



HAL
open science

La philosophie des mathématiques

Denis Bonnay, Jacques Dubucs

► **To cite this version:**

| Denis Bonnay, Jacques Dubucs. La philosophie des mathématiques. 2011. hal-00617305

HAL Id: hal-00617305

<https://hal.science/hal-00617305>

Preprint submitted on 26 Aug 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La philosophie des mathématiques

Denis Bonnay (U. Paris Ouest, Ireph et IHPST)

et

Jacques Dubucs (IHPST, CNRS/Paris I/ENS)

La philosophie des mathématiques occupe une position originale au sein de la philosophie des sciences. D'un côté, l'importance des mathématiques dans la science contemporaine est telle que, en principe, nulle enquête philosophique sur la science ne peut faire l'économie d'une réflexion sur la nature des mathématiques et de la connaissance mathématique. À l'horizon de la philosophie des mathématiques se jouent ainsi des questions fondamentales de philosophie des sciences, comme la possibilité de mener à son terme le programme de naturalisation de l'épistémologie ou encore le problème de l'applicabilité des mathématiques¹. D'un autre côté, la méthodologie des mathématiques semble éloignée de la méthodologie générale des sciences. Pour dire les choses de manière un peu caricaturale, le mathématicien ne travaille pas au laboratoire, les problématiques classiques de philosophie générale des sciences, qui valent pour les disciplines empiriques, concernant par exemple la question de la confirmation, de la causalité ou du changement théorique, ne sont pas immédiatement transposables. Au moment d'aborder l'épistémologie des mathématiques, il faut, en un sens, tout expliquer. Expliquer ce en quoi consiste l'activité des mathématiciens, en quel sens il s'agit d'une activité théorique, quels sont ses objets, quelles sont ses méthodes, et comment tout ceci s'intègre à une vision globale de la science incluant les sciences de la nature.

Comme il se doit, les philosophes des mathématiques ne sont d'accord sur à peu près rien. Certains considèrent que les mathématiques étudient bien un domaine d'objets existant indépendamment de nous, et qu'il y a des objets mathématiques comme il y a des objets physiques, même s'il ne s'agit pas du même genre d'objets. D'autres considèrent qu'il n'est en rien, que les objets mathématiques ne sont que des fictions commodes, ou alors que les objets mathématiques

¹ Doit-on considérer qu'il y a quelque chose à expliquer, à savoir le « merveilleux » succès de la science mathématisée, ou bien faut-il dire que le mystère n'en est pas un, les mathématiques n'étant qu'une simple boîte à outils ?

sont construits par nous, ou encore que les mathématiques ne font que décrire des propriétés très abstraites de l'expérience. Certains considèrent que la connaissance mathématique est une connaissance *sui generis*, de nature purement intellectuelle. D'autres qu'il s'agit bien d'une connaissance *sui generis* mais qu'elle repose sur une forme d'intuition, d'autres encore refusent de lui accorder une place à part et ne veulent parler de connaissance mathématique qu'intégrée à la totalité de l'édifice de la science.

L'articulation de la réponse au problème ontologique (de quoi les mathématiques sont-elle l'étude ?) et de la réponse au problème épistémologique (comment les connaissances mathématiques sont-elles possibles ?) sera le fil rouge de notre présentation². Dans la première section, la question du rapport à l'expérience ainsi que celle des rôles respectifs de l'intuition et des principes logiques dans la connaissance mathématique sont posées à travers les oppositions classiques entre approches empiriste, rationaliste et critique. La seconde section présente de façon relativement détaillée deux programmes antiréalistes, qui gagent le succès de formes d'intuition mathématique particulière sur le désaveu de l'indépendance ontologique d'au moins certaines parties des mathématiques. À l'opposé, la troisième section expose les arguments en faveur du réalisme. Différentes formes de réalisme sont discutées dans la quatrième section, en particulier à l'aune de la manière dont elles envisagent le statut de la théorie des ensembles. Faisant suite à une confrontation avec les difficultés épistémologiques des différentes versions du réalisme mathématique (cinquième section), la sixième section est consacrée aux perspectives naturalistes et au structuralisme mathématique.

1. Les mathématiques entre logique et intuition

1.1 Vérités de raison ou généralisations empiriques

Lorsque son valet lui demande ce qu'il croit, Dom Juan répond « Je crois que deux et deux sont quatre, Sganarelle, et que quatre et quatre sont huit ». Sganarelle peut bien ensuite ironiser sur la valeur de cette belle croyance ; elle n'en possède pas moins, de l'avis de chacun, le caractère de croyance cardinale que Dom Juan lui attribue. Rien de plus élémentaire que la proposition que deux et deux font quatre, rien de plus certain que la vérité de cette proposition. Il est remarquable que la

² Les débats classiques en philosophie des mathématiques portent également sur un ensemble de questions spécifiques, concernant par exemple la nature de l'infini, la nature du continu, la notion de calcul, la notion de processus aléatoire ou encore la question de savoir quelle théorie fournit le meilleur cadre unifié pour les mathématiques contemporaines. Certaines de ces questions seront abordées à la faveur du questionnement ontologique et épistémologique plus général que nous avons adopté, d'autres, malgré leur intérêt intrinsèque, n'ont pas trouvé leur place dans le présent exposé.

difficulté de la philosophie des mathématiques commence avec les vérités les plus simples des mathématiques. Deux et deux font quatre, mais comment le savons-nous ?

Voyons la réponse classique donnée par un philosophe rationaliste comme Leibniz. Aussi élémentaire cette proposition soit elle, il ne s'agit pas d'une vérité tout-à-fait immédiate, il faut donc la démontrer. Pour cela, Leibniz va utiliser les définitions des nombres (2 est 1 et 1, 3 est 2 et 1, 4 est 3 et 1) et un axiome à la validité générale, le principe de substituabilité des identiques. La démonstration suit :

« 2 et 2 est 2 et 1 et 1 (par la déf. 1)

2 et 1 et 1 est 3 et 1 (par la déf. 2)

3 et 1 est 4 (par la déf. 3)

Donc (par l'axiome)

2 et 2 est 4. Ce qu'il fallait démontrer. »

Nouveaux essais sur l'entendement humain, IV, VII, 10

La démonstration ne repose que sur des définitions et un axiome³, qui doit, pour Leibniz, pouvoir se réduire à un principe d'identité. Les vérités mathématiques, à l'instar de $2+2=4$ sont des vérités de raison : elles ne reposent en aucune façon sur l'expérience et sont connues *a priori*. Tout le problème de la position de Leibniz est de réussir à montrer qu'effectivement rien de plus n'est nécessaire pour rendre compte des démonstrations des mathématiciens. Ce que Leibniz pense réussir dans le cas de $2+2=4$, il doit pouvoir le réussir pour toute vérité mathématique. Mais les problèmes surgissent avant même l'extension de la stratégie leibnizienne. Comme le remarquera Frege (1884, §6), la démonstration de Leibniz est lacunaire : elle utilise implicitement l'associativité de l'addition, qui permet de passer de $2+(1+1)$ à $(2+1)+1$. Il suffit pour rendre la démonstration correcte d'explicitier l'usage fait de l'associativité. Mais il faudrait alors justifier le principe d'associativité lui-même ; il n'y a là rien d'évident dans le cadre leibnizien, qui demanderait une réduction à une forme de principe d'identité qui paraît loin d'aller de soi..

Puisque la lacune ne semble pas facile à combler, éloignons-nous de l'approche rationaliste et voyons la réponse d'un empirisme radical comme Mill. Dans le *Système de logique*, Mill conteste le statut de « simple définition » des affirmations comme « 3 est 2 et 1 ». La définition contient l'affirmation d'un fait, à savoir que toute totalité composée de trois éléments peut être divisée en une totalité de deux éléments et un autre élément : « le fait affirmé dans la définition d'un nombre est un fait physique. Chacun des nombres, deux, trois, quatre, etc. dénote un phénomène physique »

³ En l'occurrence, il s'agit de l'axiome de substituabilité des identiques.

(III, XXIV, 5). Les notions mathématiques sont des notions empiriques, (« deux dénote toutes les paires de choses ») et les propositions mathématiques sont des propositions empiriques, même si elles sont très générales et très abstraites. À partir de là, on pourrait donner une réponse millienne au problème rencontré par Leibniz, en disant que le principe d'associativité est un principe empirique, très général certes, mais empirique tout de même. Le contenu du principe d'associativité consisterait en ce que, lorsqu'on peut diviser un agrégat en deux agrégats – appelons le premier a – et que le second de ces agrégats peut à nouveau être divisé en deux agrégats b et c , on peut toujours aussi diviser l'agrégat initial en deux agrégats, dont le premier se divise en deux agrégats a et b , et dont le second est l'agrégat c . L'empirisme radical, qui est prêt à fonder les vérités mathématiques sur l'expérience, ne rencontre pas le problème du rationaliste qui doit expliquer pour tout axiome mathématique ce qui fait de cet axiome une vérité de raison accessible indépendamment de toute expérience. Cependant, l'empirisme radical rencontre d'autres problèmes. En réduisant les vérités mathématiques à des vérités empiriques, il ne rend pas compte des propriétés modales et épistémiques apparentes des vérités mathématiques. Les vérités mathématiques nous semblent être nécessaires et être connaissables indépendamment de l'expérience, au contraire des vérités empiriques contingentes. Peut-être cette apparence est-elle illusoire, mais encore faudrait-il expliquer l'illusion. En outre, la distance entre les notions mathématiques et l'expérience rend difficile la réduction empiriste : comme l'objectera Frege, si l'on peut attribuer une dénotation empirique à deux, en parlant des agrégats composés de deux choses, quelle dénotation attribuer à zéro ?

1.2 Une intuition sensible purifiée au fondement des jugements mathématiques ?

Naïvement, il peut être tentant de considérer qu'une bonne philosophie des mathématiques doit se situer quelque part entre les positions extrêmes incarnées ici, pour les besoins de notre cause, par Leibniz et Mill. D'un côté, il semble bien y avoir quelque chose comme une expérience mathématique, qui est au cœur de l'activité du mathématicien, et qui devrait pouvoir fonder la validité de principes proprement mathématiques comme la loi d'associativité. D'un autre côté, cette expérience ne saurait être exactement la même chose que l'expérience qui sous-tend habituellement nos généralisations empiriques ; « $2+2=4$ » n'est pas à mettre sur le même plan que « les arbres perdent leur feuille en automne ».

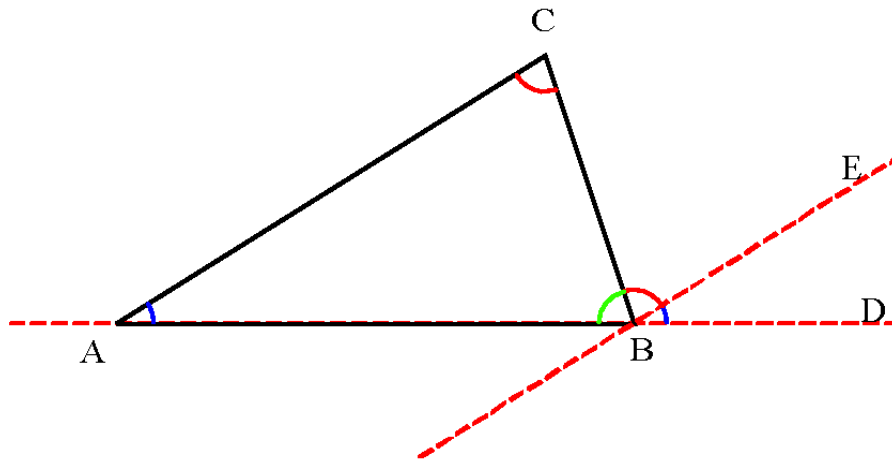
Qu'il soit tentant de chercher une voie intermédiaire ne signifie pas que cela soit facile, ni même qu'une telle voie mène quelque part. La philosophie des mathématiques de Kant cherche à explorer cette voie : voyons où elle nous mène. Kant a cherché à reconnaître un rôle à l'intuition en

mathématique, sans que cette intuition fasse dépendre les vérités mathématiques de contenus empiriques. Dans des textes célèbres de la *Critique de la raison pure* et des *Prolégomènes*, Kant commence par soutenir que les propositions mathématiques ne sauraient être considérées comme des propositions analytiques : il y a quelque chose de plus dans le concept de quatre que le concept de somme de deux et de deux. Pour Kant, si nous savons que deux et deux font quatre, c'est que nous sortons du simple concept de somme de deux et deux et que nous avons recours à l'intuition, par exemple en comptant sur nos doigts.

À nouveau, tout le problème est de comprendre comment nous pouvons nous appuyer sur une intuition apparemment empirique pour établir une connaissance qui, elle, n'est pas empirique. Dans les termes de Kant, le problème est de comprendre la possibilité de jugements synthétiques *a priori*, et en l'occurrence la possibilité de jugements synthétiques *a priori* fondés sur l'intuition. La solution de Kant est de supposer l'existence d'une intuition pure, l'intuition pure des formes de la sensibilité. L'idée de forme de la sensibilité repose sur la distinction de deux aspects des phénomènes : leur forme, qui correspond à la manière dont sont ordonnés les phénomènes les uns relativement aux autres, et leur matière, qui correspond à la sensation. Les formes de la sensibilité, que sont le temps et l'espace, sont données *a priori* : elles ne dépendent pas d'une expérience, elles fondent au contraire la possibilité de l'expérience.

L'arithmétique repose sur l'intuition pure du temps tandis que la géométrie repose sur l'intuition pure de l'espace. Si le lien entre arithmétique et temporalité ne prend sens qu'à travers les spécificités de l'élaboration kantienne des rapports entre la conscience et le temps, le lien entre géométrie et espace est évidemment moins problématique, et la philosophie kantienne de la géométrie a pour elle une certaine fidélité à la pratique des géomètres. Comme l'ont fait remarquer les historiens des mathématiques, les postulats d'Euclide indiquent des possibilités de construction : on peut toujours tracer un cercle (empiriquement, à l'aide d'un compas), on peut toujours prolonger une droite (empiriquement, à l'aide d'une règle). Corrélativement, les démonstrations géométriques euclidiennes reposent sur la réalisation de constructions auxiliaires. Par exemple, pour montrer que la somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat, on part d'un triangle quelconque et l'on trace une parallèle à un côté passant par le sommet opposé à ce côté. La démonstration repose ensuite sur un raisonnement à partir de la figure initiale et des constructions auxiliaires effectuées, en l'occurrence ce raisonnement va consister à utiliser des propriétés des angles formés par la droite

nouvellement tracée avec les droites qui prolongent les deux autres côtés du triangle (dans l'ordre des démonstrations des *Éléments*, ces propriétés ont déjà été démontrées).



La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat.

Source : Wikipedia, Licence Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0

L'intuition mathématique, c'est l'intuition en jeu dans ces constructions sans lesquelles on ne pourrait mener à bien les démonstrations. Cependant, les caractéristiques contingentes de ce qui est construit ne sont pas et ne doivent pas être mobilisées dans la démonstration, ou alors on n'aurait pas démontré une proposition géométrique nécessaire. L'idée de Kant est que l'utilisation de ces constructions dans les preuves est légitime car seules sont retenues, dans la démonstration, les propriétés qui reposent sur ce qu'il est possible de faire dans l'espace, et non les propriétés empiriques des figures : seule la partie pure de l'intuition empirique est pertinente dans l'intuition empirique qui fonde les raisonnements mathématiques⁴.

Les difficultés que rencontre la philosophie kantienne des mathématiques sont à la mesure de sa force de séduction initiale. Ces difficultés tiennent pour une part aux mystères de la démarche transcendantale : que sont les formes de la sensibilité, pourquoi sont-elles *a priori*, et quels rapports entretiennent-elles avec la constitution empirique du sujet ? À supposer que la psychologie puisse

⁴ Lorsque « je construis un triangle en représentant l'objet correspondant à ce concept [...] sur le papier dans l'intuition empirique », je le fais « sans en avoir tiré le modèle de quelque expérience » et « la figure particulière [bien qu'] empirique [...] sert à exprimer le concept sans nuire à son universalité, parce que, dans cette intuition empirique, on ne songe jamais qu'à l'acte de la construction du concept, auquel beaucoup de déterminations sont tout à fait indifférentes, comme celles de la grandeur, des côtés et des angles, et que l'on fait abstraction de ces différences qui ne changent pas le concept du triangle. » (*Critique de la raison pure*, Méthodologie transcendantale, I,1).

étayer les spéculations⁵ kantienne, en quoi le fait de mettre en évidence des liens par exemple entre la conscience du temps et la cognition numérique pourrait-il bien constituer un argument en faveur du caractère *a priori* de la connaissance mathématique ?

Les difficultés d'une position de type kantienne ne s'arrêtent pas là. En asseyant la justification des vérités mathématiques sur les structures de l'expérience, Kant résout d'avance le problème de l'application des mathématiques : il n'y a pas à s'étonner que les lois de l'arithmétique et de la géométrie s'appliquent aux phénomènes situés dans le temps et dans l'espace, parce que l'arithmétique et la géométrie portent précisément sur les arrangements possibles des phénomènes dans le temps et dans l'espace. Mais Kant prouve trop. Kant prouve que la géométrie euclidienne s'applique à l'espace physique. Le développement ultérieur de la géométrie va amener à l'élaboration d'autres systèmes de géométrie, et le développement de la physique va amener à choisir d'autres géométries que la géométrie euclidienne pour décrire l'espace physique. Expliquer l'applicabilité de la géométrie, ce ne peut alors être expliquer que telle géométrie pure est en même temps nécessairement la géométrie de l'espace physique. Ce ne peut être qu'expliquer que les géométries pures fournissent aux physiciens les moyens de décrire la géométrie de l'espace physique. En gageant l'intuition mathématique sur une intuition des structures de l'expérience, en l'occurrence les formes de la sensibilité, Kant lie plus fortement qu'il ne paraît souhaitable de le faire les théories mathématiques pures et leurs applications.

1.3 La voie purement logique

Les apories de la stratégie kantienne invitent à reposer la question du rôle de l'intuition dans les démonstrations mathématiques en général, et notamment en arithmétique. Il est clair que l'intuition joue un rôle pédagogique. On explique à un enfant que deux et deux font quatre en lui faisant manipuler des bâtonnets. Mais est-on vraiment sûr que ce rôle pédagogique se double d'un rôle épistémique : les justifications des vérités arithmétiques ont-elles quelque chose à voir avec ce qui nous est donné par une forme quelconque d'intuition sensible ? Une raison pour répondre par la négative est la généralité absolue de l'arithmétique. Dans les termes de Frege, qui reprend un siècle après Kant le problème de la place de l'intuition dans les jugements arithmétiques, « les lois arithmétiques gouvernent le domaine du nombrable. C'est le plus vaste. Il inclut non seulement le réel, non seulement l'intuitif, mais tout le pensable. Ne faut-il pas de même que les lois des nombres

⁵ Nous parlons de « spéculation » au sens où la démarche transcendantale, qui consiste à remonter aux conditions de possibilité de l'expérience par un raisonnement lui-même purement *a priori*, n'est pas passée au crible des résultats de la psychologie. Cette objection à la démarche n'est certes pas un reproche à Kant, la psychologie n'étant pas une science alors constituée.

aient un lien très intime avec celles de la pensée ? » (1884, §14). Pour le dire autrement, si la validité de l'arithmétique est aussi générale que celle de la logique, ne faut-il pas envisager la possibilité que l'arithmétique ne découle que des lois générales de la pensée, c'est-à-dire que l'arithmétique ne soit rien d'autre que de la logique pure ?

Comment décider si oui ou non l'intuition intervient dans les preuves ? On ne pourra le faire que si l'on parvient à une analyse complète des démonstrations arithmétiques. Il faut développer un cadre dans lequel une démonstration n'apparaîtra comme achevée que si chaque axiome et chaque règle utilisés sont explicités, et il faut ensuite déterminer si les axiomes et les règles utilisés dans les preuves arithmétiques reposent sur l'intuition ou s'ils sont de nature purement logique. Dans le premier cas, il faudra revenir à une solution de type kantien ou de type empiriste. Dans le second cas, on aura montré que les vérités arithmétiques sont analytiques *a priori*, si les vérités logiques le sont.

Le programme que nous venons d'esquisser est celui de Frege, qui pense pouvoir ainsi réfuter le point de départ de la philosophie kantienne des mathématiques, à savoir le caractère synthétique des vérités arithmétiques. Pour mener son programme à bien, Frege entreprend d'explicitier, avec la plus grande rigueur formelle, les notions et les lois logiques. Afin de satisfaire cette exigence de rigueur, la nouvelle logique est développée pour un langage artificiel dont les notations ne doivent laisser aucune place au flou ou à l'ambiguïté. On peut alors préciser les objectifs poursuivis. Il s'agit d'abord de définir les notions arithmétiques uniquement à l'aide de notions logiques, et de montrer ensuite que les lois et les règles utilisées en arithmétique apparaissent, moyennant la traduction permise par les définitions données, comme des théorèmes de la logique, c'est-à-dire des énoncés démontrables uniquement à l'aide de lois et de règles logiques. La philosophie des mathématiques de Frege – on parle de logicisme, puisque la thèse centrale est la thèse que l'arithmétique n'est rien d'autre que la logique – débouche donc sur un travail de nature mathématique : il s'agit de montrer effectivement que l'arithmétique est réductible à la logique. Si la position logiciste de Frege est bien semblable à celle de Leibniz, cette seconde dimension fait toute l'originalité de Frege : alors que Leibniz se contentait de suggérer sur un exemple que les vérités arithmétiques étaient des vérités de raison, Frege entend démontrer que les vérités arithmétiques sont des vérités logiques en montrant que toutes les lois et les règles utilisées en arithmétique sont réductibles à des lois et à des règles purement logiques.⁶

⁶ Frege jette les bases de la nouvelle logique dans la *Begriffsschrift* (1879, tr. fr. *L'idéographie*, 1999). Le programme logiciste est présenté en détail dans les *Grundlagen der Arithmetik* (1884, tr. fr. *Les fondements de l'arithmétique*, 1969), et sa réalisation y est esquissée. La réalisation proprement dite de la réduction de l'arithmétique à la logique est l'objet des *Grundgesetze der Arithmetik* (vol. 1, 1893 et vol. 2, 1903).

Un exemple de règle typiquement arithmétique est la règle d'induction : pour montrer que tous les entiers possèdent une certaine propriété P (en notation logique, $\forall n P(n)$), il suffit de montrer que 0 possède la propriété P , et que si un entier quelconque n possède la propriété P , alors son successeur $n+1$ possède également cette propriété (en notation logique, $P(0) \& \forall n P(n) \rightarrow P(n+1)$). Le contenu de cette règle apparaîtra mieux si on la contraste avec la règle de logique de généralisation universelle, qui dit que pour montrer $\forall x P(x)$, il faut montrer $P(x)$ sans faire d'hypothèse sur x . La règle de généralisation universelle est, *prima facie* au moins, une règle purement logique, elle ne fait aucune hypothèse sur le genre d'objets dont il est question et vaut sans restriction. Mais il peut être très difficile de montrer $P(x)$ sans faire d'hypothèse sur x . La règle d'induction est plus facile à utiliser : il suffit de montrer qu'on a bien $P(0)$ et que l'on peut passer de $P(n)$ à $P(n+1)$. Toutefois, cette règle n'est pas, *prima facie* toujours, logique : on a envie de dire que si cette règle est valide, c'est à cause de la structure des entiers, parce que tout entier est soit zéro, soit peut être atteint à partir de zéro en appliquant un nombre suffisant de fois l'opération $+1$. Le tour de force de Frege consiste à donner une définition des nombres entiers qui fait apparaître le principe d'induction comme un théorème logique, et non pas comme un principe reposant sur d'autres bases que la logique (par exemple sur notre intuition de la structure des entiers).

