 8)$ correspondant à l'échantillonnage de la matrice D_s du modèle (15),
- ρ est le vecteur des résidus dus aux bruits de mesures et aux erreurs de modèle.

À partir de l'équation (18), il est possible d'obtenir une estimation au sens des moindres carrés, notée $\hat{\theta}$, du vecteur inconnu θ :

$$\hat{\theta} = Arg \min_{\theta} \|\rho\|^2 = W^+ Y \tag{19}$$

W^+ est la matrice pseudo-inverse de W :

$$W^+ = (W^T\ W)^{-1}\ W^T \tag{20}$$

L'unicité de la solution dépend du rang de la matrice d'observation. La perte de rang de W peut avoir deux origines :
- Une perte de rang structurelle de W peut apparaître quels que soit les échantillons $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ de (18). Cette perte de rang survient lorsque le modèle d'identification a été paramétré de façon surabondante. Ce problème d'identifiabilité est résolu en utilisant les paramètres de base qui fournissent une représentation minimale du modèle [13], [4].
- Une perte de rang numérique liée à un mauvais choix des échantillons $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ sur une trajectoire d'excitation pauvre en informations. Ce problème peut être résolu en réalisant une identification en boucle fermée de position avec suivi de mouvements excitants pour les paramètres [17].

Les matrices W et Y de (18) sont perturbées par les mesures bruitées ou les estimations de $(\widehat{q}, \widehat{\dot{q}}, \widehat{\ddot{q}})$. Il importe donc de filtrer les données avant de calculer la solution au sens des moindres carrés. D'un point de vue pratique, les estimations des dérivées successives de (18) sont obtenues en appliquant la méthode de filtrage présentée dans la section II-C. Le problème est de bien choisir le paramètre de synthèse n pour que $W(\hat{q}, \hat{\dot{q}}, \hat{\ddot{q}})$ tende vers $W(q, \dot{q}, \ddot{q})$ dans la bande de fréquence du modèle dynamique à identifier. Une distorsion à ce niveau du filtrage introduirait un biais dans l'estimation du vecteur des inconnues θ.

C. Résultats expérimentaux

La fréquence d'échantillonnage pour l'acquisition des données est égale à $200Hz$. Une identification en boucle fermée, utilisant une commande proportionnelle dérivée, a été effectuée avec un suivi de trajectoires excitantes en position constituées de polynômes d'ordre 5. Cette trajectoire a été au préalable calculée par optimisation de manière à optimiser le conditionnement de la matrice d'observation W [19].

Les résultats de l'identification expérimentale sont rapportés dans le tableau I avec une base de polynômes de Tchebychev de dimension 225 et mis en perspective avec les résultats obtenus par la méthode présentée dans [5]. Les paramètres estimés sont donnés avec leur écart type relatif. Un paramètre avec un écart type tel que $\%\sigma_{\hat{\theta}r} \geq 10\%$ signifie qu'il n'est pas ou peu identifiable sur la trajectoire donnée. L'écart-type $\sigma_{\hat{\theta}_i}$ sur chaque paramètre estimé est calculé en supposant ρ comme étant un bruit blanc d'écart-type σ_ρ et de matrice de variance $C_{\rho\rho}$:

$$C_{\rho\rho} = \sigma_\rho^2 I_{2n_e \times 2n_e} \tag{21}$$

Où $I_{2n_e \times 2n_e}$ est la matrice identité $(2n_e \times 2n_e)$. La matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$C_{\hat{\theta}} = \sigma_\rho^2 \left[W^T W\right]^{-1} \tag{22}$$

$\sigma_{\hat{\theta}_i}^2 = C_{\hat{\theta}ii}$, est le i^{ème} coefficient de la diagonale de $C_{\hat{\theta}}$.

L'écart-type relatif % $\sigma_{\hat{\theta}r}$ est défini par la relation :

$$\%\sigma_{\hat{\theta}_{ri}} = 100\frac{\sigma_{\hat{\theta}_i}}{\hat{\theta}_i} \tag{23}$$

TABLE I
RÉSULTATS D'IDENTIFICATION

Paramètres (unités SI)	réf. [5]	$\%\sigma_{\hat{\theta}_r}$	$\hat{\theta}$	$\%\sigma_{\hat{\theta}_r}$
ZZR_1	3.442	0.184	3.433	0.204
F_{v1}	0.036	34.827	0.042	33.607
F_{s1}	0.768	2.682	0.753	3.070
ZZ_2	0.060	3.302	0.061	3.654
LMX_2	0.123	1.512	0.123	1.673
LMY_2	0.008	15.564	0.008	16.824
F_{v2}	0.032	38.364	0.033	41.031
F_{s2}	0.0101	19.587	0.098	22.663

On observe que les valeurs identifiées sont sensiblement les mêmes quelle que soit la méthode utilisée. Il en va de même pour les écarts type relatifs où aucune tendance ne différencie particulièrement une méthode par rapport à l'autre. On remarque néanmoins que ce sont les frottements qui restent les plus difficile à identifier. Afin de valider cette identification, les couples de commande sont reconstitués à partir des paramètres identifiés. Leur comparaison avec la commande réellement appliquée au système montrent la qualité de l'identification (figure 7).

