

Tout chemin générique de hérissons réalisant le retournement d'une surface convexe de \mathbb{R}^3 comprend un hérisson porteur de queues d'aronde positives

Yves Martinez-Maure

Abstract.- In every generic path of hedgehogs performing the eversion of a closed convex surface in \mathbb{R}^3 , there exists a hedgehog that has positive swallowtails.

Dans cet article, nous nous intéressons à la question du retournement dans \mathbb{R}^3 d'une surface convexe fermée S de classe C_+^∞ (i.e., C^∞ et à courbure de Gauss > 0) selon un chemin générique $\gamma : t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ de hérissons de fonctions de support $h_t \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$, ($t \in [0, 1]$). La question est de savoir quelles sont les singularités qui sont inévitables lors d'un tel retournement.

Rappelons que les hérissons de \mathbb{R}^{n+1} sont des hypersurfaces (pouvant présenter singularités et auto-intersections) qui s'identifient aux différences (de Minkowski) formelles de corps convexes de \mathbb{R}^{n+1} [6]. L'ensemble des hérissons pouvant s'écrire sous la forme d'une "différence de Minkowski" $K - L$ de deux corps convexes $K, L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C_+^∞ (i.e., de bord C^∞ et à courbure de Gauss > 0), et donc de fonction support C^∞ [8, p.111] s'identifie de la manière suivante à l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ [6] : (i) à toute fonction $h \in C^\infty(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ est associée l'enveloppe \mathcal{H}_h de la famille d'hyperplans d'équation $\langle x, u \rangle = h(u)$, ($u \in \mathbb{S}^n$) ; (ii) cette enveloppe peut être paramétrée par $x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $u \mapsto (\nabla h)(u) + h(u)u$ qui s'interprète comme la réciproque de son application de Gauss : en tout point régulier $x_h(u)$ de \mathcal{H}_h , le vecteur u est normal à \mathcal{H}_h [2]. Cette enveloppe \mathcal{H}_h , paramétrée par $x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, est appelée le hérisson de fonction de support h .

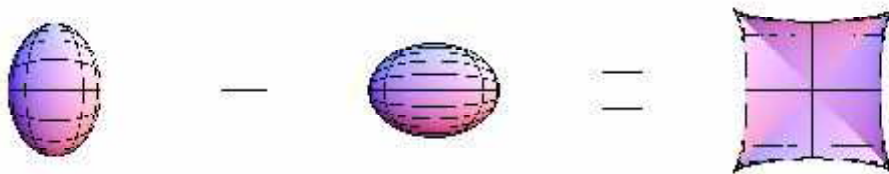


Figure 1 : Hérisson différence de Minkowski de deux ellipsoïdes

Dans ce qui suit, le mot 'hérisson' signifiera exclusivement 'hérisson de fonction support C^∞ '. Nous noterons \mathcal{H}_∞^{n+1} l'espace vectoriel des hérissons (de fonction

Keywords. Eversion of convex surfaces, hedgehogs, generic metamorphosis, indices, type of swallowtails.

MSC2010. 52A15, 52A20, 52A99, 53A05, 53D10, 58K35.

de support C^∞) de \mathbb{R}^{n+1} dont on vient de rappeler qu'il s'identifie à $C^\infty(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$. Comme nous le rappellerons plus loin, les singularités génériques des hérissons \mathcal{H}_h de \mathbb{R}^3 sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde (cf. Figure 2) et le signe de la courbure de Gauss nous permet de distinguer deux types de queues d'aronde : une queue d'aronde est dite positive (resp. négative) si la courbure de Gauss est > 0 (resp. < 0) sur sa partie en forme de queue, c'est-à-dire si la courbe de points doubles issue de la queue d'aronde se situe au voisinage de la queue dans la région hyperbolique (resp. elliptique) jouxtant l'arête (cf. Figure 2).

L'étude des 5 métamorphoses génériques des hérissons de \mathbb{R}^3 (cf. Figure 3) permet d'affirmer que si un chemin générique de hérissons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ réalise le retournement d'une surface convexe fermée S de classe C_+^∞ dans \mathbb{R}^3 , alors il existe des valeurs de $t \in]0, 1[$ pour lesquelles \mathcal{H}_{h_t} porte au moins une paire de queues d'aronde. Elle nous permet en outre d'affirmer que lorsque t croît continûment de 0 à 1, les "premières" queues d'aronde qui apparaissent sont nécessairement des queues d'aronde négatives. Mais rien n'indique a priori qu'un tel chemin générique $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ comporte nécessairement un hérisson \mathcal{H}_{h_t} porteur de queues d'aronde positives. Le principal but de cet article est précisément d'établir l'existence d'un tel \mathcal{H}_{h_t} .