Qu'advient-il de l'entreprise de Frege ? En 1902, alors que le deuxième tome des *Grundgesetze*, qui doit parachever la réduction logiciste, est sous presse, Frege reçoit une lettre de Russell qui l'informe de ce que le système logique qu'il a développé est incohérent. La faute à la tristement célèbre loi V : ce principe est en apparence une loi logique non-problématique, qui porte sur les rapports entre concepts et extensions de concept (les extensions de deux concepts F et G sont identiques si et seulement si tout objet qui tombe sous le concept F tombe sous le concept G et vice-versa). Elle permet à Frege de dériver le principe de Hume, qui dit que le nombre de F est égal au nombre des G si et seulement si tout objet qui tombe sous le concept F tombe sous le concept G et vice-versa, et le principe de Hume est à son tour mobilisé pour dériver l'arithmétique à partir du reste du système frégeen⁷. Mais la loi V mène aussi au pire. Elle implique un principe de compréhension non restreint : pour toute formule $\varphi(x)$, il existe un y tel que, pour tout x , $x \in y$ si et seulement si $\varphi(x)$. Considérons maintenant la formule $x \notin x$. Par le principe de compréhension, on a un y tel $x \in y$ si et seulement si $x \notin x$. Mais alors on a que $y \in y$ si et seulement si $y \notin y$. Contradiction.

Cet échec est celui du système logique développé par Frege. Le paradoxe de Russell montre

⁷ Les choses se passent mieux si l'on se passe de la loi V et qu'on utilise le principe de Hume comme un principe fondamental. Boolos (1986) a montré que l'on pouvait extraire du travail de Frege ce qu'on appelle le théorème de Frege, qui est une dérivation des axiomes de Peano pour l'arithmétique dans la logique du second ordre à partir du seul principe de Hume. Ce résultat marque le début du néo-logicisme, une possibilité pour ses partisans étant de soutenir que le principe de Hume est un principe logique.

que certains au moins des principes reconnus par Frege comme logiques doivent être abandonnés. Il ne montre pas que le projet logiciste en tant que tel est voué à l'échec. De fait, à la suite de la découverte du paradoxe, logiciens et mathématiciens vont développer de nouveaux systèmes destinés à bloquer le paradoxe tout en permettant de rendre compte de larges pans des mathématiques. C'est ainsi que sont élaborées la théorie des types de Russell, qui vise à bloquer le paradoxe en n'autorisant à considérer des formules de la forme $x \in y$ que si x et y sont de niveaux différents (ce qui n'est pas le cas lorsqu'on écrit $x \notin x$), et la théorie des ensembles de Zermelo, qui impose quant à elle des restrictions au principe de compréhension. Ces systèmes réussissent à offrir des cadres unifiés pour reconstruire les mathématiques, mais, au-delà de cette unification, la valeur épistémologique de cette reconstruction a cessé d'être claire. Certains des axiomes de ces théories, notamment l'axiome de l'infini aussi bien dans la théorie des ensembles que dans la théorie des types, ne semblent pas être des axiomes purement logiques (on voit mal à quel titre l'existence d'une infinité d'objets serait une loi purement logique).

La tentative kantienne pour sortir de l'opposition entre rationalisme et empirisme, la contestation logiciste du rôle accordé par Kant à l'intuition dans les preuves arithmétiques et enfin l'échec du logicisme classique constituent trois étapes qui déterminent la forme que va prendre la philosophie des mathématiques au XX^e siècle. Premièrement est apparue comme centrale la question (contestée) de l'intuition mathématique, s'agissant à la fois de faire droit à la pratique mathématique qui s'en réclame et de la difficulté qu'il y a à théoriser l'intuition formelle qui serait en jeu. Deuxièmement, et à l'inverse, s'est imposé le rôle (contesté lui aussi) de la logique s'agissant à la fois de formuler et d'établir des thèses en philosophie des mathématiques. Enfin, la crise des fondements qui suit de la découverte du paradoxe de Russell détermine l'orientation fondationaliste⁸ des programmes qui vont suivre.

2 Finitisme et intuitionnisme, deux programmes antiréalistes

2.1 La question de la cohérence

Le paradoxe de Russell énoncé ci-dessus montre que des principes intuitivement raisonnables peuvent conduire à des contradictions, à savoir à des situations dans lesquelles on peut prouver à la fois quelque chose et son contraire, ce qui est bien sûr ennuyeux, puisqu'à partir d'une

⁸ Par « orientation fondationaliste », nous entendons le fait de chercher à garantir la solidité de l'édifice des mathématiques, en particulier sa cohérence.

absurdité comme *A et Non-A* tout peut être démontré (principe *ex falso quodlibet*). On voudrait donc mettre au point des théories mathématiques dont on soit *certain* qu'elles ne sont pas contradictoires, c'est-à-dire des théories dont on puisse prouver qu'on ne peut pas y prouver à la fois une proposition et sa négation. La notion de preuve étend ici son domaine d'application: on va vouloir prouver, non seulement des propositions mathématiques du type $7+5=12$ (ou de plus difficiles ...), mais également des propositions « méta-mathématiques » du type « Dans la théorie arithmétique *T* on ne peut pas prouver que $0=1$ ». Comment s'y prendre ? Pour prouver qu'une proposition peut être prouvée, il suffit de la prouver, mais pour prouver qu'elle ne peut pas l'être, il ne suffit pas de ne pas la prouver !

On est ici dans une variété de difficulté mathématique très anciennement attestée, qu'on pense au problème « délien » (comment doubler le temple cubique d'Apollon dans l'île de Délos ?), au problème de la trisection de l'angle ou à celui de la quadrature du cercle. Aucun de ces problèmes n'a de solution à la règle et au compas, mais la *preuve* de cette impossibilité a demandé largement deux millénaires, le temps que l'on parvienne à caractériser algébriquement l'ensemble des points constructibles à la règle et au compas (Wantzel, 1837). Une autre impossibilité de grande influence concerne l'histoire des géométries non-euclidiennes : celle de prouver le cinquième postulat d'Euclide (« par un point donné dans le plan, passe au plus une parallèle à une droite donnée »). On avait, au XIXème, établi cette impossibilité en montrant qu'une certaine interprétation des termes primitifs de la géométrie transforme les théorèmes de la géométrie hyperbolique en théorèmes de la géométrie *euclidienne* : prenant comme univers un disque ouvert du plan euclidien, essayez d'entendre par « droites » les cordes de ce disque, et vous constaterez que les axiomes de la géométrie hyperbolique se démontrent dans la géométrie euclidienne du plan (Beltrami, 1868). Si d'aventure la géométrie hyperbolique était incohérente, c'est-à-dire prouvait à la fois *A* et *Non-A* pour un certain *A*, c'est que la réinterprétation à la Beltrami de ces deux propositions donnerait deux théorèmes contradictoires de la géométrie euclidienne : en résumé, si la géométrie euclidienne est cohérente, la géométrie hyperbolique l'est aussi, ce qui met fin à toute tentative pour prouver le cinquième postulat à partir des autres. Pour obtenir ce genre de résultat, il faut évidemment mettre de côté la signification usuelle ou intuitive des termes primitifs, et considérer que *toutes* les interprétations de ces termes sont légitimes, pour autant qu'elles satisfont les axiomes pertinents. Une droite, en bref, n'est rien d'autre qu'un objet satisfaisant les axiomes de la géométrie. Ou plutôt, puisque ces axiomes font intervenir à la fois les notions de droite, de point, etc., simultanément, de façon « holistique », une interprétation légitime de l'ensemble < droites, points, etc. > n'est rien d'autre qu'une association collective, à ces notions, de référents qui satisfont les axiomes qu'on a en vue. C'est ce que Hilbert exprimait dans sa boutade célèbre: « au lieu de parler

de points, de droites et de plans, on pourrait parler de tables, de chaises et de verres à bière ».

Il y a là la résolution, au profit de la seule *forme* du langage mathématique, d'une tension entre l'aspect *référentiel* et l'aspect *inférentiel* des mathématiques, tension que M. Pasch (1882, p. 98) avait formulé de la façon suivante quelques années auparavant: « Si la géométrie doit être vraiment déductive, alors le processus d'inférence doit toujours être indépendant du sens des concepts géométriques, exactement comme il doit être indépendant des figures. (...) Dans le courant d'une déduction, il est certainement légitime et utile, mais *en aucune façon nécessaire*, de penser à la référence des concepts impliqués. Bien plus, s'il est nécessaire d'y penser, alors c'est un signe de l'inadéquation de la déduction, et même de l'insuffisance de la méthode de preuve dans le cas où les trous qui y demeurent ne peuvent pas être comblés par une modification du raisonnement ».

Autrement dit, la signification « privée » associée par le mathématicien à l'usage de ses termes ne doit avoir aucune incidence décisive sur les preuves: une preuve n'en est réellement une que si elle est capable d'emporter l'assentiment de quelqu'un qui associerait à ces termes une signification entièrement différente. La notion de preuve doit donc être, dirait-on aujourd'hui, « décidable » : la question de savoir si une suite d'écritures est ou non une preuve doit être alignée sur la question de savoir si une carte Navigo est ou non valide, c'est-à-dire doit pouvoir être tranchée *mécaniquement*, en temps fini, et par des procédures élémentaires ne demandant aucune capacité herméneutique relative à la signification des mots qui y figurent. Comme le remarque en effet A. Church (1956, p. 53 sq), s'il ne s'agissait pas d'une simple affaire de *routine* que de décider si une suite d'énoncés est ou non conforme aux règles de démonstration, alors c'est le tout le contrôle des assertions dans la communauté des mathématiciens qui deviendrait une tâche impossible, puisque la possibilité demeurerait ouverte, à chaque instant et à chacun, de déclarer qu'il n'est pas convaincu par une preuve.

On parvient ainsi à une position « formaliste », qui possède elle-même plusieurs variantes. Dans une version minimale, le formalisme consiste, pour ainsi dire, à *mettre entre parenthèses* le sens « attendu » des symboles dans la vérification des preuves; dans un sens fort, il revient à la thèse selon laquelle les mathématiques *sont* en réalité un jeu formel avec des formules dénuées de signification, jeu en tout point comparable, par exemple, aux échecs (les transitions de formule à formule conformes aux règles d'inférence sont alors assimilables aux mouvements « légaux » des pièces sur l'échiquier).

Naturellement, on peut être formaliste à l'égard de certaines parties des mathématiques et pas à l'égard d'autres, si l'on a à l'esprit une manière d'opposition entre des mathématiques « sérieuses », dotées d'un contenu intuitif, et des mathématiques plus spéculatives et risquées, où

l'intuition perd toute possibilité de contrôle (on pense dans ce dernier domaine, à ce qui peut être dit de la théorie cantorienne des cardinaux transfinis, dans laquelle il est douteux que le contrôle intuitif puisse s'exercer). De fait, c'est le genre de formalisme partiel (quoique *fort* au sens précédent) que Hilbert a défendu, en réservant la dignité de mathématiques *pourvues de contenu* à la seule arithmétique élémentaire. Dans une perspective formaliste ainsi caractérisée, il n'est pas question d'attendre des mathématiques « transcendantales » qu'elles soient *vraies* en un sens substantiel, c'est-à-dire que leurs énoncés décrivent adéquatement les propriétés d'un domaine d'objets idéal *sui generis*. On exigera simplement d'elles qu'elles soient cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne conduisent à aucune contradiction.

Pour établir cette cohérence, la première chose à faire est de *formaliser* les théories, c'est-à-dire de les écrire dans un langage formel strictement défini et de spécifier dans ce langage les axiomes et les règles d'inférence. Pour un exemple simple des preuves de cohérence qu'on est en droit d'espérer, considérons par exemple la théorie T dont le langage a pour formules toutes les suites finies de a et de b , qui comporte un seul axiome, ab , et une seule règle: de XY , tirer XYX (X et Y étant des formules quelconques). Dans T on prouve ab (c'est l'axiome !), abb (en appliquant la règle à ab), mais on ne peut pas prouver ba . La preuve de ce fait est aisée par récurrence ou « induction » (cf. ci-dessus) sur la longueur des preuves: l'unique axiome commence par a , et l'unique règle d'inférence ne change pas le début des formules auxquelles on l'applique. Toutes les formules prouvables commencent donc par a , si bien que ba ne peut pas avoir de preuve dans T . En somme, T est cohérente, puisqu'il y a au moins une formule, à savoir ba , qui n'y est pas démontrable !

On notera la différence entre cette preuve de cohérence et la preuve, évoquée plus haut, de la cohérence de la géométrie hyperbolique (GH). Cette dernière consistait à établir que, si une formule A est prouvable dans GH , alors la proposition $A^{(B)}$ qui en découle dans l'interprétation de Beltrami est un théorème de la géométrie euclidienne (GE). Il s'agissait donc d'une simple preuve de cohérence *relative*, montrant que si GH est contradictoire, alors GE l'est aussi. La preuve de cohérence donnée pour T , quant à elle, n'est pas une preuve sémantique (on ne cherche pas à interpréter le langage de T) et elle semble fournir un résultat de cohérence « absolu », ne supposant la cohérence d'aucune autre théorie d'arrière-plan. Or, c'est visiblement le genre de résultat qu'on attend d'une entreprise de fondation des mathématiques : sous peine de régression à l'infini, on ne peut pas, dans cette optique, se contenter d'établir qu'une théorie donnée est cohérente à condition qu'une autre le soit aussi, et il faut donc bien que la cohérence d'une certaine théorie « ultime » soit prouvée de manière absolue, non sémantique.

Au titre de théorie « ultime », c'est bien entendu l'arithmétique qui s'impose. La géométrie,

via le système de coordonnées « cartésiennes » mis en place depuis le XVII^{ème} siècle, peut être considérée comme une théorie relative aux systèmes de nombres qui en paramètrent les points (en général, le système utilisé est celui des nombres réels). De leur côté, les nombres réels ont été, vers la fin du XIX^{ème} siècle, définis de diverses manières comme des ensembles de nombres rationnels, et les nombres rationnels eux-mêmes peuvent évidemment être construits comme des couples de nombres entiers. Dans ce contexte, souvent qualifié de « néo-pythagoricien » par référence à l'époque lointaine où les nombres entiers étaient considérés comme les éléments ultimes de l'ameublement du monde, c'est bien sûr l'arithmétique qu'il importe de fonder par une preuve de cohérence « absolue ». C'est la raison pour laquelle Hilbert a fait de la mise au point d'une preuve de cohérence pour l'arithmétique le deuxième des 23 problèmes qu'il a proposés aux mathématiciens lors du Congrès international tenu à la Sorbonne en août 1900.

Peut-on obtenir pour cette théorie une telle preuve, selon les lignes appliquées à la théorie *T* ci-dessus ? Hilbert s'y est essayé en 1904 au Congrès International de Mathématiques de Heidelberg, en écrivant les axiomes de l'arithmétique sous une forme telle que toutes les formules qui s'en démontrent possèdent une certaine propriété morphologique, l'« homogénéité », que ne possèdent pas leurs négations. Mais ceci donne-t-il vraiment une preuve « absolue » de la cohérence de l'arithmétique ? Comme l'a fait remarquer Poincaré dans son article de 1906 « Les mathématiques et la logique », la preuve proposée par Hilbert est entachée de circularité puisque le principe de récurrence, fondamental en arithmétique, y est utilisé pour établir la cohérence de l'arithmétique: on raisonne en effet par récurrence sur la longueur des démonstrations pour établir que la propriété d'homogénéité, qui est vérifiée par les axiomes (dont la preuve est de longueur 1) et qui est héréditaire par application des règles d'inférence (utilisées pour passer d'une preuve de longueur n à une preuve de longueur $n+1$), est donc satisfaite par tous les théorèmes, quelle que soit la longueur de leur preuve.

Hilbert en a pris acte en distinguant, vers 1920, entre deux parties des mathématiques, les mathématiques finitistes et les autres, la cohérence de la partie finitiste des mathématiques allant pour ainsi dire de soi.

2.2. Le finitisme

Dire ce qui est évident n'est pas évident. On aimerait échapper à la difficulté en disant que rien ne l'est, que les mathématiques sont une discipline absolument sans présupposés, et qu'elles doivent être reconstruites sur une base dépourvue de tout contenu. Par exemple, qu'elles sont les enfants de la logique, ce qui était, nous l'avons vu, l'opinion de Frege. Mais le problème, avec cette logique

supposément sans contenu, est double.

D'une part, une logique capable d'engendrer les mathématiques doit déjà en contenir un peu. Comme le disait Hilbert au congrès de Heidelberg (1904, p 131), « si nous observons attentivement les choses, nous réalisons que, dans l'exposé traditionnel des lois de la logique, certaines notions arithmétiques fondamentales sont déjà utilisées, comme la notion d'ensemble ou, dans une certaine mesure, celle de nombre ; donc, on tourne en rond, et c'est pourquoi il faut développer les lois de la logique et celles de l'arithmétique de façon en partie simultanée ».

D'autre part, et plus fondamentalement, le raisonnement logique lui-même suppose un contenu intuitif :

« La condition préalable de l'application des inférences logiques et de l'effectuation d'opérations logiques est l'existence d'un donné dans la perception: à savoir l'existence de certains objets concrets extra-logiques qui en tant que sensations immédiates précèdent toute pensée. Pour que l'on puisse se fier aux inférences logiques, ces objets doivent pouvoir être complètement parcourus dans toutes leurs parties, et la présence de ces parties, leurs différences, leur succession et leur concaténation doivent être immédiatement données avec ces objets eux-mêmes, de façon immédiate et intuitive, comme quelque chose qui ne peut ni ne doit être réduit à rien d'autre » (Hilbert (1925), p 228).

Les objets en question sont les symboles logico-mathématiques, parmi lesquels il convient d'abord de ranger les nombres entiers conçus comme de simples suites de barres: |, ||, |||, etc. On peut comparer les objets ||| et || et observer que dans le premier objet la barre | apparaît une fois de plus que dans le second, observation qui peut être consignée en écrivant « $3 > 2$ ». De même, l'observation que |||, concaténé avec ||, donne lieu au même objet que || concaténé avec ||| s'exprime en écrivant que $3+2 = 2+3$. Des assertions de ce type ne sont donc pas relatives à des objets abstraits, mais à des suites concrètes de | sur lesquelles peuvent être effectuées diverses opérations comme la concaténation ou l'ajout ou le retrait d'un élément. L'idée de Hilbert est que ces assertions sont tellement élémentaires qu'elles sont immédiatement justifiées. Leur maîtrise est présupposée par tout acte de communication, au point que celui qui en contesterait le principe devrait néanmoins y recourir pour formuler son objection, ne serait-ce parce qu'il devrait identifier comme étant du même type les occurrences de certains mots utilisés par lui-même et par son adversaire. Il s'agit en somme de reconnaître qu'un certain type de raisonnement élémentaire, combinatoire, relatif à des entités matérielles, est présupposé par les mathématiques elles-mêmes et, plus fondamentalement, par toute entreprise de pensée ou de communication rationnelle.

À cet égard, les formules mathématiques suivent le même régime que celui des nombres, et doivent être également considérées comme des objets concrets éventuellement constitués de parties (les symboles) capables d'apparaître à divers endroits et d'être ré-identifiées comme telles. Les compétences requises par leur étude syntaxique ou formelle sont également supposées par toute activité mathématique. C'est exactement ce qu'affirmera Bourbaki des années plus tard :

« Nous n'entrerons pas dans la discussion des problèmes psychologiques ou métaphysiques que soulève la validité de l'usage du langage courant en de telles circonstances (par exemple la possibilité de reconnaître qu'une lettre de l'alphabet est « la même » à deux endroits différents d'une page, etc.). Il n'est guère non plus possible d'entreprendre une telle description sans faire usage de la numération ; bien que de bons esprits aient pu sembler embarrassés de ce fait, jusqu'à y voir une pétition de principes, il est clair qu'en l'occurrence les chiffres ne sont utilisés que comme repères (que l'on pourrait d'ailleurs remplacer par d'autres signes tels que les couleurs ou les lettres), et qu'on ne fait aucun raisonnement mathématique lorsqu'on dénombre les signes qui figurent dans une formule explicitée. Nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner les principes du langage formalisé à des êtres dont le développement intellectuel n'irait pas jusqu'à savoir lire, écrire et compter. » (1956, E.1.9-10)

En bref, et c'est là une caractéristique essentielle du formalisme: « au commencement est le signe (*am Anfang ist das Zeichen*) » (Hilbert, 1922, p. 163). Naturellement, une discussion peut s'élever sur le caractère réellement « concret » des nombres ou des suites de symboles ainsi conçus. Comme le note en substance A. Müller (1923), si les inéquations sont arbitrées sur la seule base de la perception sensible, on devrait en effet affirmer que 3 est plus petit que 2 au vu de la comparaison

entre ||| et |||. Aussi les nombres devraient-ils plutôt être construits comme des « types » de suites de barres concrètes, c'est-à-dire comme des entités plus abstraites que ne le dit Hilbert, en somme comme des classes d'équivalences d'écritures équiiformes, indépendantes donc des aléas et des différences inessentiels dont leur réalisation empirique est inévitablement entachée. Néanmoins, l'essentiel est que les symboles numériques ne réfèrent pas à des objets idéaux, et que les formules mathématiques ne sont pas l'expression de pensées: les deux sont au contraire le matériau primaire

auquel s'applique l'activité mentale dotée de contenu.

Quelle est, au juste, l'extension de cette partie des mathématiques qui n'a pas besoin d'être « fondée » et d'ailleurs ne saurait l'être ? On peut y compter toutes les assertions du type $7+5=12$, les combinaisons booléennes (conjonctions, disjonctions, et négations) de ces assertions relatives à des nombres déterminés, mais également leurs *généralisations au moyen de variables*, étant entendu qu'un énoncé comme $a+b=b+a$ doit simplement être compris comme un schéma ou un prototype pour des assertions de même forme dans lesquelles a et b auront été remplacées par des nombres déterminés, la justification de tels énoncés généraux se réduisant à la capacité à justifier, par un raisonnement combinatoire intuitif, n'importe lequel de leurs cas particuliers numériques.

Comme l'écrivent Hilbert et Bernays (1934), le finitisme généralise les opérations de base (concaténation et effacement de symboles) aux opérations qui peuvent être définies par « récursion » à partir d'elles. Ainsi, à supposer que les deux fonctions f (à une variable) et g (à trois variables) sont admises du point de vue finitiste, le finitisme admettra la fonction h de deux variables définie comme suit (schéma de « récursion primitive »):

$$h(0,m) = f(m)$$

$$h(n+1,m) = g(n,m, h(n,m)),$$

Par exemple, si f est l'application constante égale à 0 définie par $f(m)=0$, et si $g(n,m, k) = m + k$, alors la nouvelle fonction h ainsi introduite est telle que $h(0,m)=0$, $h(1,m)=g(0,m,h(0,m))=0+h(0,m)=m$ et, de manière générale, $h(n,m)=nm$ (ceci établit que la multiplication est une opération finitiste). De la même façon, une propriété φ sera considérée comme finitiste si sa fonction caractéristique est finitiste au sens précédent. Ainsi, « être un nombre premier » est un concept finitiste, puisqu'il est aisé de montrer que l'opération qui à chaque nombre associe $|$ à ce nombre s'il est premier, et $||$ s'il ne l'est pas est une opération finitiste.