IV. Conclusion

Dans ce papier, une présentation des propriétés des polynômes de Tchebychev et une formulation dérivée utilisant

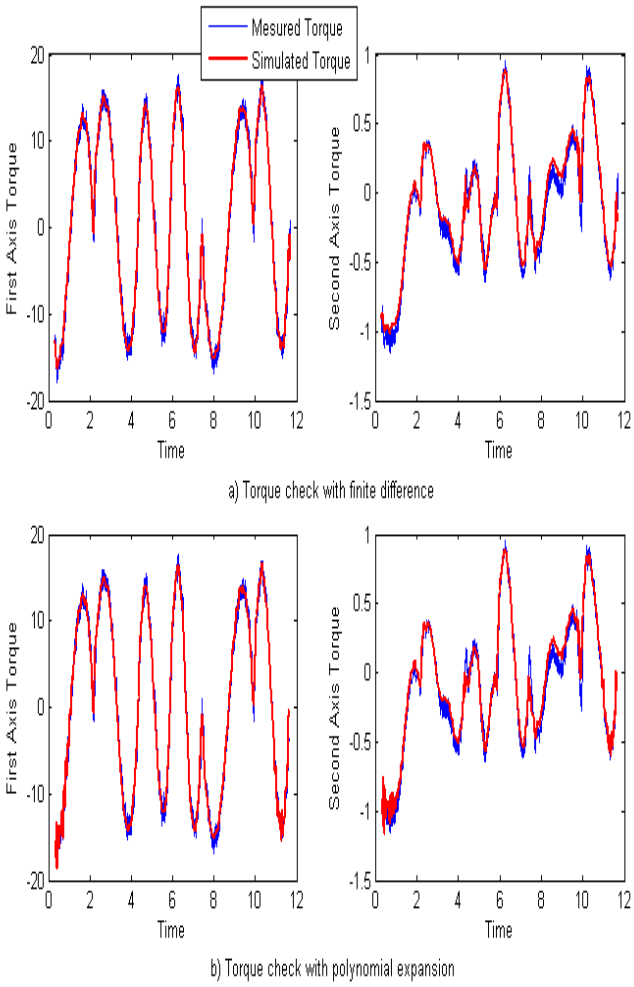

Fig. 7. Validation des efforts mesurés (en bleu) et simulés (en rouge). a) Par la méthode de [5] b) par la méthode de projection polynomiale

ces polynômes ont été effectuées. La méthode d'identification présentée consiste à appliquer une transformation linéaire sur le système d'équations qui régit le processus. Pour cela, l'opérateur mathématique utilisé s'appuie sur une décomposition du signal dans une base formée de polynômes orthogonaux. Nous avons montré que cette projection se comporte comme un filtre passe-bande, de telle sorte qu'une seule opération est nécessaire pour le pré-traitement des données avant le processus d'identification à savoir la dimension de la base des polynômes Tchebychev. L'identification expérimentale en boucle fermée d'un robot à 2 axes avec cette méthode est effectué dans une dernière partie. Les résultats obtenus ont été comparés à une technique utilisée classiquement en robotique et montrent des résultats identiques.

Références

[1] S. Ahmed, B. Huang, and S.L. Shah. Parameter and delay estimation of continuous-time models using a linear filter. *Journal of Process Control*, 16(4) :323–331, 2006.

[2] Q. Chen and G.R. Tomlinson. Parametric identification of systems with dry friction and nonlinear stiffness using a time series model. *Transactions of ASME Journal of Vibrations and Acoustics*, 118(2) :252–263, 1996.

[3] C.T. Chou, M. Verhaegen, and R. Johansson. Continuous-time identification of siso systems using laguerre functions. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 47(2) :349–362, 1999.

[4] M. Gautier and W. Khalil. Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots. *International Journal of Robotic Research*, 1 :362–375, 1992.

[5] M. Gautier and Ph. Poignet. Extended kalman filtering and weighted least squares dynamic identification of robot. *Control Engineering Practice*, 9 :1361–1372, 2001.

[6] R. Ghanem and F. Romeo. A wavelet-based approach for the identification of linear time varying systems. *Journal of Sound and Vibration*, 234(4) :555–576, 2000.

[7] R. Ghanem and F. Romeo. A wavelet-based approach for model and parameter identification of non-linear systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36(5) :835–859, 2001.

[8] I.R. Horng and J.H. Chou. Analysis and identification of nonlinear systems via shifted jacobi series. *International Journal of Control*, 45(1) :279–290, 1987.

[9] W. Khalil and E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Elsevier Butterworth Heinemann, 1999.

[10] K. Kozlowski. *Modelling and identification in robotics*. Springer, London, 1998.

[11] E.K. Larsson and T. Soderstrom. Identification of continuous-time ar processes from unevenly sampled data. *Automatica*, 38(4) :709–718, 2002.

[12] S.F. Masri and T.K. Caughey. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems. *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics*, 46 :433–447, 1979.

[13] H. Mayeda, K. Yoshida, and K. Osuka. Base parameters of manipulator dynamic models. *IEEE Transactions On Robotics and Automation*, 6(3) :312–321, 1990.

[14] M. Mensler. *Analyse et étude comparative de méthodes d'identification des systèmes à représentation continue, Développement d'une boîte à outils logicielle*. PhD thesis, UFR Sciences et Techniques Université Poincaré, 1999.

[15] R.P. Pacheco and V. Steffen. Using orthogonal functions for identification and sensitivity analysis of mechanical systems. *Journal of Vibration and Control*, 8(7) :993–1021, 2002.

[16] R.P. Pacheco and V. Steffen. On the identification of non-linear mechanical systems using orthogonal functions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(7) :1147–1159, 2004.

[17] C. Presse and M. Gautier. New criteria of exciting trajectories for robot identification. In *IEEE international conference on robotics and automation*, pages 907–912, Atlanta, Georgia, USA, 1993.

[18] D. Rémond, J. Neyrand, G. Aridon, and R. Dufour. On the improved use of chebyshev expansion for mechanical system identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 :390–407, 2008.

[19] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer, 1997.