Théorème. *Soit S une surface convexe de classe C_+^∞ de \mathbb{R}^3 . Si un chemin générique de hérissons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ est un retournement de S (autrement dit, si les hérissons \mathcal{H}_{h_0} et \mathcal{H}_{h_1} ont la surface S pour réalisation géométrique commune et des coorientations opposées), alors il existe un $t \in]0, 1[$ pour lequel le hérisson \mathcal{H}_{h_t} porte au moins une paire de queues d'aronde positives.*

Rappelons que tout hérisson $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^2)$ de \mathbb{R}^3 est muni d'une orientation transverse (ou coorientation) pour laquelle en tout point régulier $x_h(u)$ de \mathcal{H}_h , la normale à \mathcal{H}_h est orientée par le vecteur $\text{sgn}[R_h(u)]u$, où sgn est la fonction signe et $R_h(u)$ l'inverse $K_h(u)^{-1}$ de la courbure de Gauss $K_h(u)$ de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$. Pour tout $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$, le hérisson $\mathcal{H}_{\tilde{h}}$ de fonction de support $\tilde{h} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto -h(-u)$ est tel que $x_{\tilde{h}}(-u) = x_h(u)$ pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, si bien que \mathcal{H}_h et $\mathcal{H}_{\tilde{h}}$ ont même réalisation géométrique $x_h(\mathbb{S}^2)$, mais des coorientations opposées. Un retournement d'un hérisson $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^2)$ dans \mathcal{H}_∞^3 est donc la donnée d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ tel que $\mathcal{H}_{h_0} = \mathcal{H}_h$ et $\mathcal{H}_{h_1} = \mathcal{H}_{\tilde{h}}$.

Singularités génériques et métamorphoses génériques des hérissons

La restriction à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ de la 1-forme définie sur $(\mathbb{R}^{n+1})^2$ par $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} u_i dx_i$, où $(u_1, \dots, u_{n+1}; x_1, \dots, x_{n+1})$ sont les fonctions coordonnées sur $(\mathbb{R}^{n+1})^2$, définit une structure de contact qui fait de la projection $\pi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $(u, x) \mapsto x$ une fibration de Legendre. Sachant que les hérissons $x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ forment un ouvert dense parmi les applications de Legendre de ce fibré [3], les travaux

d'Arnold [1] permettent de classifier leurs singularités génériques pour tout $n \leq 5$. En particulier, les singularités génériques des hérissons de \mathbb{R}^3 sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde. Les queues d'aronde sont portées par les arêtes de rebroussement : aux queues d'aronde, les arêtes de rebroussement ne sont plus immergées dans \mathbb{R}^3 mais présentent elles-mêmes un rebroussement (cf. Figure 2). Plus précisément, il existe un ouvert dense \mathcal{U} pour la topologie C^4 tel que : pour tout $h \in \mathcal{U}$, les singularités de \mathcal{H}_h sont toutes équivalentes à l'un des trois modèles de singularités représentés à la Figure 2 [3]. Régions elliptiques et régions hyperboliques d'un hérisson \mathcal{H}_h , ($h \in \mathcal{U}$), sont séparées par ses arêtes de rebroussement (Fig 2.a) et la courbure de Gauss de \mathcal{H}_h est infinie sur celles-ci. Nous pouvons ainsi distinguer deux types de queues d'aronde qui sont respectivement dites positives (Fig 2.b) ou négatives (Fig 2.c) selon que le signe de la courbure de Gauss sur la partie en forme de queue est positif ou négatif. Autrement dit, une queue d'aronde est dite positive (resp. négative) si la courbe de points doubles qui en est issue se situe au voisinage de la queue d'aronde dans la région hyperbolique (resp. elliptique) jouxtant l'arête.