En somme, les mathématiques finitistes contiennent tous les énoncés du type $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$, où les variables x_1, \dots, x_n parcourent le domaine des entiers construits comme indiqué ci-dessus, ou n'importe quel autre domaine d'entités quasi-concrètes comme les formules d'un langage formalisé, et où φ est une propriété de telles entités dont la satisfaction ou le défaut puisse être vérifiés dans chaque cas particulier par un simple raisonnement combinatoire et mécanique. « 14 est un nombre pair », « l'addition est une opération associative » ($\forall x \forall y \forall z [x+(y+z) = (x+y)+z]$), « toute formule bien formée de la logique propositionnelle contient un nombre égal de parenthèses ouvrantes et de parenthèses fermantes » sont de tels énoncés finitistes, mais également nombre de propositions mathématiques nullement triviales, comme le « dernier théorème de Fermat » $\forall x \forall y \forall z \forall n [n > 2 \rightarrow x^n + y^n \neq z^n]$. Dans l'interprétation proposée par W. W. Tait (1981), ces caractéristiques recommandent que l'on considère le système APR (« arithmétique primitive

récursive ») mis au point par Skolem (1923) comme une formalisation appropriée du fragment finitiste de l'arithmétique (c'est aussi, en substance, le « Langage I » défini par Carnap (1937).

Il convient enfin de noter – ce trait, on le verra dans la sous-section suivante, est d'une importance stratégique pour le programme de Hilbert – que les notions « méta-mathématiques » fondamentales sont elles-mêmes de nature finitiste, ce qui est cohérent avec l'idée de fonder les mathématiques à l'aide de concepts et de méthodes supposément indiscutables. D'une part, les propriétés morphologiques de base (par exemple, la propriété d'être une formule bien formée d'un système formel donné) sont, de toute évidence, finitistes au sens précédent. D'autre part, et plus essentiellement, les propriétés « syntaxiques » le sont aussi. Au premier rang d'entre elles, la notion de preuve dans un système formel: la question de savoir si une suite de formules donnée $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ est ou non une preuve peut être arbitrée sur la seule base de considérations combinatoires (il suffit de vérifier, pour chacune de ces formules, qu'elle est un axiome du système du système considéré ou qu'elle résulte de formules qui la précèdent dans la liste $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ conformément aux règles d'inférence du système. En bref, « être une preuve » est, pour la suite de formules, une propriété de même statut que « être premier » pour les nombres. Bien plus, la notion même de cohérence est finitiste : dire que la théorie T est cohérente, c'est affirmer que, dans T , aucune preuve n'a « $0=1$ » pour formule finale, ce qui est évidemment, compte tenu de ce qui précède, une assertion finitiste.

Faut-il construire, pour ces mathématiques finitistes, une logique spécifique ? Hilbert a toujours affirmé que c'était vain, différant en cela des tenants de la variété « intuitionniste » d'anti-réalisme discutée dans la section suivante. La raison de cette vanité tient à l'*instabilité* caractéristique des énoncés finitistes. La conjonction de deux énoncés finitistes en est encore un, mais non pas leur négation. Certes, la négation des énoncés finitistes *atomiques* (exemple: « 14 est pair ») est encore finitiste, mais non la négation des *généralités* finitistes, puisque cette négation est un énoncé existentiel dont la justification peut excéder la portée d'un raisonnement combinatoire capable d'être mené à son terme en temps fini. Bien plus, un énoncé finitiste peut impliquer un énoncé qui ne l'est pas, comme c'est le cas avec les énoncés suivants :

$$(A) \quad \forall p [p \text{ est un nombre premier} \exists p' (p < p' \leq p! + 1 \text{ et } p' \text{ est un nombre premier})]$$

et

$$(B) \quad \forall p [p \text{ est un nombre premier} \exists p' (p < p' \text{ et } p' \text{ est un nombre premier})]$$

(A), qui est le fameux théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers, est un énoncé

finitiste : un nombre premier p étant proposé, sa justification consiste à tester successivement, jusqu'à ce que l'on trouve éventuellement parmi eux un nombre premier, tous les entiers n supérieurs à p et inférieurs à $p!+1$ (le point important est ici que le quantificateur existentiel, borné, n'est qu'une manière abrégée d'écrire une longue disjonction). En revanche, (B), pourtant impliqué par (A), n'est pas un énoncé finitiste, puisque la tâche de sa justification n'est pas bornée et que sa réalisation pourrait donc se poursuivre sans limite au cas où l'énoncé serait faux.

C'est la raison pour laquelle Hilbert propose d'ajouter aux énoncés finitistes (encore appelés « réels ») les énoncés qui ne le sont pas (les énoncés « idéaux »), afin d'obtenir un ensemble d'énoncés laissé stable par les lois de la logique classique. Les conséquences ou les négations des énoncés finitistes pourront ne pas être finitistes, mais elles seront, en revanche, évidemment contenues dans le domaine contenant et les énoncés finitistes et les énoncés idéaux. La démarche qui introduit les énoncés idéaux, et qui leur accorde ainsi une manière de légitimité, est donc tout à fait comparable à celle qui motive, en géométrie projective, l'introduction de « points idéaux » à côté des points usuels du plan euclidien. En géométrie projective, il s'agit essentiellement par là d'accroître la généralité et la continuité des lois, un énoncé comme « toute paire de droite distinctes se coupent en un unique point » ne souffrant plus aucune exception, puisque l'anomalie apparente des droites parallèles est réglée en stipulant que deux telles droites se rencontrent « à l'infini ». De même, les « nombres imaginaires » sont introduits en algèbre pour en finir avec les exceptions au principe selon lequel une équation de degré n possède exactement n racines (on étend ainsi le corps des nombres réels en un corps de nombres qui soit « algébriquement clos »). Cette comparaison avec les éléments idéaux de l'algèbre ou de la géométrie donne la clef de la perspective hilbertienne sur les énoncés de la partie non finitiste des mathématiques. Il ne s'agira pas de leur « donner un sens » (comme l'écrit Hilbert, « les propositions idéales n'ont en elles-mêmes aucune signification », 1925, p. 216) ou de les considérer comme décrivant un domaine d'entités abstraites *sui generis*, mais de les introduire pour des raisons de pure commodité ou de simplicité. En bref, les énoncés idéaux sont introduits pour des raisons *instrumentales* : l'admission de ces énoncés idéaux est le moyen trouvé par Hilbert (1925) pour définir une zone mathématique constructive, indiscutable et hors de doute (la zone finitiste) sans pour autant renoncer à la puissance de la logique classique, ce qui serait, dit-il, comme priver un boxeur de ses gants ou un astronome de son télescope.

Mais il ne suffit pas aux concepts de point à l'infini, de nombre imaginaire, ou d'énoncé idéal de s'avérer utiles. Encore faut-il établir leur innocuité, c'est-à-dire s'assurer que leur admission n'entraîne pas contradiction: « il y a une condition, une seule, mais absolument nécessaire, à l'utilisation de la méthode des éléments idéaux, à savoir la donnée d'une *preuve de*

cohérence ; l'extension par addition d'éléments idéaux n'est légitime que pour autant qu'aucune contradiction ne soit apportée par là dans le domaine ancien, restreint » (Hilbert (1925), p. 218). Compte tenu du caractère finitiste de la notion de cohérence, et de la thèse, longtemps défendue par Hilbert comme allant presque de soi, selon laquelle les assertions finitistes vraies doivent pouvoir être établies par des méthodes finitistes, ceci laisse entrevoir l'une des formes fondamentales du programme fondationnel de Hilbert : donner une preuve finitiste de la cohérence de l'arithmétique.

2.3. Conservativité et cohérence

Fonder les mathématiques, on l'a vu, peut signifier la délimitation d'une strate indiscutable, élémentaire, auto-fondée, sur la base de laquelle la cohérence de l'ensemble des mathématiques pourrait être établie.

Il existe néanmoins une autre acception de l'entreprise fondationnelle, très anciennement attestée, qui repose sur l'idéal de *stabilité épistémique*. En bref, l'idée est que, pour qu'une certaine strate de l'édifice mathématique puisse être tenue pour fondamentale, il faut que la totalité des problèmes qui la concernent puissent être résolus en n'utilisant que des concepts et des méthodes relevant de *cette* strate. Il serait en effet insolite de qualifier de fondamental un domaine dont les propriétés ne pourraient être établies qu'en recourant à des considérations extrinsèques, ou en introduisant des objets ou des propriétés d'un autre ordre.

Historiquement, le premier avatar de l'idée de stabilité épistémique est probablement le principe de « pureté des méthodes » présent dans les mathématiques grecques et classiques. Selon cet idéal méthodologique, il existe une stratification naturelle « bien fondée » (sans chaîne infinie décroissante, c'est-à-dire possédant une première couche précédée par aucune autre) dans laquelle les entités mathématiques viennent s'ordonner par rang de complexité croissante et, dans la justification d'une proposition mettant en jeu des concepts de degré donné ne devraient pas figurer de concepts de degré plus élevé. En d'autres termes, le principe de pureté institue une limitation de la classe des notions recevables dans une preuve. Une preuve mathématique n'est pas seulement une disposition d'arguments capable d'emporter la conviction rationnelle de la vérité de sa conclusion: elle ne doit pas *faire feu de tout bois*, mais au contraire ne faire appel qu'à des notions d'un genre *approprié* à sa conclusion. De toute évidence, elle doit au moins mentionner les notions mentionnées dans l'énoncé de la proposition prouvée, mais elle ne devrait contenir que celles-là, ou celles d'un genre apparenté. La tradition mathématique s'est presque unanimement accordée pour dénoncer les preuves qui enfreignent ce précepte en faisant appel à des notions inutilement élevées dans la hiérarchie.

Ainsi, Pappus condamnait Archimède, mathématicien impur par excellence, dans les termes suivants :

« Il semble qu'il n'y a pas une faute légère chez les géomètres qui découvrent la solution d'un problème au moyen de courbes coniques ou de sections linéaires ou, en général, le résolvent par des moyens d'un genre étranger (εξ ανοικειου γενουσ), comme c'est le cas pour Archimède qui assume dans son livre *Des Spirales* une inclinaison solide alors qu'il parle du cercle, car il est possible de prouver le théorème établi par Archimède sans recourir à quoi que ce soit de solide » (Pappus, p. 270, l. 28-33)

De même, Fermat jette au XVIIème siècle un anathème semblable sur Descartes, en écrivant que ce dernier

« offense la pure géométrie en prenant pour résoudre un problème des courbes qui sont trop complexes et de trop haut degré, et en ignorant des courbes plus simples et plus appropriées. Car (...) ce n'est pas un mince péché en géométrie de résoudre un problème par des moyens impropres (*ex improprio genere*) » (Fermat, 1643, p. 118).

Existe-t-il un domaine élémentaire des mathématiques dont on soit certain qu'il est épistémiquement stable au sens précédent ? La délimitation grecque (est élémentaire la géométrie dont s'occupe les *Éléments* d'Euclide, c'est-à-dire celle qui a trait aux figures constructibles à la règle et au compas, à l'exclusion donc des sections coniques et des constructions « mécaniques ») ne répond pas à la condition : ainsi qu'on l'a expliqué plus haut, le problème de la quadrature du cercle, dont l'énoncé est élémentaire (trouver un carré de surface identique à celle d'un cercle donné), ne peut être résolu à la règle et au compas. Hilbert a manifestement cru trouver, dans la partie finitiste des mathématiques, un tel domaine élémentaire épistémiquement stable, et son programme de recherche visait justement à *prouver* qu'il en allait bien ainsi. Pour établir ceci, il faut donc montrer que, si un énoncé idéal intervient dans la preuve d'un énoncé réel, alors il existe, du même énoncé, une preuve qui ne contient plus l'énoncé idéal en question.

On a aujourd'hui coutume de formuler cette propriété en utilisant la notion de *conservativité*. Une théorie T étant donnée, ainsi qu'une théorie T' qui est une extension de la première (le langage $L(T)$ de T est une partie du langage $L(T')$ de T' , et tout théorème de T étant un théorème de T'), on dit que T' est une *extension conservative de T* (ou simplement qu'elle est *conservative sur T*) si toute formule de $L(T)$ qui se démontre dans T' se démontre déjà dans T . En

d'autres termes, T' permettra certainement de démontrer plus de théorèmes que n'en démontre T , puisqu'elle en est une extension, mais elle ne sera qualifiée de conservative que si elle ne démontre pas de nouvelles formules de $L(T)$, que T pour sa part ne démontre pas. On retrouve ici la notion de stabilité épistémique : une théorie est épistémiquement stable si elle ne possède que des extensions conservatives, c'est-à-dire si toute preuve d'un énoncé du langage de cette théorie peut être purifiée, c'est-à-dire conduite dans cette théorie elle-même, sans aucune adjonction d'éléments « d'un genre étranger ». Dans ce vocabulaire, le programme de Hilbert, dans sa version formulée en termes de conservativité, affirme que l'ensemble des mathématiques {énoncés finitistes + énoncés idéaux} est une extension conservative de sa partie finitiste.

Il est remarquable que les deux versions du programme de Hilbert (celle qui fait référence à la cohérence, celle qui se réfère à la conservativité) sont équivalentes.

a) Supposons d'abord qu'il existe une preuve finitiste de la cohérence de l'arithmétique, et soit $\forall x \varphi(x)$ un énoncé finitiste possédant une preuve transcendante (c'est-à-dire une preuve n'utilisant pas que des méthodes finitistes). Alors, cet énoncé est correct. Car, s'il ne l'était pas, il existerait un entier a tel que $\varphi(a)$ soit faux, c'est-à-dire tel que $\neg\varphi(a)$ soit vrai. Or un tel énoncé finitiste, sans quantificateur, est évidemment prouvable lorsqu'il est vrai. On aurait donc une contradiction dans l'arithmétique, puisqu'on pourrait y prouver à la fois $\forall x \varphi(x)$ et $\neg\varphi(a)$. Ceci est incompatible avec la cohérence de l'arithmétique, dont on peut, par hypothèse, donner une preuve finitiste. Le raisonnement qui précède, et dont la pièce centrale est la preuve finitiste de la cohérence de l'arithmétique, est bien une preuve finitiste de $\forall x \varphi(x)$. Un énoncé finitiste doté d'une preuve quelconque possède donc une preuve finitiste, ce qu'il fallait démontrer.

b) Dans la direction inverse, supposons que l'arithmétique tout entière est une extension conservative de sa partie finitiste, et montrons qu'il existe une preuve finitiste de la cohérence de l'arithmétique. L'argument central tient au caractère finitiste de la *notion* même de cohérence. Dire qu'une théorie arithmétique T est cohérente, c'est dire en effet qu'on ne peut pas y prouver que $0=1$, c'est-à-dire qu'aucune suite de symboles σ n'est une preuve de « $0=1$ » dans T . De toute évidence, cette dernière assertion est finitiste (c'est une affirmation universelle attribuant une propriété décidable à des assemblages de symboles). En conséquence, si la cohérence de l'arithmétique avait une preuve quelconque, elle aurait une preuve finitiste (c'est l'hypothèse de conservativité). Or il existe une preuve sémantique (triviale) de la cohérence de l'arithmétique de Peano: tous les axiomes y sont vrais (par exemple, il ne fait aucun doute que zéro n'a pas de prédécesseur !), toutes les règles d'inférence conduisent du vrai au vrai et donc (par récurrence) tous les théorèmes y sont vrais, si bien que $0=1$, qui est faux, ne peut pas être un théorème de cette arithmétique. La « finitisation » de cette preuve sémantique, possible d'après l'hypothèse de conservativité des

mathématiques sur leur partie finitiste, est bien la preuve finitiste que l'on recherche pour la cohérence de l'arithmétique.

2.4. L'impact des résultats d'incomplétude de Gödel

Un coup sévère au programme de Hilbert est porté par les théorèmes d'incomplétude de Gödel (1931), théorèmes qui sont sans doute, à juste titre, les théorèmes les plus célèbres de la logique. Voyons de plus près le contenu de ces théorèmes, et d'abord celui du premier théorème d'incomplétude. Gödel montre que toute théorie décente pour l'arithmétique est incomplète. Qu'est-ce qu'une théorie *décente* ? Une théorie décente est premièrement une théorie cohérente. Un système d'axiomes qui permettrait de démontrer n'importe quel énoncé, y compris donc $0 = 1$ serait de peu d'utilité. Deuxièmement, une théorie décente est telle qu'il est possible d'énumérer les axiomes de cette théorie (on dit qu'elle est *récurivement énumérable*). À nouveau, une théorie telle qu'on n'aurait pas de moyen systématique pour engendrer les axiomes de cette théorie serait de peu d'utilité. En outre, si cette contrainte n'est pas satisfaite, la propriété d'être une preuve relativement à cette théorie ne sera pas décidable (voir *supra* la section 2.1 sur la décidabilité des preuves). Qu'est-ce qu'être une théorie décente *pour l'arithmétique* ? On demande seulement que la théorie permette de dériver au moins un certain nombre de vérités arithmétiques élémentaires, ou, pour être plus précis, on demande que la théorie soit au moins aussi forte que l'arithmétique élémentaire⁹. Qu'est-ce enfin qu'une théorie *complète* ? C'est une théorie qui permet, pour tout énoncé du langage de cette théorie, soit de démontrer cet énoncé, soit de démontrer sa négation¹⁰. Comment Gödel parvient-il à montrer que toute théorie T qui est cohérente et récurivement énumérable est incomplète ? La démonstration repose sur la possibilité de coder dans l'arithmétique la notion de preuve dans T (ce qui est possible si T est au moins aussi forte que l'arithmétique élémentaire). On peut construire un énoncé G_T , appelé énoncé de Gödel de T , qui, relativement à ce codage, dit de lui-même qu'il n'est pas prouvable dans T . On montre alors que G_T , qui est un énoncé arithmétique, n'est pas prouvable dans T , sous peine d'incohérence. Puisque G_T dit de lui-même qu'il n'est pas prouvable dans T et puisqu'il n'est effectivement pas prouvable dans T , G_T est un théorème arithmétique vrai qui n'est pas prouvable dans T .

⁹ Les axiomes de l'arithmétique élémentaire sont au nombre de sept. Les trois premiers axiomes portent sur la fonction successeur : 0 n'est le successeur d'aucun nombre, tout nombre différent de 0 est le successeur d'un autre nombre et si deux nombres ont le même successeur, ils sont égaux. À cela s'ajoutent deux axiomes donnant la définition réursive de l'addition et deux axiomes donnant la définition réursive de la multiplication. Le schéma d'induction n'est pas inclus.

¹⁰ Si l'on considère que les énoncés arithmétiques sont soit vrais soit faux, alors une théorie axiomatique visant à permettre de dériver comme théorèmes tous les énoncés arithmétiques vrais devrait être complète. Ce point de vue n'est pas celui de Hilbert, pour qui seuls les énoncés finitistes ont un sens.

Le théorème de Gödel vaut par sa généralité. Ce n'est pas seulement que telle ou telle théorie pour l'arithmétique, par exemple l'axiomatique de Peano, n'est pas complète, auquel cas on pourrait penser qu'il suffit de trouver de nouveaux axiomes à ajouter à la théorie pour la rendre complète. C'est toute théorie cohérente, récursivement énumérable et contenant l'arithmétique élémentaire qui est incomplète. L'ajout de nouveaux axiomes ne saurait donc résoudre le problème. Le premier théorème d'incomplétude établit ainsi les limites des méthodes formelles.

Pourquoi le programme de Hilbert est-il mis à mal par ce résultat ? C'est la version « conservativité » qui est en cause. Il n'y aurait pas eu de problème si seuls les énoncés idéaux avaient été concernés par l'incomplétude. Mais ce n'est pas le cas ; G_T est un énoncé finitiste (le codage est tel que la propriété d'être une preuve dans T est primitive récursive au sens vu plus haut). G_T est alors un exemple d'énoncé finitiste qui n'est pas prouvable par les méthodes finitistes (pour autant que ces méthodes finitistes sont couvertes par l'arithmétique élémentaire) mais qui est prouvable dans une théorie non finitiste (celle qu'on utiliserait pour dériver formellement le résultat selon lequel G_T est vrai mais pas prouvable).

Le second théorème d'incomplétude¹¹ se présente quant à lui comme une réfutation du programme de Hilbert dans la version qui porte sur la cohérence de l'arithmétique. Sur la base du codage, on peut construire un énoncé arithmétique $Coh(T)$ qui exprime la cohérence de la théorie T . Gödel montre que $Coh(T)$ n'est ni prouvable, ni réfutable dans T . Pour prouver la cohérence d'une théorie arithmétique T , il est nécessaire d'utiliser une théorie strictement plus forte que la théorie en question, et donc en particulier plus forte que l'arithmétique finitiste à partir du moment où T contient l'arithmétique finitiste. Le projet consistant à apporter une preuve finitiste de la cohérence de l'arithmétique afin de valider l'utilisation de méthodes non finitistes doit donc être abandonné.

Faut-il conclure que le programme de Hilbert est définitivement réfuté par les deux théorèmes d'incomplétude ? Tout d'abord, il est possible de continuer à en envisager des réalisations partielles. Fixons une certaine interprétation de ce que sont les mathématiques non-finitistes, disons l'arithmétique primitive récursive, et de ce que sont les mathématiques infinitistes, disons l'arithmétique du second ordre (un système suffisamment riche pour développer l'analyse). Simpson (1988) pose la question de savoir quelle portion des mathématiques infinitistes peut être développée à l'intérieur de sous-systèmes de l'arithmétique du second ordre qui sont conservatifs sur l'arithmétique primitive récursive relativement aux énoncés finitistes. Par exemple, Friedman (1976) montre un résultat de ce genre pour WKL_0 , un sous-système de l'arithmétique du second

¹¹ Les hypothèses figurant dans le second théorème d'incomplétude sont plus fortes que celles utilisées dans le premier théorème. En particulier, il faut que le prédicat « être prouvable dans T » est bien un prédicat de prouvabilité au sens de Löb (1955).

ordre dans lequel le schéma d'induction est restreint¹². WKL_0 permet de prouver significativement plus que l'arithmétique primitive récursive mais est conservative sur l'arithmétique récursive relativement aux énoncés finitistes¹³.

Il est également possible de contester, dans ce contexte, la portée du théorème de Gödel, soit en soutenant que l'interprétation qui est faite des méthodes finitistes est trop restrictive, soit en contestant l'interprétation qui est faite du programme de Hilbert. Sur le premier point, Ackermann donne en 1940 une démonstration de la cohérence de l'arithmétique, qui repose sur une induction transfinie¹⁴. Une telle démonstration compte-t-elle comme démonstration de cohérence par des moyens finitistes ? Ackermann ne se prononce pas, mais il souligne que les fonctions utilisées dans sa démonstration, même si elles ne sont pas le genre de fonctions récursives habituellement utilisées dans les méthodes finitistes (en particulier, elles ne sont pas primitives récursives) « méritent bien leur nom de fonction récursive » dans la mesure où pour chaque nombre particulier qui leur est donné comme argument, elles fournissent une valeur au bout d'un nombre fini d'étapes de calcul. Gödel propose lui-même d'étendre les méthodes finitistes en ajoutant aux fonctions primitives récursives usuelles des fonctions d'ordre supérieur (1958). Sur le second point, Detlefsen (1990) a par exemple contesté l'interprétation en termes de conservativité du programme de Hilbert. Pour Detlefsen, seule une contrainte de conservativité affaiblie, selon laquelle tout énoncé finitiste qui est décidé dans les mathématiques finitistes, doit être tel que, s'il est prouvable dans les mathématiques non-finitistes, il est déjà prouvable par des méthodes finitistes¹⁵.

2.5 L'intuitionnisme

L'objectif de la philosophie des mathématiques est de donner une représentation fidèle et cognitivement plausible des trois éléments qui sont au cœur des mathématiques, premièrement, les objets auxquels se réfèrent le mathématicien, deuxièmement les formules qu'il utilise, troisièmement, l'activité mentale qui est la sienne. Mettre en avant les objets mathématiques pose des problèmes ontologiques (de quel genre d'objets s'agit-il ?) et épistémologiques (comment y avons-nous accès ?) évidents. Dès lors, il peut être tentant de ne pas hypostasier un domaine d'objets mathématiques jouissant d'une existence indépendante et d'expliquer ce que sont les mathématiques en faisant uniquement fond sur le langage des mathématiques ou sur l'activité du

¹² Le schéma d'induction est restreint aux formules Σ^0_1 .

¹³ Si l'on identifie les énoncés finitistes de l'arithmétique avec les énoncés Π^0_1 .

¹⁴ La première preuve de cohérence est donnée par Gentzen (1936).

¹⁵ Detlefsen critique également l'interprétation qui est faite du second théorème d'incomplétude en relation avec le programme de Hilbert. En particulier, il soutient que les hypothèses utilisées, qui sont plus fortes que pour le premier théorème, n'excluent pas l'existence de systèmes de preuves « intéressants » permettant de garantir la cohérence.

mathématicien. Le formalisme, que nous avons présenté en détail à travers le programme de Hilbert, est une tentative de ce genre, centrée sur le langage des mathématiques. L'intuitionnisme, que nous allons présenter plus brièvement, constitue une autre tentative, centrée elle sur les opérations mentales du mathématicien.

L'intuitionnisme est, comme le finitisme, un programme à l'intersection des mathématiques et de la philosophie des mathématiques. Issu de la crise des fondements, il est né des travaux de Brouwer au début du XXème siècle. A l'opposé de toute approche formaliste, l'intuitionnisme affirme la prévalence de la pensée sur le langage :

« Les preuves mathématiques mentales, qui contiennent en général une infinité de termes, ne doivent pas être confondues avec leurs corrélats linguistiques, lesquels sont finis et nécessairement inadéquats, et n'appartiennent donc pas aux mathématiques. » (Brouwer, 1927)

Les mathématiques ne sont pas envisagées comme une théorie, dont les objets pourraient être cherchés à l'extérieur d'elle-même, ou dont la formulation linguistique pourrait être étudiée pour elle-même, mais comme une activité¹⁶. Cette activité consiste dans les constructions effectuées par le mathématicien. La vérité des énoncés mathématiques ne dépend pas d'un domaine d'objets indépendants mais de ces constructions. Dire qu'un énoncé arithmétique est vrai c'est dire qu'il est possible d'effectuer certaines constructions, ou que certaines constructions donnent tel résultat.

« Un intuitionniste rend compte de la vérité de $2+2 = 4$ en disant que si l'on construit 2, et à nouveau 2, et que l'on compare le résultat global à une construction de 4, on voit que ces constructions sont identiques. Cette construction ne fait pas qu'établir la vérité de la proposition $2+2 = 4$, il n'y a rien de plus dans la vérité de $2+2 = 4$ que cette construction » (van Dalen et van Atten, 2002).

Cette compréhension de l'activité mathématique a des conséquences quant à la reconnaissance de la légitimité ou de l'absence de légitimité des pratiques des mathématiciens. Heyting, l'élève de Brouwer, compare ainsi les définitions de deux nombres entiers k et l : k est défini comme le plus grand nombre premier tel que $k - 1$ est également premier, ou $k = 1$ s'il n'existe pas de tel nombre, l est défini comme le plus grand nombre premier tel que $l - 2$ est

¹⁶ « A strictement parler, la construction des mathématiques intuitives en elle-même est une action et pas une science. » (Brouwer, 1907).

également premier, ou $l = 1$ s'il n'existe pas de tel nombre (Heyting, 1956). Du point de vue des mathématiques classiques, ces deux définitions sont aussi bonnes l'une que l'autre. Du point de vue des mathématiques intuitionnistes, ce n'est pas le cas. La première définition est acceptable, car nous disposons d'une méthode pour calculer k (en calculant, on trouverait $k = 3$). La seconde définition n'est pas acceptable. On ne sait pas s'il y a ou non une infinité de nombres premiers jumeaux. Un intuitionniste rejette une définition d'un entier qui ne nous donne pas de moyen de construire cet entier.

Le rejet des méthodes classiques va bien au-delà de la question des définitions et affecte jusqu'aux principes logiques. Les intuitionnistes refusent la validité universelle des principes logiques classiques¹⁷. Dans le cas fini, où nous pouvons en principe examiner tous les objets pertinents, une disjonction comme $\forall x\phi x \vee \exists x\neg\phi x$ correspond à une alternative effectivement *décidable* : au terme d'une recherche systématique, ou bien l'on aura vérifié, à propos de chaque objet, qu'il est bien un ϕ , ou bien l'on aura mis la main sur un objet qui n'en est pas un. Mais il n'en va pas de même dans le cas infini. On peut très bien disposer d'une preuve $\neg\forall x\phi x$, qui montre que supposer que tous les objets du domaine considéré sont des ϕ conduit à une contradiction, sans pour autant disposer d'une preuve de $\exists x\neg\phi x$, preuve qui permettrait de construire un certain objet a dont on pourrait montrer qu'il n'est pas ϕ . Accepter la validité de $\forall x\phi x \vee \exists x\neg\phi x$ même pour les domaines infinis, ce serait s'autoriser à affirmer l'existence d'objets qu'on n'a pas construits (en inférant $\exists x\neg\phi x$ à partir de $\neg\forall x\phi x$). Mais si les objets mathématiques ne sont rien d'autre que le résultat de l'activité du mathématicien, ceci n'est pas légitime : toute démonstration d'un énoncé existentiel comme $\exists x\neg\phi x$ doit reposer sur une construction de l'objet qui témoigne de la correction de l'affirmation d'existence.

La logique intuitionniste, formalisée par Heyting (voir Heyting, 1956, chap. 7, pour une présentation), s'écarte de la logique classique, dont les principes sont typiquement justifiés par les conditions de vérité des énoncés¹⁸, en proposant des règles qui sont justifiées par des conditions de prouvabilité. Ce que doit être une preuve intuitionniste est défini en indiquant comment les opérations logiques doivent être interprétées, en termes de preuve. Donner une preuve de $\phi \vee \psi$ est défini comme le fait de donner une preuve de ϕ ou de donner une preuve de ψ . Donner une preuve de $\phi \rightarrow \psi$ est défini comme le fait de donner une construction capable de transformer toute preuve

¹⁷ Le rejet d'un principe comme le tiers-exclu ($A \vee \neg A$) n'équivaut pas à l'affirmation que ce principe conduit à des contradictions, puisqu'au contraire on accepte que la négation du tiers-exclu est contradictoire (voir Brouwer, 1908).

¹⁸ En logique classique, on peut montrer la validité du tiers-exclu en montrant que la définition donnée de la vérité des énoncés relativement à une interprétation garantit qu'un énoncé A est soit vrai soit faux, de sorte que dans tous les cas, on aura bien que $A \vee \neg A$ est vrai. La valeur épistémologique de ce genre de démonstration est problématique.

de ϕ en une preuve de ψ . La logique intuitionniste n'est rien d'autre que la logique qui résulte¹⁹ de cette interprétation, connue sous le nom d'interprétation BHK²⁰. D'un côté, elle ne valide pas les principes valides classiquement mais problématiques d'un point de vue intuitionniste, par exemple elle ne permet pas de dériver le tiers-exclu. D'un autre côté, elle possède les « bonnes » propriétés que l'on s'attend à trouver si toute affirmation à propos d'objets mathématiques doit être gagée sur la capacité à construire ces objets (ainsi la propriété de l'existence²¹, si $\exists x\phi x$ est démontrable, alors ϕa est également démontrable pour un certain a).

La thèse fondamentale de l'intuitionnisme est qu'à la base des mathématiques se trouvent des constructions mentales. Nous venons de voir, brièvement, comment cette thèse conduisait à un révisionnisme logique, et en quel sens la logique intuitionniste se laissait interpréter comme une logique des constructions. Mais que sont ces constructions mentales ? Premièrement, ces constructions mentales doivent être envisagées comme le produit d'un sujet idéal, et non pas comme des réalités psychologiques correspondant aux états mentaux de tel ou tel mathématicien. Deuxièmement, s'agissant de la nature des constructions, Brouwer revendique une partie de l'héritage de Kant. Les constructions mathématiques sont fondées sur l'intuition du temps, et le temps subjectif est vu comme une dimension de la conscience nécessaire à la pensée de quelque objet que ce soit²². Selon la formulation de Brouwer, les deux « actes » au fondement des mathématiques intuitionnistes consistent d'une part dans la reconnaissance du rôle joué par la perception du changement temporel et d'autre part dans la reconnaissance de la possibilité d'engendrer de nouvelles entités mathématiques, en particulier à l'aide de suites infinies dont les membres sont choisis parmi un domaine d'entités mathématiques déjà construites. Les entiers sont construits à partir de l'intuition du changement temporel²³, tandis que la reconnaissance de la possibilité d'engendrer des suites infinies joue un rôle crucial dans la construction des nombres réels. En effet, les nombres entiers étant construits, Brouwer identifie les éléments du continu avec

¹⁹ Le sens donné ici à « résulter » est un peu lâche, dans la mesure où l'interprétation HBK est une interprétation informelle, qui ne précise, par exemple, ce qu'il faut entendre par « méthode permettant de... ».

²⁰ Les initiales BHK font référence, respectivement, à Brouwer, Heyting et Kolmogorov.

²¹ Dans le cas où l'on ne s'intéresse pas simplement à la logique mais à une théorie mathématique particulière pour lesquelles ces règles logiques sont utilisées, il faut montrer que cette propriété de l'existence est préservée malgré les axiomes ajoutés. C'est bien le cas, par exemple, pour l'arithmétique intuitionniste.

²² A la différence de Kant, Brouwer ne retient pas de rôle privilégié pour l'intuition spatiale car il considère que le développement des géométries non-euclidiennes a mis à mal l'idée d'une intuition spatiale délivrant une géométrie univoque. Notre restitution des thèses de Brouwer concernant la nature des constructions mentales s'appuie en particulier sur van Atten (2004).

²³ Brouwer explique la perception d'un changement temporel comme « la dissolution d'un moment de vie en deux choses distinctes, l'une cédant la place à l'autre mais étant retenue dans la mémoire. Si la deux-ité (« two-ity ») ainsi créée est privée de toutes ses qualités, demeure la forme vide du substrat commun à toutes les deux-ités. L'intuition mathématique fondamentale réside dans ce substrat commun, cette forme vide » (Brouwer, 1952, cité par van Atten, 2003, p. 4). L'abstraction à partir du changement temporel de la simple forme de la deux-ité vaut construction des deux premiers entiers, les entiers suivants étant construits de façon analogue.

des suites de choix de nombres entiers. Ces suites infinies représentent, à travers un codage, des intervalles de nombres rationnels satisfaisant la condition de Cauchy. Elles peuvent être données à travers une loi permettant de calculer le n-ième élément de la suite, ou être des suites libres, dont les éléments ne sont pas déterminés par une règle mais produits librement²⁴. L'analyse construite sur ces bases diverge de l'analyse classique : on peut montrer que toute fonction sur les réels est continue²⁵. Comme l'indique cet exemple emprunté à l'analyse, les mathématiques intuitionnistes ne sont pas des mathématiques diminuées, que l'on obtiendrait en soustrayant des mathématiques classiques certains principes logiques discutables comme le tiers-exclu. Ce sont des mathématiques originales dans lesquelles certains énoncés classiquement faux deviennent des théorèmes centraux.

Sur un plan mathématique, les mathématiques constructives – c'est-à-dire, au-delà des spécificités de l'approche brouwerienne, les mathématiques qui choisissent d'interpréter l'existence en termes de possibilités de construction – constituent aujourd'hui encore une tradition vivante au sein des mathématiques : les travaux de Bishop (1967), qui montre comment développer une analyse constructive aussi riche que l'analyse classique, ou le développement à la suite de Martin-Löf (1975) de la théorie des types, qui rend explicite les types attribués aux constructions par nos jugements, en constituent deux exemples remarquables. Sur un plan philosophique, la théorie brouwerienne des constructions mentales n'est pas le seul fondement philosophique possible des mathématiques intuitionnistes. Renversant la perspective anti-linguistique de l'intuitionnisme classique, Dummett²⁶ propose de fonder l'intuitionnisme sur une théorie générale de la signification. A la base de cette théorie se trouve un réquisit de manifestabilité, en vertu duquel « la signification d'un énoncé ne peut pas être – ou contenir comme ingrédient – quelque chose qui ne serait pas manifeste dans l'usage qui est fait de l'énoncé, quelque chose qui réside uniquement dans l'esprit de l'individu qui appréhende sa signification » (Dummett, 1973, tr. fr. p. 81). La signification d'un énoncé ne doit donc pas être définie par référence à des conditions qui pourraient être en principe satisfaites à l'insu de l'individu qui maîtrise cette signification : elle doit être identifiée aux conditions d'assertabilité de l'énoncé (plutôt par exemple qu'à ses conditions de vérité).

Il ne nous appartient pas ici de dire le dernier mot concernant les programmes formaliste ou

²⁴ Troelstra (1977) est une étude détaillée des suites de choix, et des conditions dans lesquelles les suites de choix libres sont ou non indispensables.

²⁵ L'admission de suites de choix libres est problématique : comment par exemple calculer la valeur d'une certaine fonction pour un nombre réel, lorsque ce nombre est engendré par une suite de choix infinis, qui n'est donc jamais donné effectivement en totalité mais qui n'obéit pas non plus à une règle ? Pour résoudre la difficulté, Brouwer adopte un principe de continuité, qui garantit que la valeur d'une fonction sur les réels est déterminée, pour chaque nombre réel, par un nombre fini d'éléments de la suite de choix qui l'engendre. Le fait que toutes les fonctions sur les réels soient continues, et d'autres théorèmes de l'analyse intuitionniste qui ne sont pas des théorèmes de l'analyse classique, suit du principe de ce principe de continuité.

²⁶ Voir notamment Dummett (1977).

intuitionniste, aussi nous contenterons-nous pour conclure cette section de quelques éléments de synthèse et de mise perspective. Le type d'intuition mobilisé par les formalistes (la perception des types de symbole) est relativement non problématique, mais les résultats mathématiques nécessaires pour fonder l'ensemble des mathématiques sur une intuition de ce genre n'ont pas été obtenus tel que l'espérait Hilbert, et, à l'inverse, les résultats négatifs de Gödel constitue un obstacle que doit contourner toute réactualisation du programme formaliste. A la suite des travaux de Brouwer et Heyting, les mathématiques intuitionnistes ont connu des développements qui suggèrent qu'elles ne sont pas moins riches ou fécondes que les mathématiques classiques. On ne peut cependant que constater que les mathématiques intuitionnistes demeurent une tradition minoritaire au sein des mathématiques classiques. En outre, la nature de l'intuition brouwerienne reste au moins aussi mystérieuse que l'intuition kantienne.

Les deux programmes que nous venons de présenter avaient en commun de chercher à expliquer les mathématiques en se passant de la supposition d'une réalité mathématique objective indépendante de nous. Ils relèvent d'une philosophie des mathématiques anti-réaliste. Par contraste, les sections qui suivent sont consacrées aux conceptions réalistes, qui visent à prendre au sérieux l'existence d'une telle réalité objective. Notons cependant que finitisme et intuitionnisme n'épuisent pas toutes les formes possibles d'antiréalisme, et nous aurons l'occasion d'évoquer plus loin le fictionnalisme de Field ainsi que le structuralisme nominaliste.

3. Pourquoi être réaliste ?

3.1 Réalisme sémantique et réalisme ontologique

Il convient pour commencer de distinguer deux formes de réalisme mathématique. La première est le réalisme sémantique²⁷, qui correspond à la thèse selon laquelle la vérité ou la fausseté des énoncés mathématiques est un fait objectif qui ne dépend pas de nous. La seconde est le réalisme ontologique, qui correspond à la thèse selon laquelle il existe des objets mathématiques indépendants de nous. Le réalisme ontologique semble impliquer le réalisme sémantique²⁸ : s'il y a des objets mathématiques qui ne dépendent pas de nous, la vérité ou la fausseté des énoncés mathématiques dépend de ces objets et donc ne dépend pas de nous. Si l'on veut être « complètement » réaliste, il faut accepter conjointement les deux thèses. Notons cependant que le

²⁷ On parle parfois pour le réalisme sémantique de réalisme quant aux valeurs de vérité (*truth-value realism*), voir Shapiro (1997) et Linnebo (2009).

²⁸ Shapiro (1997) remarque toutefois que Tennant (1997) constitue une exception. L'antiréalisme sémantique de Tennant découle des contraintes qui pèsent selon lui sur le contenu des énoncés en vertu de ce que nous les utilisons, bien que ces énoncés portent sur des objets qui existent indépendamment de nous.

réalisme sémantique n'implique pas le réalisme ontologique. Un formaliste hilbertien par exemple souscrit partiellement au réalisme sémantique : il est réaliste quant aux valeurs de vérité des énoncés des mathématiques finitistes, puisqu'il réinterprète ces énoncés comme portant sur les symboles mathématiques. Il est même possible de rejeter le réalisme ontologique tout en acceptant le réalisme sémantique pour l'ensemble des énoncés mathématiques : c'est le cas de Hellman (1989) qui donne une interprétation modale des énoncés mathématiques sans supposer fixé un domaine déterminé d'objets mathématiques. Dans les sections suivantes, nous nous concentrons sur le « plein » réalisme qui combine réalisme sémantique et réalisme ontologique, la thèse du réalisme ontologique demandant toutefois à être précisée, nous y reviendrons.

3.2 Réalisme et pratique des mathématiques

Pourquoi être réaliste ? L'argument le plus évident repose sur une forme de réalisme pré-théorique. Spontanément, nous sommes tentés de dire que $2+2=4$ est un énoncé vrai, et que si il est vrai, c'est en vertu des propriétés des nombres auxquels il est fait référence. Le « nous » dont il est question ici englobe aussi bien les non-mathématiciens que les mathématiciens. S'agissant des mathématiciens, ce réalisme naïf s'ancre sans doute pour partie dans la pratique de la recherche mathématique. Chercher à montrer un théorème qui résiste, c'est bien chercher à montrer quelque chose à propos de certains objets ; la résistance ou l'opacité elle-même suggère une certaine objectivité indépendante du chercheur²⁹. Dans les termes de Moschovakis,

« L'argument principal en faveur de l'approche réaliste en mathématique est la certitude instinctive que l'on lorsqu'on essaie de résoudre un problème mathématique : on est bien en train de penser à des `objets réels', qu'il s'agisse d'ensembles, de nombres ou de quoi que ce soit d'autre ; et ces objets ont des propriétés intrinsèques qui vont au-delà de ce que disent les axiomes spécifiques sur lesquels on est en train de baser sa réflexion. » (2009, p. 469)

²⁹ Nous écrivons « suggère » car il s'agit là d'un sentiment et non d'un argument. Gödel (1951) propose un véritable argument en faveur du réalisme à partir de la difficulté des mathématiques : s'il y a des propositions mathématiques absolument indécidables, la conception selon laquelle les mathématiques sont notre propre création s'en trouverait réfutée, car « le créateur connaît nécessairement toutes les propriétés de ses créatures » (1951, p. 16). Si nous préférons nous en tenir au sentiment fondé sur la difficulté des mathématiques plutôt qu'à cet argument, c'est que celui-ci est doublement limité. D'une part, la prémisse concernant la difficulté des mathématiques doit être renforcée. Il ne s'agit pas simplement d'affirmer que les mathématiques « résistent » mais qu'il y a des problèmes absolument indécidables (ce que n'établissent pas les théorèmes d'incomplétude, et ce sur quoi Gödel ne s'engage pas). D'autre part, la seconde prémisse qui suppose le créateur peut connaître en principe toutes les propriétés de ses créatures, parce que celles-ci « n'ont que celles qui leur a données », est tout à fait discutable. Sur la difficulté des mathématiques et les sens qu'elle prend selon que l'on adopte une position réaliste ou anti-réaliste, voir Oumraou (2009).

L'argument n'est pas que phénoménologique. Les mathématiciens ne font pas que croire pour ainsi dire « sans conséquence » qu'il y a des objets mathématiques. Ils font comme s'il y avait des objets mathématiques³⁰ : certains des principes utilisés par les mathématiciens ne semblent justifiés que s'il existe des objets mathématiques indépendants de nous. Si l'on considère que la pratique des mathématiciens est en bon ordre, et qu'il n'appartient pas aux philosophes des mathématiques de la réformer, on a là un argument en faveur du réalisme mathématique, en tant qu'il s'agit de la seule position philosophique cohérente avec cette pratique. Un exemple est le recours aux définitions imprédicatives³¹. On parle d'imprédicativité lorsqu'un ensemble M et un objet particulier m sont définis de telle sorte que m est un élément de M et que la définition de m dépend de M . Il existe de nombreuses définitions mathématiques qui sont imprédicatives : c'est le cas, en analyse, de la définition de la borne supérieure d'un ensemble de réels³². Comme le souligne Gödel, les définitions imprédicatives ne sont pas problématiques si la thèse du réalisme ontologique est correcte : « s'il est question d'objets qui existent indépendamment de nos constructions, il n'y a absolument rien d'absurde dans l'existence d'une totalité contenant des éléments qui ne peuvent être décrits (c'est-à-dire caractérisés de manière unique) que par référence à cette totalité » (1944, p. 136). Si en revanche on considère que, d'une façon ou d'une autre, les objets mathématiques sont produits par les définitions ou construits par le mathématicien, il n'est pas possible de définir un objet à partir d'une totalité qui le présuppose. Le réalisme mathématique peut donc se recommander non seulement d'une fidélité un peu vague aux croyances « philosophiques » des mathématiciens, mais aussi, et surtout, d'une fidélité à leurs modes de raisonnement.

Gödel (1953) a également cherché à tirer argument du second théorème d'incomplétude. Nous l'avons vu, le théorème établit qu'il n'est pas possible de prouver par des méthodes finitistes la cohérence de théories mathématiques suffisamment riches, comme l'arithmétique ou la théorie des ensembles. Tout programme conventionnaliste visant à réduire les mathématiques à une simple manipulation de symboles est donc dans l'impossibilité d'établir la cohérence du système de conventions qu'il emploie. Cela est particulièrement gênant s'il s'agissait de soutenir que les systèmes syntaxiques utilisés étaient dépourvus de contenu, puisque d'un système incohérent

³⁰ Resnik (1980, p. 162) qualifie de « platoniste méthodologique » celui qui accepte l'utilisation de méthodes non-constructives en mathématiques. Shapiro (1997, p. 38) parle en un sens proche de « réalisme de travail » (« working realism »). Nous soutenons ici que le platonisme méthodologique des mathématiciens est un argument en faveur du platonisme tout court.

³¹ Une école philosophico-mathématique en particulier, le prédicativisme, cherche à montrer qu'il est possible de se passer des définitions imprédicatives pour le développement des mathématiques. Voir les travaux pionniers de Weyl (1918) et les développements preuves-théoriques récents de Feferman (1988) qui montre que la plus grande partie de l'analyse classique peut être développée sans imprédicativité.