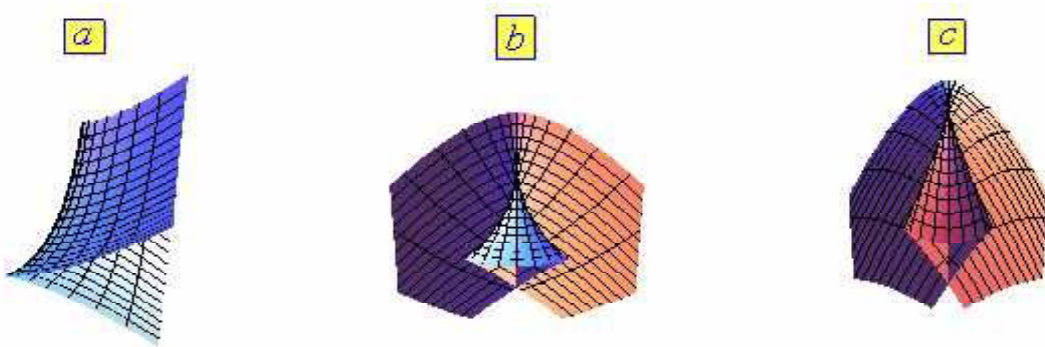


Figure 2 : (a) arête de rebroussement, queues d'aronde (b) positive et (c) négative

Soit S une surface convexe de classe C_+^∞ de \mathbb{R}^3 et soit f sa fonction de support. Le hérisson de fonction de support $\tilde{f}(u) = -f(-u)$ et le hérisson \mathcal{H}_f admettent la surface S pour réalisation géométrique commune mais sont dotés de coorientations opposées. Le chemin de hérissons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t} = t\mathcal{H}_f + (1 - t)\mathcal{H}_{\tilde{f}}$ peut-être rendu générique, de telle sorte que lorsque t décrit continûment $[0, 1]$, les modifications qualitatives des singularités de \mathcal{H}_{h_t} soient toutes de l'un des 5 types décrits par Arnold [1] comme métamorphoses génériques de fronts d'onde (Figure 3). Dans la suite, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ désignera n'importe quel chemin générique de hérissons joignant \mathcal{H}_f à $\mathcal{H}_{\tilde{f}}$.

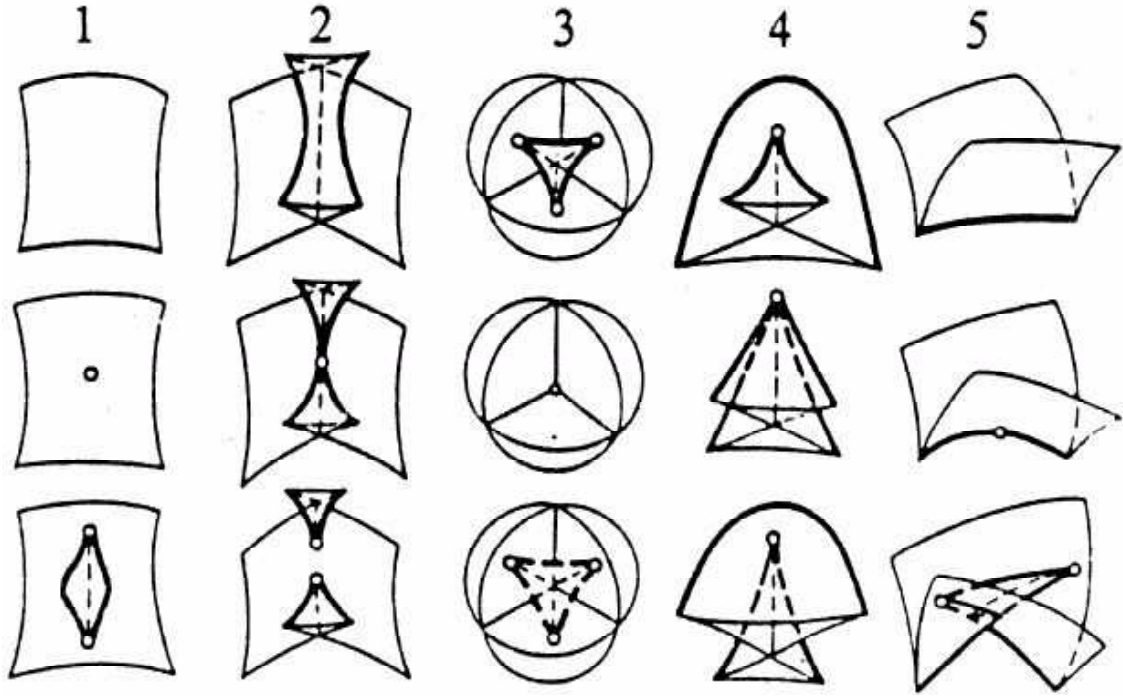


Figure 3 : Les 5 types de métamorphoses génériques de fronts d'onde (extrait de [1])