³² Les réels étant vus comme des coupures de Dedekind, la borne supérieure d'un ensemble X de réels, notée $\text{lub}(X)$, est l'ensemble des rationnels qui sont des éléments d'un réel appartenant à X . $\text{lub}(X)$ est défini comme un élément de l'ensemble \mathbb{R} des réels, mais sa définition dépend de \mathbb{R} car dans le cas général X a été lui-même défini comme un ensemble d'éléments de \mathbb{R} possédant une certaine propriété (voir Kleene, 1952, p. 43).

n'importe quelle proposition empirique peut être déduite. Dans les termes de Gödel,

« le plan du programme syntaxique³³ consistant à remplacer l'intuition mathématique par des règles pour l'usage des symboles échoue parce que ce remplacement supprime toute raison de s'attendre à la cohérence [de ces règles], qui est vitale à la fois pour les mathématiques pures et appliquées » (1953, p. 346).

En revanche, l'usage des axiomes peut être justifié par l'intuition mathématique. Si nous savons que les axiomes que nous utilisons en arithmétique sont vrais, parce que nous savons qu'ils décrivent correctement les propriétés des objets mathématiques que sont les nombres entiers, alors nous savons que nous pouvons utiliser l'arithmétique sans crainte de contradiction. Dans cette perspective, l'argument pour le réalisme viendrait de la capacité de celui-ci à justifier notre confiance dans les mathématiques ; c'est la raison pour laquelle il nous a semblé pertinent de rapprocher cet argument du précédent.

La portée de l'argument de Gödel est toutefois limitée³⁴. Premièrement, si l'argument vaut en tant que réfutation d'un certain programme antiréaliste visant à réduire les mathématiques à une manipulation conventionnelle de symboles, cette réfutation ne suffit pas à justifier le réalisme, et surtout pas le réalisme ontologique. Il reste tout à fait possible de remplacer l'intuition mathématique d'objets indépendants de nous par d'autres genres d'intuitions mathématiques, par exemple, comme nous l'avons vu, par l'intuition d'objets mathématiques par nous construits, ou par l'intuition empirique (les axiomes seraient justifiés par le succès des applications³⁵). De ce point de vue, le réalisme n'est qu'une solution parmi d'autres à la question de la justification des axiomes et de la cohérence, même une fois l'espace des solutions possibles restreints par le théorème d'incomplétude. Deuxièmement, l'argument est aussi problématique en tant que réfutation du conventionnalisme au sens de Gödel. Il suppose que le conventionnalisme n'est acceptable que si le conventionnaliste peut *montrer* que les règles qu'il propose sont cohérentes, et pas seulement si les règles qu'il propose sont cohérentes. Mais le conventionnaliste pourrait refuser la charge de la preuve et rétorquer qu'il n'a pas à prouver mathématiquement que le conventionnalisme ne peut

³³ Gödel vise ici Carnap et d'autres positivistes logiques comme Hahn ou Schlick.

³⁴ La position de Gödel lui-même quant à la portée de l'argument n'est pas complètement claire. D'un côté, l'ensemble de l'article dans lequel est exposé l'argument est consacré à une réfutation du programme syntaxique, et Gödel reconnaît explicitement que le rôle de l'intuition mathématique pourrait également être joué par l'intuition empirique. D'un autre côté, Gödel déclare que « l'examen de la perspective syntaxique, peut-être plus que toute autre chose, conduit à la conclusion qu'il existe bien des objets et des faits mathématiques objectifs [...] » (1953, p. 337).

³⁵ Dans quelle mesure le succès des applications d'une théorie mathématique donne-t-il des raisons de croire que la théorie est cohérente ? Dans une certaine mesure, la croyance dans la cohérence peut se fonder sur le fait qu'aucune contradiction n'a encore pu être dérivée. Gödel envisage d'autre part de façon elliptique la possibilité d'une « connaissance de faits empiriques mettant en jeu un contenu mathématique équivalent ».

être réfuté.

3.3 L'argument de l'indispensabilité des mathématiques

Les deux arguments précédents peuvent être renversés. Nous avons soutenu que si les définitions imprédicatives étaient justifiées, et que si nous savions que l'arithmétique était cohérente³⁶, alors il existait des objets mathématiques indépendants de nous. En supposant donc que les définitions imprédicatives sont bien justifiées, ou que nous savons bien que l'arithmétique est cohérente, il est possible de conclure qu'il existe des objets mathématiques. Mais un anti-réaliste pourrait soutenir que l'hypothèse réaliste est en fait la seule raison que l'on peut avoir pour considérer que les définitions imprédicatives sont justifiées ou que nous savons que l'arithmétique est cohérente. Les deux arguments précédents relèveraient alors de la pétition de principe. Cette réponse anti-réaliste est possible, même si elle est discutable. De l'argument que nous allons présenter maintenant, l'argument d'indispensabilité, il a été dit qu'il s'agissait du seul argument en faveur du platonisme qui ne contenait pas de pétition de principes (« the only non-question-begging argument against [nominalism] » selon Field, 1980, p.4).

L'argument d'indispensabilité déduit l'existence d'objets mathématiques de l'indispensabilité des mathématiques dans la science contemporaine. Il est généralement attribué à Quine (voir notamment 1953a et 1953b) et Putnam³⁷ (1979), en voici une présentation rigoureuse reprise à Colyvan (2001, p. 11).

Prémisse 1 Nous sommes engagés à reconnaître l'existence des objets qui sont indispensables à nos meilleures théories scientifiques

Prémisse 2 Les objets mathématiques sont indispensables à nos meilleures théories scientifiques

Conclusion Nous sommes engagés à reconnaître l'existence d'objets mathématiques

La prémisse 2 est une constatation qui vient nourrir le principe méthodologique posée par la prémisse 1. Elle affirme que, de fait, les mathématiques font partie intégrante de nos meilleures théories scientifiques. Ce faisant, elle a pour elle la force de l'évidence : les théories de la physique

³⁶ Nous simplifions ici le second argument, qui est, comme il a été souligné, plus complexe.

³⁷ Il est également possible de présenter une version de l'argument d'indispensabilité qui conclut en faveur du réalisme sémantique plutôt que du réalisme ontologique. Une telle version serait sans doute plus proche de la conception de Putnam. On peut passer d'une telle version à un argument en faveur du réalisme ontologique en soutenant ensuite qu'il convient d'adopter une sémantique standard pour les énoncés mathématiques (voir la section 5.1).

sont de part en part formulées à l'aide de théories mathématiques, qu'on pense par exemple au rôle de l'analyse pour la formulation de la mécanique, à celui des espaces de Hilbert en mécanique quantique ou encore à celui de la géométrie riemannienne pour la théorie de la relativité.

La prémisse 1 suit elle-même de deux principes méthodologiques que Quine a toujours défendus, le naturalisme et le holisme de la confirmation. La thèse naturaliste est que les sciences de la nature sont l'ultime arbitre en matière de vérité et d'existence. Elle consiste à abandonner le rêve d'une philosophie première à laquelle il appartiendrait, sur la base d'une démarche propre, de trancher les questions de métaphysique et d'ontologie. Elle demande au contraire de prendre acte que la science est notre meilleur guide, y compris s'agissant de savoir ce qui existe. Si en mettant en forme notre meilleure théorie scientifique du monde, nous constatons que cette théorie pose l'existence de quarks, alors nous sommes engagés à admettre l'existence de quarks. Il ne servirait à rien qu'un métaphysicien déclare que les quarks n'existent pas : son affirmation audacieuse n'aurait de valeur que s'il pouvait montrer qu'on peut reconstruire la physique en faisant l'économie du parler en termes d'électrons. En quoi ce qui vaut pour les entités théoriques postulées par la physique s'applique-t-il aux objets mathématiques ? C'est ici qu'intervient le holisme de la confirmation. La thèse holiste est que les données qui confirment une théorie scientifique ne confirment pas telle ou telle partie de la théorie, mais la théorie dans son ensemble. Si donc notre meilleure théorie du monde est une théorie dont les lois mettent en jeu à la fois des entités physiques inobservables comme les quarks et des objets mathématiques, comme les nombres réels et les fonctions sur les réels, alors les données qui confirment cette théorie doivent être considérées comme confirmant aussi bien l'existence des quarks que l'existence des nombres réels et des fonctions sur les réels.

Le cœur de l'argument d'indispensabilité est le refus d'un double standard en matière ontologique : les entités mathématiques sont, du point de vue de la science, sur le même plan que les entités théoriques, et nous devons donc leur accorder le même statut ontologique. Putnam présente les choses ainsi en prenant l'exemple de la loi de la gravitation universelle :

« Nous souhaitons dire que la loi de la gravitation universelle est un énoncé objectif à propos des corps – et pas uniquement à propos des sense-data ou de lectures de mesures métriques. De quel énoncé s'agit-il ? D'un énoncé qui dit que les corps se comportent de telle manière que le quotient de deux nombres *associés* à ces corps est égal à un troisième nombre *associé* à ces corps. Mais comment un tel énoncé pourrait-il avoir le moindre contenu objectif si les nombres et les 'associations' (c'est-à-dire les fonctions) sont semblables à de pures fictions ? Ce serait comme soutenir que Dieu n'existe pas et que les anges n'existent pas, tout en

soutenant dans le même temps qu'il est un fait objectif que Dieu a placé chaque étoile sous la responsabilité d'un ange et que les anges responsables d'étoiles jumelles ont été créés en même temps ! Si notre manière de parler de nombres et d'associations entre masses, etc. et nombres, est 'théologique' (en un sens péjoratif), alors la loi de la gravitation universelle est tout autant théologique. » (1979, p. 74)

Le rôle de la prémisse 2 est, dans l'exemple de Putnam, joué par le recours à des nombres et à des fonctions dans la formulation de la loi de la gravitation universelle : parler de masse, c'est parler d'une fonction qui associe à des corps une valeur numérique. Mais il faut noter ici qu'en toute généralité, malgré la « force de l'évidence » et malgré les exemples, la prémisse 2 est susceptible d'être contestée. Field (1980) s'emploie ainsi à défendre une position nominaliste en réfutant l'argument d'indispensabilité, sur la base d'un rejet de la prémisse 2. Field se propose ainsi de montrer que la théorie gravitationnelle de Newton peut être « nominalisée » : il est possible de reformuler ses lois en se passant de concepts quantitatifs et des mathématiques qui accompagnent l'usage de ces concepts quantitatifs. La démonstration de Field a été contestée s'agissant de sa pertinence et de la possibilité de la généraliser. Concernant le premier point, Colyvan (2001) insiste sur le fait que même si la théorie nominalisée est empiriquement équivalente à la théorie de départ, il ne s'ensuit pas que la théorie nominalisée soit aussi bonne que la théorie de départ, des considérations de simplicité et d'élégance étant partie prenante de nos choix en matière de théories. Même si un programme de nominalisation pouvait être mené à bien, il resterait donc possible que l'existence d'entités mathématiques soit justifiée dans la mesure où elles sont indispensables pour formuler des théories simples et élégantes. Concernant le second point, la possibilité d'étendre l'entreprise de nominalisation a été contestée, s'agissant de la mécanique quantique (Mallament, 1982) ou à la théorie de la relativité (Urquhart, 1980). Le débat autour du programme nominaliste de Field demeure vif, à la mesure de l'importance philosophique qu'aurait une réfutation de l'argument d'indispensabilité.

4 Variétés du platonisme et philosophie de la théorie des ensembles

4.1 Platonisme faible et platonisme fort

Au début de la section précédente, nous avons distingué réalisme sémantique et réalisme ontologique, et ce qui précède visait à motiver un réalisme « complet » combinant réalisme sémantique et réalisme ontologique. Il est maintenant temps de distinguer, au sein du réalisme

ontologique, différentes formes de celui-ci. En effet, les arguments que nous avons présentés ne justifient pas tous le même « degré » de réalisme ontologique. Les arguments présentés dans la section 4.1 prennent la forme d'inférence à la meilleure explication. Ils concluent qu'il est souhaitable de supposer des entités mathématiques, avec lesquelles nous avons une accointance susceptible d'expliquer notre connaissance mathématique. L'argument d'indispensabilité présenté dans la section 4.2 ne mobilise pas une accointance quelconque avec des entités abstraites. La supposition d'objets mathématiques est la conséquence de l'adoption de théories mathématiques, adoption qui est gagée sur leur intégration à notre meilleure théorie du monde. Les entités mathématiques sont en quelque sorte la projection de nos théories, ces théories ne sont pas édifiées sur la base d'un accès épistémique aux objets qu'elles viseraient à décrire. Sur cette base, il convient de distinguer ce que l'on pourrait appeler un platonisme faible et un platonisme fort³⁸. Le platonisme faible combine le réalisme sémantique et un réalisme ontologique « épistémologiquement neutre ». C'est typiquement la position de Quine. Le platonisme fort combine le réalisme sémantique et un réalisme ontologique « épistémologiquement chargé ». Gödel est sans doute celui qui a proposé l'élaboration la plus poussée du platonisme fort, mais c'est aussi la position d'un logiciste comme Frege³⁹.

Platonisme faible et platonisme fort s'accordent pour dire que les mathématiques parlent d'entités mathématiques qui existent objectivement, tout comme la physique est l'étude des entités physiques. Mais les épistémologies associées sont très différentes. Pour le platonisme faible qui ne couple pas la reconnaissance d'objets mathématiques avec la reconnaissance d'un mode d'accès spécifique à ces objets, les connaissances mathématiques ne disposent pas de privilège particulier relativement au reste des connaissances. Elles ne sont pas certaines, elles sont révisables, elles ne sont pas *a priori* mais dépendantes de l'expérience. De même, les vérités mathématiques ne sont pas nécessaires, ou en tout cas pas plus nécessaires que les principes physiques. Au contraire, le

³⁸ Notre distinction entre platonisme faible et platonisme fort est épistémologique ; on pourra s'étonner de ce qu'une distinction épistémologique soit mobilisée s'agissant de caractériser des positions ontologiques. Pour ne pas quitter le terrain ontologique, nous aurions pu proposer une distinction entre platonisme faible et platonisme fort fondée sur l'indépendance des objets mathématiques (indépendance à l'égard des sujets connaissant, de leur pratique, de leur langage et de leur pensée). On continuerait en disant que le platonisme de Quine, par exemple, est un platonisme faible : les objets mathématiques ne sont que des projections de nos théories, dans cette mesure leur caractérisation dépend de nos pratiques de théorisation. À l'inverse, le platonisme de Gödel serait un platonisme fort : les objets mathématiques sont les éléments qui constituent une réalité mathématique absolument indépendante de notre activité théorique. La caractérisation ontologique par l'indépendance, au moins dans le cas de Quine et de Gödel, recouperait donc la caractérisation épistémologique, sans justement qu'il soit nécessaire de quitter le terrain ontologique. Néanmoins, il nous semble que ce parler en termes d'indépendance demeure vague, et que la distinction épistémologique est plus nette. Linnebo (2009) propose une typologie du réalisme ontologique, selon qu'est affirmée simplement l'existence d'objets mathématiques, ou que sont affirmées en outre que ces objets sont abstraits et indépendants. Il admet dans le même qu'on ne sait pas très bien ce que serait un objet « non indépendant ».

³⁹ La réduction logiciste ne vaut pas élimination des objets mathématiques. Frege est réaliste pour les objets logiques. Il n'entend donc pas montrer qu'il n'y a pas d'objets mathématiques en réduisant les objets mathématiques à des lois logiques sans contenu. Il entend bien plutôt montrer que les objets mathématiques sont des objets logiques.

platonisme postule l'existence d'un mode d'accès spécifique aux objets mathématiques. Frege évoque ainsi, dans un texte posthume, l'existence, à côté de la perception sensible, d'une « source logique de connaissance »⁴⁰ (1924 – 1925, p.315). De façon remarquable, la caractérisation que Gödel propose du platonisme⁴¹ fait appel à la perception de la réalité mathématique ; le platonisme est ainsi présenté comme

« la conception selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non-sensible, qui existe indépendamment à la fois des actes et des dispositions de l'esprit humain et qui est perçue seulement, quoique probablement de manière très incomplète, par l'esprit humain. » (1951, p. 38)

Le platonisme fort propose ainsi pour les mathématiques un régime épistémologique distinct des sciences de la nature. Les connaissances mathématiques sont *a priori*, au sens où elles sont indépendantes de l'expérience sensible, et, dans une perspective métaphysique, il demeure possible d'attacher aux vérités mathématiques une nécessité qui ne serait pas attachée aux vérités empiriques.

4.2 Intuition et succès

Revenons plus en détail sur notre mode d'accès à la réalité mathématique dans la perspective du platonisme fort, en continuant à nous appuyer sur la conception de Gödel⁴². La source mathématique de connaissance est pensée par analogie avec la perception sensible. L'intuition mathématique consiste dans une perception de la réalité mathématique :

« Malgré leur éloignement de l'expérience sensible, nous avons quelque chose qui ressemble à une perception des objets de la théorie des ensembles, comme on le voit au fait que ces

⁴⁰ Frege ne donne quasiment aucune caractérisation positive de notre accès aux objets logiques ; la source logique de connaissance est simplement distinguée négativement de la perception sensible et des sources « géométrique » et « temporelle », qui font sans doute référence à l'intuition pure de l'espace et du temps postulée par Kant. Les lois de la logique étant pour Frege les lois de la pensée, entendue en un sens non psychologique, cette troisième source de connaissance pourrait être assimilée à une capacité réflexive de la pensée à saisir les principes de son propre fonctionnement, mais tout ceci est très spéculatif. Récemment, Hale et Wright (2002) ont soutenu que le platonisme logiciste pouvait rendre compte des connaissances mathématiques en tant que connaissances purement conceptuelles, dans lesquelles l'intuition ne joue jamais de rôle essentiel.

⁴¹ Frege et Gödel sont tous deux des représentants du platonisme fort. Ils n'ont pas pour autant la même conception de notre mode d'accès aux objets mathématiques. Frege refuserait sans doute de parler d'*intuition* mathématique, alors que Gödel considère qu'il existe une analogie entre notre saisie rationnelle des concepts mathématiques et notre saisie perceptuelle des objets physiques.

⁴² Pour une discussion détaillée du platonisme de Gödel, voir notamment van Atten et Kennedy (2009), Parsons (1995) ainsi que Sabatier (2009).

axiomes s'imposent d'eux-mêmes à nous comme vrais. » (1964, p. 529)

Gödel précise que la perception mathématique, comme la perception des objets physiques qui est médiatisée par les sensations, n'est sans doute pas une forme immédiate de connaissance. Toutefois, Gödel ne donne pas de caractérisation positive de ce qui viendrait médiatiser la perception mathématique. Il se contente de donner un argument négatif, selon lequel même nos idées empiriques contiennent des éléments abstraits « qualitativement distincts des sensations » (1964, p. 529) qui ne peuvent avoir leur origine dans les sensations. Les objets de la perception mathématique sont en revanche déterminés comme étant les concepts, Gödel affirmant ainsi que la différence entre perception sensible et perception mathématique « réside seulement en ce fait que dans le premier cas une relation entre un concept et un objet particulier est perçue, alors que dans le second cas c'est une relation entre concepts » (1953/9,V)

L'intuition n'est pas le seul mode d'accès aux vérités mathématiques reconnu par Gödel. Dans le domaine empirique, certaines lois fondamentales, dont le contenu n'est pas directement observable, sont vérifiées de manière indirecte par leurs conséquences ; il en va de même, dans le domaine mathématique, pour les axiomes dont le contenu échappe à l'intuition. Au lieu de s'imposer par leur évidence, de tels axiomes s'imposent par leur « succès » (1964, p. 522). L'appel au succès d'un axiome en vue de justifier son adoption fait bien partie de la pratique des mathématiciens. Prenons l'exemple de l'axiome du choix en théorie des ensembles, qui affirme que pour toute collection d'ensembles non-vides, il existe une fonction qui choisit un élément dans chacun de ces ensembles. Une première marque de succès est la possibilité de donner de nouvelles démonstrations de résultats déjà connus ou de généraliser ces résultats. Ainsi, à l'aide de l'axiome du choix, on peut montrer que pour tout ensemble, au moins une des deux situations est le cas : on peut grouper ces éléments par paires sans laisser de côté aucun élément, ou on peut grouper ces éléments par paires en laissant exactement un élément de côté. Ce résultat est connu et élémentaire dans le cas où l'ensemble de départ est fini, il nécessite l'axiome du choix lorsque l'ensemble de départ est infini⁴³. Un deuxième critère de succès est la possibilité de résoudre des conjectures préexistantes. À nouveau ce critère est satisfait par l'axiome du choix qui permet de résoudre la question de savoir si tout ensemble peut être bien ordonné⁴⁴. Un troisième critère est la capacité à systématiser et simplifier la théorie mathématique. C'est encore le cas de l'axiome du choix, qui permet de jeter les bases de la théorie des nombres cardinaux⁴⁵. Un quatrième critère, sans doute

⁴³ Cet argument est donné par Sierpinski (1967).

⁴⁴ Une relation R sur un ensemble A est un bon ordre si R est une relation d'ordre et si tout sous-ensemble non vide de A a un plus petit élément. L'axiome du choix a été proposé explicitement par Zermelo (1904) pour montrer que tout ensemble peut être bien ordonné comme le supposait Cantor. Les deux hypothèses sont en fait équivalentes.

⁴⁵ Tarski (1924) montre que l'axiome du choix est équivalent à la monotonie de l'addition pour les cardinaux

décisif dans le cas de l'axiome du choix, est l'utilisation implicite de l'axiome par les mathématiciens : Zermelo (1908) montre que de nombreux développements portant sur les ensembles de réels, en particulier concernant la théorie des ensembles de Borel et des ensembles projectifs, reposent sur l'axiome du choix.

4.3 Ajouter de nouveaux axiomes

La différence entre les positions réalistes et anti-réalistes, et au sein des positions réalistes la différence entre platonisme faible et platonisme fort s'illustre bien s'agissant de l'attitude adoptée face aux résultats d'indépendance et à la question de savoir si ces résultats appellent ou non une extension de la théorie de départ. Prenons l'exemple de l'hypothèse du continu (CH), c'est-à-dire de l'affirmation selon laquelle le cardinal des réels est le premier cardinal indénombrable, ou, formulation équivalente, que tout sous-ensemble infini de nombres réels peut être mis en bijection soit avec l'ensemble des entiers naturels soit avec l'ensemble des réels. Cette question est une question fondamentale de la théorie des cardinaux transfinis, qui porte sur des objets mathématiques « familiers » des mathématiciens non-ensemblistes, à savoir les entiers naturels et les réels. Une fois que Cantor eût prouvé que la cardinalité du continu était supérieur à la cardinalité de l'ensemble des entiers naturels, il était naturel de se demander « à quel point » : y a-t-il ou non des ensembles de cardinalité plus grande que l'ensemble des entiers et de cardinalité plus petite que l'ensemble des réels ? La réponse négative à cette question est l'hypothèse du continu, formulée dès 1878 par Cantor comme une conjecture. En 1940, Gödel montre que la négation de l'hypothèse du continu est cohérente avec la théorie des ensembles standard de Zermelo-Fraenkel, y compris en présence de l'axiome du choix (ZFC). En 1964, Cohen montre que l'hypothèse du continu est cohérente avec ZFC. On ne peut, sur la base des axiomes de ZFC, ni prouver ni réfuter CH, de sorte que la théorie des ensembles standard laisse indécidée une question fondamentale de l'arithmétique cardinale. Que faut-il en conclure, et que doivent faire les théoriciens des ensembles ? Pour qui considère que la notion d'ensemble est définie conventionnellement par les axiomes de ZF ou ZFC, le résultat d'indécidabilité clôt le débat quant à la question de l'acceptation de CH sur la base de notre notion présente d'ensemble. Il devient en revanche est possible de développer des théories des ensembles rivales. C'est la réaction spontanée de Church :

« Le sentiment qu'il existe un univers absolu des ensembles, d'une façon ou d'une autre déterminé, bien qu'il n'en existe pas de caractérisation axiomatique complète, est davantage

transfinis (si $m < n$ et $p < q$ alors $m + p < n + q$).

ébranlé par la solution (ou plutôt `l'insolution' [insolving]) du problème du continu que par les fameux théorèmes d'incomplétude de Gödel. [...] Les résultats de Gödel-Cohen et leurs extensions ultérieures ont cette conséquence qu'il n'y a pas une théorie des ensembles mais plusieurs, et la différence se fait sur un problème pour lequel l'intuition semble pourtant nous dire qu'il ne doit `réellement' y avoir qu'une solution » (1966, p. 18)

La différence avec les théorèmes d'incomplétude est que le résultat ne se laisse pas immédiatement interpréter comme une conséquence des limites des méthodes axiomatiques. La démonstration de l'indécidabilité de l'énoncé de Gödel $G(T)$ d'une théorie T qui dit de lui-même qu'il n'est pas démontrable dans T vaut, à la réflexion, preuve (informelle) de $G(T)$. Il n'en va pas de même des résultats d'indépendance de Gödel et de Cohen qui ne nous laissent aucun indice quant à ce que l'on doit penser de CH.

Du point de vue d'un platoniste faible, le débat concernant CH n'est pas tout à fait clos. ZFC est la théorie des ensembles classique qui permet de reconstruire l'ensemble des mathématiques utilisées dans les sciences. L'ajout de nouveaux axiomes à ZFC est justifié si l'ajout de ces axiomes conduit à améliorer l'ensemble de notre schème conceptuel. Imaginons que l'ajout d'un certain axiome à ZFC permette de prouver des théorèmes jusque là indémontrables et que ces théorèmes trouvent une application dans un certain domaine des sciences de la nature. Imaginons en outre que l'axiome en question permette de dériver dans ZFC disons la négation de CH. Nous devrions alors considérer qu'il n'existe pas d'ensemble dont le cardinal est strictement compris entre le cardinal des entiers et le cardinal du continu. Mais ce scénario hypothétique où apparaissent des conséquences applicables n'est pas le seul possible. L'amélioration de notre schème conceptuel peut également passer par la simplification et par l'économie ontologique. Pour cette raison, Quine lui-même penche en faveur de CH :

« Les principaux axiomes de la théorie des ensembles sont des généralités qui ont une valeur opératoire dans la partie appliquée [des mathématiques]. D'autres énoncés, comme l'hypothèse du continu ou l'axiome du choix, qui sont indépendants de ces axiomes, peuvent être soumis à des considérations de simplicité, d'économie et de naturalité qui contribuent de façon générale à façonner les théories scientifiques. De telles considérations parlent en faveur de l'axiome de constructibilité de Gödel $V=L$. Il neutralise les envolées gratuites de la théorie des ensembles transfinis, et se trouve par ailleurs impliquer l'axiome du choix et l'hypothèse du continu. » (1992, p. 135, tr. modifiée)

L'axiome de constructibilité dit que l'univers des ensembles (\mathcal{V}) n'est rien d'autre que la totalité des ensembles constructibles (\mathcal{L}). Les ensembles constructibles sont construits par étape, les étapes en question étant indexées par des ordinaux. L_0 est l'ensemble vide. $L_{\alpha+1}$ est l'union de L_α et des sous-ensembles définissables de L_α . Si α est un ordinal limite, L_α est l'union des L_β pour $\beta < \alpha$. L'axiome de constructibilité est un principe de minimalité qui dit que seuls existent les ensembles définissables. S'il s'agit uniquement de limiter nos engagements ontologiques, il est naturel, d'ajouter $\mathcal{V}=\mathcal{L}$ à ZF, puisque les ensembles constructibles suffisent à donner un modèle de ZF⁴⁶.

Du point de vue d'un réaliste fort, le débat concernant CH n'est absolument pas clos. Dans l'univers des ensembles \mathcal{V} , CH est vrai ou faux. Les résultats d'indépendance montrent les limites de notre perception de \mathcal{V} . Dans la mesure où ZFC est la théorie standard à un temps t , ZFC représente tout ce que croit explicitement (les théorèmes déjà démontrés) ou implicitement (les théorèmes qui n'ont pas encore été démontrés) de l'univers des ensembles la communauté des mathématiciens à t . Ce savoir est incomplet, et la preuve d'indépendance de CH montre en particulier qu'au temps t nous ne savons pas (ni explicitement ni implicitement) ce qu'il en est de CH. Toutefois, il appartient aux théoriciens des ensembles de repousser les limites de ce savoir, en s'appuyant sur les deux critères de vérité que constituent l'intuition mathématique et le succès. Ainsi, dans l'article de 1947 consacré au problème du continu⁴⁷, Gödel soutient qu'il faut chercher de nouveaux axiomes pour la théorie des ensembles. Parmi les ajouts possibles discutés par Gödel figurent notamment des axiomes de grands cardinaux. Un exemple d'axiomes de grands cardinaux est l'axiome affirmant l'existence de cardinaux inaccessibles, et l'ajout d'un tel axiome obéit à un principe de maximalité. Un cardinal inaccessible est un ensemble clos par les opérations d'exponentiation et de limites de cardinaux inférieurs. L'idée derrière l'adoption d'axiomes de grands cardinaux est que rien ne peut épuiser l'univers des ensembles, ou pour le dire un peu moins métaphoriquement que l'univers des ensembles « ne se laisse capturer par aucune condition de clôture sur les ensembles, et qu'au contraire toute telle condition donne lieu à l'existence d'un ensemble » (Feferman, 1999)⁴⁸. Contrairement aux espoirs de Gödel, les recherches sur les axiomes de grands cardinaux n'ont pas débouché sur la formulation d'axiomes permettant de décider CH. Pourtant, les théoriciens des ensembles n'ont pas renoncé : le programme de Woodin est la tentative

⁴⁶ Au contraire, si l'on considère que \mathcal{V} est un univers d'objets existant indépendamment de nous, il n'y a pas de raison de considérer que \mathcal{V} se limite à \mathcal{L} . De fait, Gödel, qui avait introduit les constructibles afin de démontrer la cohérence de CH s'est rapidement détourné de l'axiome de constructibilité (voir Feferman, 1999).

⁴⁷ L'article est antérieur au résultat de Cohen mais les engagements philosophiques et mathématiques de Gödel n'en dépendent pas. Gödel affirme d'ailleurs que l'indécidabilité de CH est l'hypothèse la plus probable.

⁴⁸ Feferman expose les motivations en faveur de ces axiomes, sans les partager pour autant. Il considère pour sa part que « CH est un problème intrinsèquement vague » et « ne voit rien qui indique la nécessité de nouveaux axiomes pour décider des problèmes ouverts d'arithmétique ou de combinatoire finie » (1999).

contemporaine la plus célèbre dans cette direction⁴⁹, et Woodin (2002) semble bien souscrire à une interprétation platoniste de ses travaux.

Notons les points de recoupement : les critères de type « succès » sont aussi bien admissibles par un platonisme faible (en tant qu'ils relèvent d'une bonne pratique de théorisation et qu'ils sont appliqués à ZF vue comme partie de la totalité du système de la science) que par le platonisme fort (en tant qu'indices de la vérité des axiomes). Mais l'application du critère de succès n'est pas évidente, et il est remarquable de constater que, de fait, Quine et Gödel divergent dans leur préférence quant aux extensions de ZF. Pour Quine, l'axiome de constructibilité se recommande par son succès à rendre ZF ontologiquement économe. Pour Gödel, les axiomes de grands cardinaux se recommandent à la fois par leur évidence et par leurs conséquences mathématiques⁵⁰. Peut-être cette divergence témoigne-t-elle de ce que la conception philosophique sous-jacente biaise les jugements concernant ce qu'est une extension naturelle de ZF. Si l'existence des ensembles découle de ce que nos théories les disent exister, les considérations de minimalité vont « naturellement » l'emporter (mieux vaut faire autant avec moins). Si à l'inverse l'existence des ensembles n'est pas postulée par notre activité théorique mais gagée sur un univers platonicien d'entités mathématiques, les considérations de maximalité vont « naturellement » l'emporter (tous les ensembles dont l'existence n'entraîne pas de contradiction existent).

Par ailleurs, les positions réalistes se distinguent des autres en soutenant qu'il existe potentiellement *une* bonne réponse à la question de savoir si CH est vrai. Mais ceci suppose qu'il existe *un* univers des ensembles. Récemment, des versions beaucoup plus libérales du platonisme ont été proposées. Balaguer (1998) défend ce qu'il appelle un « platonisme robuste » (*full-blooded platonism*) selon lequel toute entité mathématique qui pourrait exister existe actuellement⁵¹. Si la cohérence suffit à garantir la possibilité d'existence, il s'ensuit notamment qu'il existe un univers des ensembles dans lequel CH est vrai et un autre dans lequel CH est faux. Hamkins (2010) défend également l'idée qu'il existe une pluralité d'univers ensemblistes, en partant du constat selon lequel « l'interprétation la plus naturelle des outils ensemblistes les plus puissants développés au cours des cinquante dernières années est qu'ils permettent de construire des univers ensemblistes alternatifs. » De telles versions du réalisme brouillent les frontières avec l'antiréalisme, au moins quant aux

⁴⁹ L'idée de Woodin n'est pas exactement de montrer qu'un certain axiome remarquable par son évidence ou ses conséquences décide CH, mais, de façon plus indirecte que *tout* axiome ayant un certain effet (à savoir, neutraliser l'action du forcing jusqu'au niveau des ensembles de taille \aleph_1) décide (négativement) CH. Pour une présentation exotérique du programme de Woodin et de ses implications philosophiques, voir Dehornoy (2007).

⁵⁰ Nous simplifions ici, dans la mesure où Gödel reconnaît lui-même qu'il n'en va pas de même pour tous les axiomes de grands cardinaux, voir en particulier (1964, note 20).

⁵¹ Spécifier plus précisément le principe de maximalité qui est constitutif du platonisme robuste n'est pas sans poser des problèmes (voir notamment Restall, 2003).

conséquences pratiques à tirer de l'opposition entre réalisme et anti-réalisme.⁵²

5 Pourquoi ne pas être platoniste

5.1 Le dilemme de Benacerraf

La principale objection au platonisme est celle de l'accès épistémologique : comment connaissons-nous les entités abstraites dont les propriétés rendent vrais ou faux les énoncés mathématiques ? Cette objection constitue une moitié du dilemme proposé par Paul Benacerraf dans son article célèbre « Mathematical Truth » (1973) : au-delà du cas du platonisme, le problème posé par Benacerraf se présente comme une des difficultés majeures que doit résoudre la philosophie des mathématiques. Le dilemme naît de la rencontre de deux contraintes qui entrent en conflit. Il s'agit :

« (1) [du] souhait d'avoir une théorie sémantique homogène dans laquelle la sémantique des propositions des mathématiques est parallèle à la sémantique du reste du langage, et (2) [du] souhait de faire en sorte que la conception adoptée de la vérité mathématique se marie avec une épistémologie raisonnable » (1973, p. 661)

Voyons plus précisément quelles sont ces deux contraintes, l'une sémantique et l'autre épistémologique. Premièrement, la théorie sémantique standard nous dit qu'un énoncé comme « Il y a vingt-cinq ponts entre le pont de Grenelle et le pont de Sully » est vrai si et seulement il y a vingt-cinq objets distincts qui ont une certaine propriété, à savoir « être un pont » et qui sont dans une certaine relation avec le pont de Grenelle et le pont de Sully, à savoir « être situé physiquement entre ». Si l'on adopte une théorie sémantique semblable pour les énoncés mathématiques, on doit dire qu'un énoncé comme « Il y a vingt cinq nombres premiers entre un et cent » est vrai si et seulement il y a vingt-cinq objets distincts qui ont une certaine propriété, à savoir « être un nombre premier » et qui sont dans une certaine relation avec un et cent, à savoir « être classé entre ».

Deuxièmement, une épistémologie raisonnable dit que pour x savoir que p , il faut qu'il existe une certaine connexion causale entre ce dont parle p et les raisons pour lesquelles x croit que p . Si Jean croit que les ornithorynques hibernent, mais que nous savons que Jean n'a eu aucun contact direct ou indirect avec des ornithorynques (il n'en a jamais vus et il n'a jamais reçus aucune

⁵² Balaguer admet que le platonisme robuste et le fictionnalisme se retrouvent dos à dos : « le projet métaphysique, c'est-à-dire le projet consistant à utiliser des considérations empruntées à la théorie et à la pratique mathématiques pour résoudre le problème métaphysique des objets abstraits, est voué à l'échec » (1998, p. 158, nous soulignons). Hamkins semble être plus unilatéralement platoniste, dans la mesure où il conçoit les méthodes telles que le forcing comme des moyens pour explorer des univers ensemblistes différents.

information à propos d'eux), alors nous pouvons dire sans aucun doute que Jean ne sait pas que les ornithorynques hibernent, et ce indépendamment de la question de savoir si les ornithorynques hibernent ou non.

Il y a dilemme car il semble que satisfaire le desideratum (1) conduit à ne pas satisfaire le desideratum (2), et inversement. Les conceptions qui ramènent la vérité à la prouvabilité dans un système formel satisfont (2) ; si être vrai, c'est être prouvable, il suffit bien d'avoir une preuve d'un énoncé pour savoir que cet énoncé est vrai. Mais de telles conceptions ne satisfont pas le réquisit (1) : être vrai, en général, ce n'est pas simplement pouvoir être obtenu comme dernier élément d'une certaine suite de symboles constituant une preuve formelle. Le platonisme est dans la situation inverse. S'il existe un univers d'entités mathématiques, il est bien possible de donner une sémantique standard pour les énoncés mathématiques. Ceux-ci sont vrais s'ils décrivent cet univers de façon adéquate, comme il a été indiqué. Le desideratum (1) est satisfait. Mais c'est (2) qui pose problème : si les objets mathématiques sont des objets abstraits situés hors de l'espace et du temps, quel genre de connexion pourrions-nous avoir avec ces objets ? Selon (2), pour qu'une croyance vraie compte comme connaissance, il est nécessaire que ce qui rend cette croyance vraie soit causalement responsable de cette croyance. Mais les objets abstraits, qui ne sont pas situés dans l'espace et dans le temps, sont causalement inertes.

Pour échapper au dilemme, le platoniste doit fournir une explication du lien entre nos facultés cognitives et les objets connus. Mais comme le souligne Benacerraf, la simple position d'une intuition mathématique ne constitue pas une réponse au problème. Gödel imagine une analogie entre la perception mathématique et la perception sensible. Mais dans le cas de la perception sensible, nous avons au moins un début d'explication de la connexion qui existe entre les objets physiques et nos croyances perceptuelles à leur égard ; nous pouvons expliquer comment les objets physiques produisent telle ou telle impression sensorielle, et les sciences de la cognition s'emploie à expliquer comment les impressions sensorielles produisent telle ou telle perception. Il n'existe rien de tel dans le cas de la perception mathématique. Pire, si l'on accepte la thèse de l'inertie causale des objets abstraits, il semble même qu'il ne puisse y avoir par principe de telles connexions.

Le dilemme de Benacerraf, ou plutôt la moitié du dilemme qui consiste à commencer par satisfaire (1), semble constituer avant tout une objection au platonisme fort. En effet, le platonisme fort soutient qu'une épistémologie des mathématiques raisonnable doit faire dépendre notre connaissance des vérités mathématiques d'un accès épistémique aux objets dont l'existence a été affirmée. C'est là que commencent ses problèmes. Le platoniste faible refuse de faire ce pas : il gage une épistémologie raisonnable des mathématiques sur une épistémologie raisonnable de la

totalité de notre théorie du monde, en refusant de lier notre connaissance mathématique aux objets mathématiques. Nous savons ce que nous savons à propos des entités mathématiques simplement parce que les théories qui systématisent ce savoir sont indispensables à la science, et sont donc justifiées comme le reste de la science par les divers succès de la science. Field (1989) a proposé une version du dilemme de Benacerraf destinée à valoir objection non seulement contre le platoniste fort mais aussi contre le platoniste faible⁵³. Selon Field, une épistémologie raisonnable des mathématiques doit expliquer la fiabilité de nos connaissances mathématiques. Field veut dire par là qu'il ne suffit pas de rendre compte de ce que la croyance dans l'existence d'entités mathématiques est justifiée, ou que telles croyances particulières à propos de ces entités sont justifiées, il faut également « rendre compte des mécanismes qui expliquent comment nos croyances à propos de ces entités peuvent si bien refléter les faits les concernant » (1989, p. 26). Le platonisme faible peut rendre compte de ce que les théories mathématiques sont justifiées, mais peut-il rendre compte de leur fiabilité ? Il semble que la neutralité épistémologique du platonisme faible l'en empêche : précisément parce que les objets mathématiques sont projetés à partir de nos théories, il n'y a pas de place pour un mécanisme expliquant l'adéquation entre nos croyances mathématiques et les faits mathématiques. On pourrait dire les choses de la façon suivante. Le platonisme faible peut se croire à l'abri d'une objection fondée sur le problème de l'accès, parce qu'il est épistémologiquement neutre. Field rétorquerait que cette neutralité est aussi un problème. Le platonisme fort, épistémologiquement chargé, propose une explication contestable de la fiabilité. Le platonisme faible, épistémologiquement neutre, ne propose pas du tout d'explication de la fiabilité. Le platonisme faible ne fait donc pas mieux que le platonisme fort. Reste la possibilité pour un platoniste faible d'une réponse déflationniste : il n'y aurait pas à expliquer la fiabilité de nos croyances mathématiques précisément parce que la réalité mathématique n'est que la projection de théories qui font par ailleurs (en tandem avec des théories empiriques) preuve de leur réussite⁵⁴. En ce sens, la critique de Field repose sur une pétition de principe : Field reproche au platonisme faible de ne pas donner une explication que le platonisme faible a dès le départ choisi de ne pas donner.

5.2 Arguments contre le platonisme faible

Le platonisme faible passe mieux, si l'on peut dire, le test constitué par le dilemme de Benacerraf, que le platonisme fort. Pour autant, le choix d'adosser entièrement l'épistémologie des mathématiques à une épistémologie holiste entraîne d'autres difficultés, que nous allons discuter

⁵³ Un autre mérite de la formulation de Field est de ne pas dépendre de l'adoption d'une théorie causale de la connaissance. Voir également Casullo (1992).

⁵⁴ Pour une autre réponse au dilemme de Benacerraf dans une perspective quinienne, voir Steiner (1975).

maintenant. La première difficulté est liée à l'évidence des mathématiques élémentaires. Le platonisme faible met les mathématiques sur le même plan que les parties les plus théoriques des sciences de la nature. Si l'on suit la conception holiste de Quine, les vérités mathématiques sont des énoncés situés au « centre » de notre schème conceptuel, tenus éloignés de toute confrontation directe avec l'expérience ; elles n'ont de justification qu'indirecte, via les longues chaînes d'inférences qui les relient à l'expérience. Comme le remarque Parsons (1980), cela permet au réalisme quinen d'éviter certains excès de l'empirisme de Mill (il n'est plus nécessaire d'interpréter tout énoncé mathématique comme une certaine généralisation empirique, voir à ce sujet la section 1 du présent article). Cependant, cette assimilation ne fait pas pour autant justice aux spécificités apparentes des vérités mathématiques. Les parties les plus théoriques de la science consistent en des hypothèses audacieuses pour unifier des ensembles de phénomènes à l'aide de lois les plus simples possibles. Mais il est difficile de mettre sur le même plan « $2+2=4$ » et « $E=mc^2$ ». « $2+2=4$ » n'est pas une hypothèse audacieuse, c'est une vérité élémentaire à propos des nombres entiers. Pour Parsons, l'évidence des vérités mathématiques élémentaire ne peut s'expliquer que si nous disposons d'un accès privilégié à ces vérités :

« Nous considérons comme un fait brut concernant l'arithmétique qu'un large corps de vérités arithmétiques nous est connu d'une manière plus directe que ne le sont les connaissances que nous acquérons sur la base de raisonnements empiriques. [...] Quoi de plus naturel que l'hypothèse selon laquelle nous avons une connaissance directe de ces vérités parce que ces objets nous sont donnés, d'une manière ou d'une autre, de façon directe ? » (1980, p. 152)

Postuler un accès privilégié aux vérités mathématiques élémentaires implique de renoncer à la neutralité épistémologique du platonisme faible. Le danger est alors de retomber dans les objections rencontrées par le platonisme fort. Une autre option est de rejeter l'objection en refusant qu'un accès épistémique privilégié soit la seule explication de ce sentiment d'évidence. Dans une perspective empiriste, il n'y a aurait là qu'illusion. Mill soulignait déjà que les vérités arithmétiques élémentaires nous sont connues « par une expérience précoce et ininterrompue » (1843, VI, §2). De façon parallèle, un naturaliste quinen pourrait soutenir qu'il appartient à la psychologie cognitive d'expliquer ce sentiment d'évidence en éclairant les mécanismes de la cognition mathématique.

À l'autre bout de la chaîne, une autre difficulté concerne le statut des mathématiques non-appliquées. Si la portée ontologique des théories mathématiques est toute entière dérivée de leur utilisation dans les sciences de la nature, il s'ensuit que les théories, ou les fractions de théories, mathématiques qui ne sont pas utilisées dans les sciences de la nature n'ont pas de portée

ontologique. Voici ce que dit Quine, dans le prolongement des questions que nous avons discutées à propos de la théorie des ensembles :

« Les mathématiques ont pour moi le même statut que le reste de la science dans la mesure où il y est fait appel dans les sciences empiriques. Il en va de même pour les ramifications transfinies tant qu'elles constituent un achèvement et une simplification, mais tout ce qui va au-delà a plutôt le même statut que les systèmes ininterprétés. » (1984, p. 788)

Autrement dit, les mathématiques relèvent d'un double régime. Dans le cas de systèmes ininterprétés, les mathématiciens montrent que tels théorèmes suivent de tels axiomes, mais ils ne montrent pas que ces théorèmes sont vrais, et il n'y a pas de raison de supposer qu'existent des entités ayant les propriétés décrites par les axiomes. Dans le cas de systèmes interprétés, les axiomes sont à propos de certains objets (les entiers, les réels, les ensembles, etc.), et en montrant un théorème, le mathématicien montre que quelque chose est vrai à propos de ces objets. Mais, si l'on suit la logique du platonisme faible, un système mathématique n'acquiert le statut de système interprété que lorsqu'il est appliqué, c'est-à-dire lorsqu'il est intégré à la totalité de la science : il n'y a pas de systèmes interprétés, décrivant les propriétés de certains objets mathématiques, indépendamment d'une utilisation de ces systèmes en tandem avec des théories physiques. La distinction entre systèmes interprétés et systèmes ininterprétés est ainsi rabattue sur la division entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Le naturalisme quinen conduit potentiellement à introduire des différences ontologiques⁵⁵ là où les mathématiciens n'en posent pas. Comme le souligne Leng, une théorie mathématique qui ne trouve pas les applications promises verra peut-être l'intérêt qu'elle suscite décliner, elle n'en sera pas pour autant considérée comme fautive ou rejetée. L'applicabilité « ne fera aucune différence quant à la manière dont un mathématicien travaille à l'intérieur de cette théorie » (2002, p. 408)⁵⁶. Reste qu'un naturaliste quinen peut répondre que les questions d'ontologie excèdent justement les compétences du mathématicien, puisque qu'elles doivent toujours être posées relativement à notre meilleur système théorique global.

Une dernière objection, qui élabore en partie la précédente, consiste à remarquer que la position de Quine et de Putnam ne tient pas compte du fait que les mathématiciens ont recours à des pratiques de justification qui leur sont propres. Comme l'observe Maddy (2005), le naturalisme de

⁵⁵ Cette assimilation est d'autant plus problématique que la fraction des mathématiques nécessaires pour la science est vraisemblablement limitée. Sur la question de l'étendue des mathématiques utilisées dans les sciences de la nature, voir, outre les débats déjà mentionnés concernant le programme de Field, Feferman (1993).

⁵⁶ Leng prend l'exemple de la théorie des catastrophes. Pour une défense et une élaboration de la distinction entre des mathématiques « récréatives » et des mathématiques constituant d'authentiques connaissances, voir Colyvan (1998, 2007).

Quine se caractérise par un biais en faveur des sciences empiriques. Quine considère que la science doit être vue comme une totalité, justifiée de façon holiste par ses succès empiriques. Mais l'on peut au contraire être sensible à la diversité des disciplines qui constituent la science. La méthode des mathématiciens n'est pas la méthode des physiciens. Si le naturalisme consiste pour le philosophe à renoncer à la philosophie première, c'est-à-dire à ne pas chercher à être « plus malin » que les scientifiques, alors le philosophe ne devrait en particulier pas chercher à être plus malin que les mathématiciens en attribuant aux mathématiques des standards de justifications qui leur sont étrangers. Cette objection revient à retourner l'argument du double standard. L'argument d'indispensabilité reposait sur l'idée qu'on ne devait pas adopter un double standard à l'égard des engagements existentiels de nos théories. L'objection de Maddy à la position de Quine repose sur l'idée qu'on ne devrait pas adopter un double standard concernant le respect de la méthodologie des scientifiques. Une réponse possible consiste à contester l'existence d'un fossé entre les méthodes des mathématiques et les méthodes des sciences de la nature. On peut soutenir, comme Putnam, que « nous avons toujours utilisé des méthodes quasi-empiriques ou empiriques en mathématiques » (1975, p. 64). Putnam prend l'exemple de la naissance de la géométrie analytique. Descartes postule qu'un nombre – un nombre réel – correspond à tout point sur la droite. Cette hypothèse sera adoptée car elle s'avère payante, aussi bien pour les mathématiques pures que pour les mathématiques appliquées (en l'occurrence à la mécanique). Ces points communs s'étendent aux éléments non-directement empiriques de la méthodologie scientifique. Kitcher soutient par exemple que la théorie unificationniste de l'explication permet de rendre compte à la fois des explications mathématiques et des explications dans les sciences de la nature. Kitcher prend l'exemple du rôle explicatif du système d'axiomes caractérisant une théorie, en l'occurrence la théorie des groupes :

« Les axiomes couramment utilisés en théorie des groupes s'appliquent à la fois aux groupes finis et aux groupes infinis, de sorte que nous pouvons fournir des dérivations des théorèmes fondamentaux qui suivent un même schéma, alors qu'un choix d'axiomes spécifiques pour la théorie des groupes finis engendrerait un traitement moins unifié dans lequel différents schémas pourraient être employés dans le cas fini et dans le cas infini. » (1989, p. 457)

Les vertus unificatrices qui rendent raison du choix des axiomes de la théorie des groupes sont, pour Kitcher, tout à fait semblables aux vertus unificatrices qui rendent raison par exemple du choix des principes de la mécanique. Cependant, c'est une chose de rappeler que la méthodologie des mathématiques et celle des sciences empirique n'est pas aussi éloignée qu'on pourrait le croire.

C'en est une autre de soutenir qu'aucune différence importante entre les deux ne se recommande à l'attention des naturalistes. Kitcher par exemple peut défendre l'idée selon laquelle un même concept d'explication vaut aussi bien en mathématiques qu'en physique. Mais cela n'implique pas que les faits à expliquer, selon qu'il est question de physique ou de mathématiques, soient de même nature. De même, les exemples empruntés par Putnam à l'histoire des mathématiques montrent que les applications en dehors des mathématiques peuvent jouer un rôle moteur dans le développement des mathématiques. Pour autant, il est bien clair qu'il n'en va pas toujours ainsi, et que de nombreux développements théoriques en mathématiques reposent sur des considérations purement mathématiques.

6. Naturaliser le platonisme

6.1 Voyons-nous des ensembles ?

Le platonisme fort en fait trop : il postule un monde d'entités mathématiques et une intuition mathématique *sui generis* pour garantir à la fois la vérité des mathématiques classiques et notre accès épistémique à ces vérités. Le platonisme faible en fait trop peu : l'argument d'indispensabilité garantit la vérité des mathématiques classiques, mais les différences entre les pratiques de justification en mathématiques et en sciences de la nature ne sont pas reconnues. Il apparaît alors tentant de chercher une voie moyenne, qui, tout en gageant la vérité des mathématiques sur leur mise en œuvre dans les sciences, rendrait compte des spécificités des modes de justification en mathématiques. Il s'agirait en particulier de reconnaître le rôle joué par une intuition mathématique acceptable selon les normes du naturalisme. Une telle voie moyenne est empruntée par Maddy (1990) qui promeut une version naturalisée du platonisme fort. Maddy soutient qu'une philosophie des mathématiques naturaliste n'a pas à s'arrêter à l'argument d'indispensabilité et que l'intuition mathématique n'est pas incompatible avec le naturalisme. L'idée de Maddy est qu'il n'y a pas de raisons, s'agissant des ensembles au moins, de dissocier intuition mathématique et perception. Nous ne faisons pas que percevoir des couleurs, des formes ou des objets, nous percevons aussi des ensembles d'objets. S'agissant de la théorie des ensembles au moins, l'intuition mathématique résiderait ainsi dans notre capacité à percevoir des ensembles.

Examinons les tenants et les aboutissants de cette naturalisation proposée de l'intuition mathématique en reprenant un exemple de Maddy (1990). Selon Maddy, lorsque Steve ouvre la porte du réfrigérateur à la recherche d'œufs pour une certaine recette et qu'il voit trois œufs dans la boîte à œufs, ce qu'il voit c'est bien un ensemble de trois œufs. Dire que Steve perçoit un *ensemble*

de trois œufs, c'est s'engager sur plusieurs points problématiques. Premièrement, c'est reconnaître que les ensembles existent (sinon, ils ne sauraient être perçus). Deuxièmement, c'est admettre que les ensembles impurs (ceux qui ne sont pas formés à partir de l'ensemble vide mais à partir d'ensembles d'objets physiques) ont une existence spatio-temporelle « ordinaire » (l'ensemble de trois œufs cessera d'exister au moment où Steve cassera le premier œuf). Troisièmement, la croyance qu'il y a trois œufs doit être une croyance perceptuelle, qui n'est pas fondée sur des inférences⁵⁷. Quatrièmement, la croyance à propos des trois œufs est bien une croyance à propos d'ensembles (et pas à propos d'agrégats, ou à propos de sommes méréologiques, etc.). A l'appui du premier et du quatrième point, le naturaliste peut invoquer l'argument d'indispensabilité : nous devons de toute façon supposer qu'il y a des ensembles, car la théorie des ensembles fait partie de nos meilleures théories scientifiques, et si nous devons considérer qu'il y a des ensembles plutôt que des agrégats ou des sommes méréologiques, c'est parce que c'est la théorie des ensembles, plutôt qu'une théorie des agrégats ou une méréologie, qui est utilisée dans nos meilleures théories scientifiques. Le second point est le prix à payer pour la naturalisation du platonisme. Pour naturaliser l'intuition ensembliste, il faut accepter de placer les ensembles dans le monde physique. Le troisième point est le point sur lequel le naturaliste s'engage en tant que naturaliste : pour que la croyance de Steve selon laquelle il y a trois œufs dans la boîte puisse être considérée comme une croyance perceptuelle, il faut que Steve puisse *percevoir* trois œufs ou un ensemble de trois œufs. La perception élabore les données sensorielles pour nous donner à voir un monde d'objets. Pour que Steve puisse percevoir trois œufs, il faut que, de même, la perception élabore les données sensorielles pour nous donner à voir un monde d'ensembles.

« L'espoir est que l'on puisse observer que quelque chose qui ressemble à ce qui fait le pont dans le cas de la perception des objets physiques joue le même rôle dans le cas de la perception des ensembles. » (Maddy, 1990, p. 50)

Maddy parle d'espoir ; de fait, la naturalisation de l'intuition ensembliste reste programmatique.

Dans la perspective du naturalisme de Quine, entités inobservables, objets physiques et objets mathématiques partagent un même statut de mythes, pour parler comme Quine, élaborés pour afin de rendre compte de l'expérience⁵⁸. Mais les objets mathématiques restaient, comme les électrons ou les quarks, un mythe *d'ordre supérieur*, destiné à simplifier le mythe des objets

⁵⁷ Si l'on considère que la croyance est inférentielle, il faut expliquer ce qui justifie ces inférences, et l'on court un risque de régression, sans que cette option soit pour autant tout à fait fermée.

⁵⁸ « une ontologie platoniste [...] est du point de vue d'un schème conceptuel strictement physicaliste autant un mythe que l'est le schéma physicaliste lui-même pour le phénoménalisme. Ce mythe d'ordre supérieur est, à son tour, bon et utile où il simplifie la manière dont nous rendons compte de la physique » (Quine, 1953a).

physiques. Ce qui distingue les objets physiques comme les pommes ou les chaises, en tant que mythes de premier ordre, des entités inobservables comme les électrons ou les quarks, en tant que mythes d'ordre supérieur, c'est que les premiers, mais pas les seconds, sont directement partie prenante de l'expérience que nous avons du monde. Le mythe en est déjà élaboré au niveau de la perception. Le programme de Maddy consiste à montrer que, dans une certaine mesure au moins, les ensembles sont des mythes de premier niveau, et pas des mythes d'ordre supérieur comme le considérait l'orthodoxie quinienne.

Les ensembles peuvent être considérés comme les éléments de base des mathématiques contemporaines, dans la mesure où l'ensemble de ces mathématiques peuvent être, au moins en principe, reconstruites dans la théorie des ensembles. Néanmoins, il est beaucoup moins évident que l'intuition des ensembles puisse être considérée comme l'élément de base de l'intuition mathématique, ou que toute intuition mathématique soit fondée sur une intuition de nature ensembliste. Il y a là un élément problématique dans la démarche naturaliste de Maddy, élément qui réside dans l'articulation promise entre l'argument d'indispensabilité et la naturalisation de l'intuition. Il n'y a pas *a priori* de raison pour que les deux s'accordent parfaitement, c'est-à-dire qu'il n'y a pas *a priori* de raison pour que ce qui est la base des mathématiques dans notre meilleure théorie du monde (à savoir l'univers des ensembles tel qu'étudié par la théorie des ensembles) soit en même temps l'objet de notre intuition mathématique. Après tout, la théorie des ensembles est une théorie mathématique tardive et fonder cette théorie sur une capacité perceptive semble plus problématique que dans le cas de théories comme l'arithmétique ou la géométrie.

6.2 Structuralisme et intuition

Une piste prometteuse consisterait à généraliser la stratégie de Maddy en élargissant le programme de naturalisation de l'intuition mathématique hors de la théorie des ensembles. La difficulté est alors de rendre compatible notre conception de ce que sont les objets mathématiques (en tant qu'objets) et une conception naturaliste de l'intuition de ces objets gagée sur la perception sensible. Si les nombres doivent être des objets comme des pommes ou des chaises, il n'est que trop clair que nous ne percevons pas de nombres. Plus positivement, quelle conception de la nature des objets mathématiques faut-il adopter pour qu'il soit possible de fonder en partie notre accès épistémique à ces nombres sur la perception sensible ?

Dans la philosophie des mathématiques contemporaines, le structuralisme – une étiquette aujourd'hui populaire qui regroupe des positions pour partie hétérogènes⁵⁹ – est la conception qui

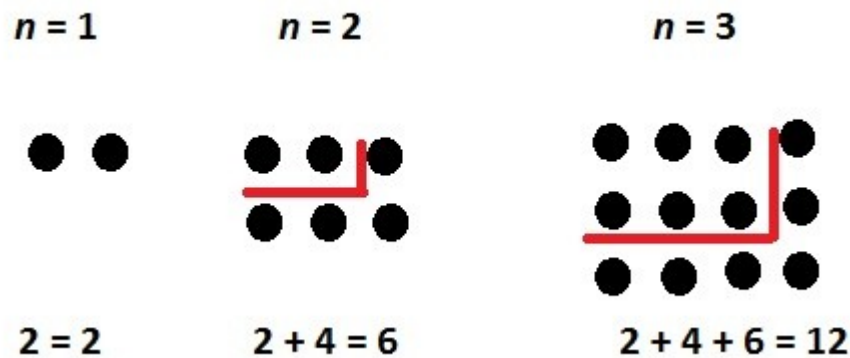
⁵⁹ Le structuralisme est associé à des auteurs comme Benacerraf (1965), Hellman (1989), Resnik (1997), Shapiro (1997)

semble la mieux à même de constituer une réponse à la question précédente. L'idée commune aux différentes formes de structuralisme est que faire des mathématiques, c'est étudier des structures et que les objets mathématiques comme les nombres ne sont que des positions dans des structures. Dans les termes de Resnik :

« le sujet principal des mathématiques n'est pas les objets mathématiques individuels mais plutôt les structures selon lesquelles ils sont arrangés. Les objets des mathématiques [...] sont eux-mêmes des atomes, des points sans structure ou des positions dans des structures. Et en tant que tels, ils n'ont pas de propriétés distinctives ou de propriétés permettant de les identifier en dehors d'une structure. » (1997, p. 201).

La conception structuraliste permet de gager une intuition mathématique sur la perception dans la mesure où nous sommes capables de percevoir non seulement des objets mais aussi des formes (nous traduisons l'anglais *patterns*). Notre lien perceptif avec les structures mathématiques réside dans notre capacité à percevoir la manière dont les objets physiques sont organisés dans la mesure où les systèmes d'objets peuvent instancier des structures mathématiques. Lorsqu'un système d'objets physiques est organisé d'une manière qui correspond à certaines propriétés structurelles d'objets mathématiques, notre perception de ce système d'objets physiques peut nous informer des propriétés structurelles des objets mathématiques. Resnik illustre ce point en prenant l'exemple du théorème arithmétique élémentaire qui dit que la somme des n premiers entiers pairs est $n(n + 1)$. Il est possible de montrer formellement ce théorème en le dérivant à partir des axiomes de Peano, mais il est également possible d'en donner une preuve intuitive, qui repose sur la possibilité d'arranger des points représentant la somme des n premiers entiers pairs en rectangle de longueur $n + 1$ et de largeur n .

ou, de façon plus nuancée, Parsons (2008). Historiquement, Dedekind (1991) est souvent présenté comme le premier structuraliste. Pour preuve cette caractérisation des nombres naturels : « si, en considérant un système N simplement infini ordonné par une fonction φ , on fait abstraction de la nature spécifique des éléments pour ne conserver que la possibilité de les distinguer, et si l'on ne prend en compte que les relations qu'ils entretiennent en vertu de la fonction φ qui les ordonne, alors ces éléments sont appelés *nombres naturels* [...] » (1911, §73).



La propriété structurelle cruciale est ici que le n -ième rectangle est obtenu en ajoutant $2n$ points au rectangle précédent, de sorte que le nombre de points du n -ième rectangle donne bien la somme des n premiers entiers pairs.

Le lien entre connaissance mathématique et perception doit être nuancée à au moins deux titres. Premièrement, il ne faut pas accorder aux structuralistes plus qu'ils n'ont montré. La capacité à « identifier des formes » (nous traduisons l'anglais *pattern recognition*) est supposée, et son explication plus détaillée est laissée à la psychologie⁶⁰. Néanmoins, le structuraliste ne doit pas se satisfaire trop vite d'une division naturaliste des tâches selon laquelle le travail du philosophe des mathématiques serait de montrer en quel sens les objets mathématiques ne sont que des positions dans des structures tandis que le travail du psychologue serait de mettre à jour les mécanismes de l'identification des formes. Il faut encore établir d'une part que le genre de choses que sont les structures mathématiques, au sens du philosophe des mathématiques, est susceptible d'être instancié par le genre de choses que sont les formes, au sens du psychologue, et d'autre part que lorsque notre connaissance mathématique s'appuie sur des éléments empiriques, c'est bien l'identification de formes au sens précédent qui est en jeu.

Deuxièmement, l'intuition mathématique gagée sur la simple perception ne saurait constituer notre seul mode d'accès aux structures mathématiques. Les systèmes discrets que nous percevons sont des systèmes finis qui ne peuvent instancier que des structures finies, mais les mathématiques n'étudient évidemment pas que des structures finies. Dans l'exemple précédent, un élément crucial de la démonstration est la supposition qu'il est toujours possible d'itérer l'arrangement des points en rectangles comme il est toujours possible de passer d'un nombre pair au suivant. La nature de la capacité que nous possédons de voir les suites de rectangles dessinés comme pouvant être prolongées n'est pas à ce jour expliquée. Les structuralistes, comme par exemple Shapiro (1997, chapitre 4), admettent, à côté de l'accès via la perception et l'identification

⁶⁰ Par exemple, Shapiro : « l'identification des formes représente un problème persistant pour la psychologie et les sciences cognitives. Il n'existe pas de consensus parmi les scientifiques quant à son fonctionnement. Cependant, il est clair que les humains peuvent identifier au moins certaines formes. » (1997, p. 12).

des formes, d'autres modes d'accès aux structures (typiquement, les structures peuvent être définies implicitement comme satisfaisant certains axiomes). A nouveau, l'articulation entre ces différents modes d'accès demanderait à être expliquée.

6.3 Arguments en faveur du structuralisme

Le structuralisme ne se recommande pas uniquement pour les raisons épistémologiques que nous venons de développer. De fait, l'argument le plus fréquemment mis en avant en faveur du structuralisme n'est sans doute pas cet argument épistémologique mais un argument proprement ontologique du à Benacerraf (1965). Le point de départ de l'argument consiste à remarquer qu'il existe deux manières habituelles d'identifier les nombres naturels en théorie des ensembles. La première manière est due à Zermelo, l'autre à von Neumann. Dans les deux cas, zéro est identifié à l'ensemble vide. La procédure de Zermelo consiste ensuite à identifier $n + 1$ avec l'ensemble dont l'unique élément est n . La suite des nombres de Zermelo est donc $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\},$ etc. La procédure de von Neumann consiste quant à elle à identifier $n + 1$ avec l'ensemble de ses prédécesseurs. La suite des nombres de von Neumann est donc $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$ etc. L'argument de Benacerraf repose sur le fait que si les nombres sont des objets « comme les autres », alors ils doivent être soit les nombres de Zermelo, soit les nombres de von Neumann (soit d'autres objets encore). Mais si par exemple les nombres sont les nombres de von Neumann, alors il est vrai que 0 appartient à 3, alors que c'est faux si les nombres sont les nombres de Zermelo. Et si les nombres ne sont ni les objets identifiés par Zermelo ni ceux identifiés par von Neumann mais encore d'autres objets, alors ils auront certainement encore d'autres propriétés distinctives que ne possèdent ni les nombres de Zermelo ni ceux de von Neumann⁶¹. Le problème est que choisir entre les nombres de Zermelo ou les nombres de von Neumann, ou entre eux et tout autre système ne fait pas sens. De même, décider si 0 appartient ou n'appartient pas à 4 ne fait pas sens. Si l'on ne veut pas choisir entre les entiers de von Neumann et les entiers de Zermelo, on a envie de dire qu'ils sont d'aussi bons candidats dans la mesure où ilsinstancient la structure des nombres naturels. Pour le dire d'une formule, les entiers ne sont ni les entiers de Zermelo ni ceux de von Neumann mais ce qu'ils ont en commun, à savoir certaines propriétés structurelles.

Outre l'argument de Benacerraf, le structuralisme peut revendiquer son adéquation à la

⁶¹L'argument de Benacerraf est d'abord un argument contre la thèse selon laquelle les nombres sont des ensembles d'un certain genre. L'extension de l'argument en un argument plus général établissant que les nombres ne peuvent être ni des ensembles ni n'importe quels objets au sens habituel est plus problématique. Ce qu'on entend par « objets au sens habituel » est vague, et il faudrait le rendre précis pour pouvoir évaluer l'hypothèse cruciale à la correction de l'argument, à savoir que quels que soient les objets au sens habituel choisis, on rencontrera des problèmes liés aux propriétés supplémentaires (indépendantes de la structure des entiers) de ces objets.

pratique des mathématiciens (Reck et Price, 2000). De fait, les mathématiciens étudient les propriétés structurelles des entités auxquelles ils s'intéressent abstraction faite de la nature spécifique de ces entités. On en trouvera de nombreux témoignages. Dans l'histoire des mathématiques, le fait apparaît notamment à travers les entreprises de réduction. Plusieurs définitions des nombres réels comme ensembles de nombre rationnels ont été proposées (comme coupures de Dedekind ou comme classes d'équivalence de suites de Cauchy). Comme dans l'exemple de Benacerraf, il n'y a pas une définition qui soit meilleure que l'autre, car dans tous les cas, les nombres réels définis ont les propriétés structurelles attendues, et peu importe que la nature spécifique de tel nombre réel soit d'être identifiée à tel ensemble de rationnels et pas à tel autre. L'algèbre abstraite est un autre exemple frappant : on s'intéresse aux groupes, aux anneaux, aux corps pour en étudier les propriétés générales et les classer. De nombreux systèmes différents peuvent instancier une structure de groupe. A chaque fois, seules importent les propriétés qu'ont ces systèmes en tant que groupes (anneaux, ou corps). De même, en logique mathématique, les langages utilisés pour formaliser les théories mathématiques sont tels que deux structures d'interprétation qui sont isomorphes satisfont les mêmes énoncés. Il est remarquable que ceci vaut aussi bien pour les langages classiques du premier ordre, pour les extensions de la logique du premier ordre par ajout de nouveaux quantificateurs que pour les logiques d'ordre supérieur. Si être isomorphe implique satisfaire les mêmes énoncés, c'est que seules comptent les propriétés des structures préservées par isomorphismes, c'est-à-dire seules comptent les propriétés « structurelles » des structures⁶².

6.4 Variétés du structuralisme

La position structuraliste, telle que nous l'avons présentée jusqu'ici, reste sous-déterminée. Nous avons dit que les mathématiques étudiaient des structures avant d'étudier des objets, au sens où seules les propriétés structurelles des objets sont pertinentes pour la vérité ou la fausseté des énoncés mathématiques. Nous n'avons pas dit ce que sont les structures étudiées, et quel est le rapport entre objets et structures. Une manière d'aborder le sujet consiste à demander ce qui rend vrai un énoncé mathématique. Considérons par exemple l'énoncé φ du langage de l'arithmétique « il existe une infinité de nombres premiers ». Selon une première variante du structuralisme, φ est vrai si et seulement si la structure des entiers naturels rend vraie φ . Par structure des entiers naturels, il faut entendre

⁶² Que la formule sonne comme un pléonasme ne signifie pas que le fait soit trivial : si on peut parler de *structures* d'interprétation, c'est précisément parce que seules comptent les propriétés structurelles des interprétations.

« une unique *structure abstraite*, la forme (*pattern*) commune à toute collection infinie d'objets équipé d'une fonction successeur et d'un unique objet initial et satisfaisant le principe d'induction » (Shapiro, 1997, p. 72)

Cette variante du structuralisme est connue sous le nom de « structuralisme *ante rem* » (Shapiro, 1997, par analogie avec la querelle des universaux), « structuralisme des formes » (*pattern structuralism*, Reck et Price, 2000) ou « structuralisme non-éliminativiste »⁶³ (Parsons, 2008). Le structuralisme *ante rem* se distingue du platonisme fort que nous avons présenté plus haut en ce que, par exemple, il ne reconnaît pas au nombre 2 une existence indépendante. 2 n'est qu'une position dans la structure des nombres naturels. Il rejoint en revanche le platonisme fort en ce qu'il admet que ce dont s'occupent les mathématiques (les structures et non plus les objets) existe indépendamment de toute instantiation (la structure des entiers naturels existe même si elle n'est instanciée par aucun système d'objets physiques).

Selon une deuxième variante du structuralisme, ϕ est vrai si et seulement tout système infini qui rend vrai les axiomes de l'arithmétique⁶⁴ rend également vrai ϕ . la structure des entiers naturels rend vraie ϕ . Cette variante est connue sous le nom de « structuralisme *in rebus* » (Shapiro, 1997), ou « structuralisme éliminativiste » (Parsons, 2008) et c'est une version du « structuralisme universaliste » de Reck et Price (2000). L'idée est de ne pas hypostasier de structures mathématiques existant indépendamment des systèmes qui les exemplifient et d'interpréter les énoncés mathématiques comme des affirmations universelles portant sur tous les systèmes d'un certain type. Le structuralisme *in rebus* n'est pas (du tout) un platonisme, car ni les objets ni les structures mathématiques n'existent indépendamment des systèmes qui les exemplifient. Une conséquence dangereuse est que s'il n'existe aucun système physique pour exemplifier les structures qui sont le sujet de telle théorie mathématique, alors tous les énoncés de la théorie mathématique en question sont vrais. Par exemple, s'il n'existe pas de système physique qui rend vrais les axiomes de l'arithmétique, alors, trivialement, aucun système physique rendant vrais les axiomes de l'arithmétique n'est susceptible de rendre faux un énoncé de l'arithmétique.

Une troisième variante du structuralisme vise à conserver l'esprit du structuralisme éliminativiste tout en apportant une solution au problème que nous venons de soulever. On dit cette

⁶³ Sur les nuances à apporter à l'identification entre structuralisme *ante rem* et structuralisme non-éliminativiste, voir Parsons (2008, p. 52).

⁶⁴ Nous laissons volontairement indéterminé ce qu'il faut entendre par « les axiomes de l'arithmétique ». Si l'on entend par là les axiomes de Peano au second ordre, qui caractérisent à l'isomorphisme près la structure des entiers naturels, la vérité au sens du structuralisme éliminativiste sera équivalente à la vérité au sens du structuralisme non-éliminativiste, à condition qu'il existe au moins un système infini qui rend vrai les axiomes en question. Si l'on entend par là les axiomes de Peano au premier ordre, qui admettent des modèles non élémentairement équivalents, la vérité au sens du structuralisme éliminativiste ne sera pas équivalente à la vérité au sens du structuralisme non-éliminativiste.

fois que φ est vrai si et seulement pour tout système possible S , si S rend vrai les axiomes de l'arithmétique, alors S rend également vrai φ . Il s'agit là d'une variante modale du structuralisme, connue précisément sous le nom de « structuralisme modal » et élaborée en détail par Hellman (1989). L'idée est que même s'il n'existe pas actuellement une infinité d'objets, de sorte qu'aucun système réel ne rend vrai les axiomes de l'arithmétique, il pourrait exister une infinité d'objets et des systèmes rendant vrais les axiomes de l'arithmétique. Par conséquent, la vérité arithmétique n'est pas trivialisée à tout coup en l'absence de systèmes réels infinis. Le structuralisme modal n'est pas *prima facie* un platonisme fort, puisqu'il n'admet pas de structures mathématiques existant indépendamment des systèmes qui les exemplifient. Néanmoins, une évaluation exacte des engagements ontologiques du structuralisme modal dépend de l'analyse qui sera faite des modalités.

Outre la question de l'interprétation ontologique exacte qu'on donne du structuralisme, se pose le problème de son application à une théorie comme la théorie des ensembles.⁶⁵ La théorie des ensembles joue le rôle d'une théorie d'arrière-plan dans laquelle il est possible de définir des systèmes qui instancient les différentes structures mathématiques étudiées, comme on l'a déjà dit s'agissant des nombres naturels et des nombres réels. Mais qu'en est-il des ensembles eux-mêmes en tant qu'objets mathématiques ? Faut-il aussi les voir comme des positions dans une structure, la structure de l'univers ensembliste ? Alors que les mathématiques nous ont habitués à voir les entiers naturels ou les réels comme une structure susceptibles d'être exemplifiés par différents systèmes, il n'en va pas de même pour la théorie des ensembles : on n'a pas (ou moins) l'habitude d'interpréter la relation d'appartenance par une autre relation entre des objets qui ne seraient pas des ensembles. Surtout, donner une interprétation structuraliste de l'univers ensembliste est problématique dans la mesure où l'on utilise la théorie des ensembles pour définir ce qu'est une structure, comme on le fait en théorie des modèles. Face à cette difficulté, plusieurs solutions sont possibles. On peut considérer que la notion de structure est une notion primitive, et, comme Shapiro, envisager une théorie des structures, qui viendrait doubler la théorie des ensembles. Une telle solution n'est certainement pas très économe. Une autre option serait de faire une exception pour la théorie des ensembles et de n'adopter une interprétation structuraliste que pour les autres théories.

7 Conclusion

La philosophie des mathématiques se laisse assez (trop ?) facilement décrire comme le lieu d'un affrontement entre quelques grandes écoles. Ces divisions sont pour une part héritées de la tradition philosophique (réalisme vs nominalisme, mais aussi platonisme vs aristotélisme). Pour une autre

⁶⁵ Sur cette question, voir Parsons (2008, chap. 4).

part, elles trouvent leur origine dans les développements de la logique (logicisme) ou dans la réaction à la crise des fondements (finitisme, intuitionnisme). Elles sont également déterminées par des choix théoriques plus généraux qui engagent l'ensemble de la philosophie contemporaine (naturalisme). Dans cette introduction, nous avons cherché, tout en présentant ces différents cadres, à montrer comment s'articulaient à chaque fois les deux tâches qui incombent à la philosophie des mathématiques : d'abord une tâche proprement épistémologique, qui consiste à rendre compte de la connaissance mathématique, dans ce qu'elle a de commun ou non avec le reste de la connaissance scientifique, ensuite une tâche ontologique qui consiste à rendre compte de ce que sont les objets mathématiques, ou plus largement ce qu'étudient les mathématiques.

Nous concluons en disant quelques mots de ce qui nous semblent être les grands enjeux de la philosophie des mathématiques contemporaine. Concernant la tâche épistémologique, au moins trois éléments ont déjà été identifiés, qui semblent guider la formation des connaissances mathématiques : premièrement, une certaine intuition mathématique, dont le lien avec la perception et l'acceptabilité d'un point de vue naturaliste posent problème, deuxièmement des critères théoriques d'ordre général, comme la cohérence, la simplicité ou le pouvoir d'unification, dont l'impact est réel mais dont on peut douter qu'ils suffisent à expliquer ce que sont les mathématiques, et troisièmement l'application des théories mathématiques en dehors des mathématiques, qui joue un rôle important dans les discussions ontologiques mais dont la signification épistémologique est moins claire. Un des premiers enjeux pour la philosophie des mathématiques contemporaine est de clarifier le fonctionnement de ces différents modes de développement des mathématiques, de dire s'ils constituent également des modes de justification, et d'expliquer comment, le cas échéant, coexistent ces différents modes de justification.

Concernant la tâche ontologique, les enjeux sont certainement différents selon que l'on adopte une perspective antiréaliste ou une perspective réaliste. Dans le premier cas, la question reste souvent de montrer qu'il est possible d'être antiréaliste, et cette question dépend ensuite en partie de réalisations mathématiques : un exemple paradigmatique est le programme de Field et la reconstruction nominaliste de la science. Dans le second cas, ce qui est en jeu, c'est, nous semble-t-il, l'élaboration d'une notion d'objet qui soit adéquate aux objets mathématiques, au sens où elle rende compte de leur spécificité ontologique et où elle puisse s'intégrer à une explication des modes de justification mathématique. C'est notamment la raison pour laquelle nous avons choisi de présenter le structuralisme à partir de considérations portant sur la naturalisation de l'intuition mathématique.

Deux caractéristiques marquantes de la période récente, que nous avons déjà rencontrées incidemment au cours de cette exposition mais sur lesquelles nous voulions revenir pour conclure,

sont, hors de la philosophie des mathématiques, les progrès concernant la compréhension de la cognition mathématique, et, au sein de la philosophie des mathématiques, une attention plus fine à la pratique des mathématiques. Sur le premier point, un exemple frappant est le cas de la cognition arithmétique, à travers le développement d'hypothèses fines sur les différents systèmes cognitifs qui sont impliqués, leur caractère symbolique ou non et leur origine innée ou non (voir Dehaene 1997). Sur le second point, l'étude du raisonnement diagrammatique et du rôle joué par la visualisation constitue un autre exemple remarquable (voir Mancosu et alii, 2005). L'intégration de ces nouveaux éléments aux perspectives épistémologique et ontologique générales que nous avons développées est l'ultime enjeu que nous voulions souligner.

Références

Ackermann, W. (1940) « Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie », *Mathematische Annalen*, vol. 117 (1), p. 162-194.

Van Atten, M. (2004) *On Brouwer*, Belmont : Wadsworth / Thomson Learning.

Van Atten, M. et Kennedy, J. (2009) « Gödel's Modernism: on Set-Theoretic Incompleteness », in Lindström, S. et alii, (eds) *Logicism, Intuitionism and Formalism: What has become of them?*, Berlin : Springer, pp. 303-356.

Balaguer, M. (1998) *Platonism and Anti-platonism in Mathematics*, Oxford : Oxford University Press.

Bishop, E. (1967) *Foundations of Constructive Analysis*, New York : McGraw-Hill.

Boolos, G. (1986) « Saving Frege From Contradiction », in *Proceedings of the Aristotelian Society*, 87, p. 137–151.

Bourbaki, N. (1956) *Éléments de mathématique. Livre 1: Théorie des ensembles*, Paris: Hermann, Actualités scientifiques et industrielles.

Brouwer, L.E.J. (1907) *Over de grondslagen der wiskunde*, thèse de doctorat, Université d'Amsterdam, tr. angl. in A. Heyting (ed), *L.E.J. Brouwer. Collected works I. Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam : North-HollandAmsterdam.

Brouwer, L.E.J. (1908) « De Onbetrouwbaarheid der logische Principes, Door L. E. J. Brouwer », *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, p. 152-8, tr. fr. J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, 1992, p. 15-23.

Carnap, R. (1937) *The Logical Syntax of Language*, Londres : Routlegdge and Kegan Paul.

Casullo, A. (1992) « Causality, Reliabilism, and Mathematical Knowledge », *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 52 (3), p. 557-584.

Church, A. (1956) *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton: Princeton University Press

Church, A. (1966) « Paul J. Cohen and the Continuum Problem » in Petrovsky G. (ed.) *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Moscow 1966)*, Moscou : Izdatel'stvo "Mir," Moscow 1968, pp. 15-20.

Colyvan, M. (2001) *The Indispensability of Mathematics*, Oxford : Oxford University Press.

Colyvan, M. (2007) « Mathematical Recreation Versus Mathematical Knowledge », in Leng, M. & alii (eds.), *Mathematical Knowledge*, 2007, Oxford : Oxford University Press, pp. 109–22.

Van Dalen D. et van Atten, M. (2002) « Intuitionism », in D. Jacquette (ed.), *A Companion to Philosophical Logic*, Oxford : Blackwell, 2002, pp. 513-553.

Dedekind, R. (1888) « Was Sind und was sollen die Zahlen?», Braunschweig : Vieweg, tr. fr. in H. Sinaceur, *La creation des nombres*, Paris : Vrin, 2008.

Dehaene, S. (1997) *The number sense*, New York: Oxford University Press.

Dehornoy, P. (2007) « Au-delà du forcing : la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles », in Joinet, J.B. (ed.), *Logique, dynamique et cognition*, Paris : Publications de la

Sorbonne (2007), pp 147-170.

Detlefsen, M. (1990) « On an alleged refutation of Hilbert's Program using Gödel First Incompleteness Theorem », *Journal of Philosophical Logic*, vol. 19 (4), p. 343-377.

Dummett, M. (1973) « La base philosophique de la logique intuitionniste », trad. fr. F. Pataut, in *Philosophie de la logique*, Paris : Editions de Minuit, 1991.

Dummett, M. (1977) *Elements of Intuitionism*, New York : Oxford UP.

Feferman, S. (1988) « Weyl Vindicated: Das Kontinuum seventy years later », réimprimé dans S. Feferman, *In the Light of Logic*, New York : Oxford University Press, 1998, p. 249–283.

Feferman, S. (1993) « Why a Little Bit Goes a Long Way: Logical Foundations of Scientifically Applicable Mathematics », *Proceedings of the Philosophy of Science Association*, 2, pp. 442-455.

Feferman, S. (1999) « Does mathematics need new axioms? », *American Mathematical Monthly* 106, pp.99-111.

Fermat, P. de (1643) *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes dissertatio tripartita*, in *Oeuvres* (Ch. Henry et P. Tannery eds.), Paris: Gauthier-Villars, 1891-1922, t. 1

Field, H. (1980) *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*, Oxford: Blackwell.

Field, H. (1989) *Realism, Mathematics and Modality*, New York: Basic Blackwell.

Frege, G. (1879) *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle : Nebert, tr. fr. C. Besson, *Idéographie*, Paris : Vrin, 1999.

Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau : W. Koebner, tr. fr. Cl. Imbert, *Les fondements de l'arithmétique*, Paris : Le Seuil, 1969.

Frege, G. (1893) *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 1, Iéna : Pohle ; réédition, 1962, Hildesheim : Olms.

Frege, G. (1903) *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 2, Iéna : Pohle ; réédition, 1962, Hildesheim : Olms.

Frege, G. (1924-1925) « Les sources de connaissance en mathématiques et en sciences mathématiques de la nature », tr. fr. *Ecrits posthumes*, 1994, Nîmes : éditions Jacqueline Chambon.

Friedman, H. (1976) « Systems of second order arithmetic with restricted induction », I, II (résumés), *Journal of Symbolic Logic*, vol. 41, p. 557-559.

Gentzen, G. (1936) « Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie », *Mathematische Annalen*, 112, p. 493–56.

Gödel, K. (1931) « On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I », in S. Feferman & al. (eds) *Kurt Gödel Collected Works*, vol. I, Oxford : Oxford University Press (1986), p. 145–195.

Gödel, K. (1944) « Russell's mathematical logic », réimpr. in S. Feferman & al. (eds) *Kurt Gödel Collected Works*, vol. II, Oxford : Oxford University Press (1990), p. 119-141.

Gödel, K. (1951) « Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications », Josiah Willard Gibbs Lecture, American Mathematical Society, in S. Feferman & al. (eds) *Kurt Gödel Collected Works*, vol. III, Oxford : Oxford University Press (1995), pages 304–323.

Gödel, K. (1953/9,V) « Is Mathematics Syntax of Language? », in S. Feferman & al. (eds) *Kurt Gödel Collected Works*, vol. III, Oxford : Oxford University Press (1995), pages 356–362.

Gödel, K. (1958) « Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes » in Feferman & al. (eds) *Kurt Gödel Collected Works*, vol. II, Oxford : Oxford University Press (1995), *Collected Works*, p. 240-251.

Hale, B. et Wright, C. (2002) « Benacerraf's Dilemma Revisited », *European Journal of Philosophy*, 10 (1), pp. 101–129.

Hamkins, J. (2010) « The set-theoretic multiverse: a model-theoretic philosophy of set theory », exposé à la conférence *Philosophie et Théorie des Modèles*, Paris, Juin 2010.

Hellman, G. (1989) *Mathematics without numbers*, Oxford : Oxford University Press.

Heijenoort, J. van (ed.) (1967) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1897-1931*, Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Heyting, A. (1956) *Intuitionism, an Introduction*, Amsterdam: North–Holland.

Hilbert, D. (1904), « Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik », *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig: Teubner, 1905, p. 174-185. Cité d'après la traduction anglaise in J. van Heijenoort (ed.) (1967), p. 129-138

Hilbert, D. (1922), « Neubegründung der Mathematik (Erste Mittheilung) », *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, vol. 1, p. 157-177

Hilbert, D. (1925), « Über das Unendliche », Conférence donnée à Münster le 4 juin 1925, *Mathematische Annalen*, 95-1926, p 161-190. Cité d'après la traduction française de J. Largeault, « Sur l'infini », in *Logique mathématique. Textes*, Paris: A. Colin (1972), p. 215-244

Hilbert D. et Bernays P. (1934), *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Berlin: Springer Verlag; traduction française M. Guillaume et alii, Paris : L'Harmattan, 2001.

Kitcher, Ph. (1989) « Explanatory Unification and the Causal Structure of the World », in Kitcher, Ph. et Salmon, W. (1989), *Scientific Explanation*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XIII, Minneapolis : University of Minnesota Press.

Kleene, S.C. (1952) *Introduction to metamathematics*, Amsterdam : North-Holland.

- Leng, M. (2002) « What's Wrong With Indispensability? », *Synthese*, vol. 131, p. 395-417.
- Linnebo, Ø. (2009) « Platonism in the Philosophy of Mathematics », *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E.N. (ed.), url=<<http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/platonism-mathematics/>>.
- Löb, M.H. (1955) « Solution of a Problem of Leon Henkin », *Journal of Symbolic Logic*, 20, p.15–118.
- Maddy, P. (1990) *Realism in Mathematics*, Oxford : Oxford University Press.
- Malament, D. (1982) « Review of Field's *Science Without Numbers* », *Journal of Philosophy*, 79, p. 523-534.
- Mancosu, P., Jorgensen, K.F et Pedersen, S.A. (eds) (2005) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Synthese Library, Berlin: Springer.
- Mill, J.S. (1843) *Système de logique déductive et inductive*, tr. fr. Peisse, L., Paris : Librairie philosophique de Ladrangé (1866).
- Moore, G.H. (1982) *Zermelo's Axiom of Choice*, New York: Springer.
- Moschovakis, Y. (2009) *Descriptive Set Theory*, Providence : American Mathematical Society.
- Müller, A. (1923) « Über Zahlen als Zeichen », *Mathematische Annalen*, vol. 90, pp. 153-158
- Pappus, *Collectionis quae supersunt* (F. Hultsch ed.), Berlin: Weidmann, 1876-1878
- Parsons, Ch. (1980) « Mathematical Intuition », *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 80, pp. 145-168.
- Parsons, Ch. (1995) « Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's thought », *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1 (1), pp. 44-74.

Pasch, M. (1882) *Vorlesungen über neuere Geometrie Vorlesungen über der neuere Geometrie*, Leipzig: Teubner (cité d'après la deuxième édition (1912))

Poincaré, H. (1906) « Les mathématiques et la logique », *Revue de métaphysique et de morale*, 14, pp 294-317

Putnam, H. (1979) « Mathematical Truth », in *Mathematics Matter and Method : Philosophical Papers, vol. 1*, 2nd edition, Cambridge : Cambridge University Press, pp. 60-78.

Quine, W.V.O. (1953a) « On what there is » *From a logical point of view*, Harvard : Harvard UP, trad. fr. S. Laugier (dir.), *Du point de vue logique*, Paris : Vrin, 2003.

Quine, W.V.O. (1953b) « Deux dogmes de l'empirisme » *From a logical point of view*, Harvard : Harvard UP, trad. fr. Laugier, S. (dir.), *Du point de vue logique*, Paris : Vrin, 2003.

Quine, W.V.O (1986) « Reply to Charles Parsons » in Hahn, K. & Schilpp, P. (eds.) *The Philosophy of W.V. Quine*, La Salle : Open Court.

Quine, W. V. O. (1992) *The Pursuit of Truth*, Cambridge, Mass : Harvard UP, tr. fr. M. Clavelin, *La poursuite de la vérité*, Paris : Seuil, 1997.

Quine, W.V.O. (1984) « Review of Charles Parsons' *Mathematics in Philosophy* » *Journal of Philosophy* vol. 81, pp. 783–794.

Oumraou, L. (2009) *Pourquoi les mathématiques sont-elles difficiles ?* Paris : Vuibert.

Reck, E. et Price, M.P (2000) « Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics », *Synthese*, 125, p. 341-383.

Resnik, M.D. (1980) *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca : Cornell University Press.

Resnik, M.D. (1997) *Mathematics as a Science of Pattern*, Oxford : Oxford University Press.

Restall, G. (2003) « Just What Is Full-blooded Platonism? », *Philosophia Mathematica*, 11 (1),

pp. 82-91.

Sabatier, X. (2009) *Les formes du réalisme mathématique*, Paris : Vrin.

Shapiro, S. (1997) *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford : Oxford University Press.

Sierpinski, W. (1967) « L'axiome du choix », *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 8 (4), p. 257-266.

Simpson, S.G. (1988) « Partial Realizations of Hilbert's Program », *Journal of Symbolic Logic*, vol. 53 (2), p. 349-363.

Skolem, T. (1923), « Begründung der elementare Arithmetik durch die rekurrerende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich », *Videnskapsselskapets skriffter, I. Matematisknaturvidenskabelig klasse*, vol. 6. Traduction anglaise dans Heijenoort (1967), p. 302-333.

Steiner, M. (1975) *Mathematical Knowledge*, Ithaca : Cornell University Press.

Tarski, A. (1924) « Sur quelques théorèmes équivalents à l'axiome du choix », *Fundamenta Mathematicae*, 5, p. 147-154.

Tait, W.W. (1981) « Finitism », *Journal of Philosophy*, vol. 78, p. 524-546. Repris dans Tait (2005), p. 21-42

Tait, W.W. (2005) *The Provenance of Pure Reason. Essays in the Philosophy of Mathematics and Its History*, New-York: Oxford University Press.

Troelstra, A. (1977) *Choice Sequences: A Chapter of Intuitionistic Mathematics*, Oxford : Clarendon Press.

Urquhart, A. (1990) « The logic of physical theory », in Irvine, A.D. (ed.) *Physicalism in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, pp. 145-154.

Weyl, H. (1918) *Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig : Veit, tr. fr. *Le continu et autres écrits*, Paris : Vrin, 2002.

Woodin, W.H. (2002) « The Continuum Hypothesis and the Omega-Conjecture », Coxeter Lectures, Fields Institute, Toronto, Novembre 2002, enregistrement disponible sur le site <http://www.fields.utoronto.ca>

Zermelo, E. (1904) « Proof that every set can be well-ordered », tr. angl. dans van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard: Harvard Univ. Press (1967), p. 139-141

Zermelo, E. (1908) « A new proof of the possibility of well-ordering », tr. angl. dans van