Le but de notre étude est donc d'établir l'existence d'un $t \in [0, 1]$ pour lequel le hérisson \mathcal{H}_{h_t} porte au moins une paire de queues d'aronde positives. Cette étude est en grande partie motivée par le problème ci-dessous, soulevé par R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg dans [2]. Rappelons qu'un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ est dit projectif si sa fonction de support h est antisymétrique sur \mathbb{S}^2 (i.e., telle que $h(-u) = -h(u)$ pour tout $u \in \mathbb{S}^2$) et donc sa paramétrisation $x_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x_h(u) = x_h(-u)$ pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, si bien que x_h peut être définie sur le plan projectif réel $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\text{antipodie}$.

Problème ouvert. *Existe-t-il un hérisson projectif \mathcal{H}_h de \mathbb{R}^3 dont le lieu singulier est réduit à une (ou plusieurs) arête(s) de rebroussement(s) immergée(s) (i.e. sans queues d'aronde) ?*

Rappelons à ce sujet le résultat suivant [2] :

Proposition. *Pour tout $h \in \mathcal{U}$, nous avons :*

$$r_+ - r_- - \frac{q_+ - q_-}{2} = 1,$$

où r_+ (resp. r_-) désigne le nombre de régions elliptiques (resp. hyperboliques) de \mathcal{H}_h et q_+ (resp. q_-) le nombre de ses queues d'aronde positives (resp. négatives).

Pour établir cette formule, les auteurs considèrent un chemin générique de hérissons reliant \mathcal{H}_h à un hérisson régulier (et donc convexe de classe C_+^∞) et observent que la valeur de $r_+ - r_- - (q_+ - q_-)/2$ reste inchangée lors de n'importe laquelle des 5 métamorphoses génériques. Pour une preuve n'utilisant pas les métamorphoses génériques des fronts d'onde, on pourra consulter [5].

L'indice $j_h(x)$ d'un point $x \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$ par rapport au hérisson \mathcal{H}_h

Notre preuve repose sur le nouvel indice d'un point par rapport à un hérisson que nous avons introduit dans [7] :

Définition. Soit $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on définit $h_x \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ par $h_x(u) := h(u) - \langle x, u \rangle$, ($u \in \mathbb{S}^2$) : $h_x(u)$ peut être interprété comme la distance signée du plan support coorienté par u au point x . Pour tout $x \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$, on définit l'indice $j_h(x)$ de x par rapport à \mathcal{H}_h par :

$$j_h(x) := 1 - c_h(x),$$

où $c_h(x)$ est le nombre de composantes connexes de $h_x^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{S}^2$, c'est-à-dire le nombre de courbes sphériques formées des points $u \in \mathbb{S}^2$ tels que le plan support en $x_h(u)$ passe par x .

Rappelons que l'indice $j_h(x)$ de x par rapport à \mathcal{H}_h reste constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$ [7]. L'indice j joue dans \mathbb{R}^3 un rôle analogue au rôle joué dans \mathbb{R}^2 par l'indice i (l'indice $i_h(x)$ de x par rapport à $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2 - \{x\}$ étant le nombre algébrique de tours que $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^1)$ fait autour du point x). Rappelons que cet indice i vérifie la relation suivante pour tout $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$ [4] :

$$i_h(x) = 1 - \frac{1}{2}n_h(x),$$

où $n_h(x)$ désigne le nombre de droites support coorientées de \mathcal{H}_h passant par x , c'est-à-dire le nombre de zéros de $h_x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(\theta) \mapsto h(u(\theta)) - \langle x, u(\theta) \rangle$, où $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$.

L'orientation transverse de \mathcal{H}_h associée à l'indice j_h .

Pour tout $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$, l'indice j_h permet de doter le hérisson \mathcal{H}_h d'une nouvelle notion d'orientation transverse (ou coorientation) que nous qualifierons d'**absolue** : pour tout $u \in \mathbb{S}^2$ tel que $x_h(u)$ est un point simple et régulier de \mathcal{H}_h , la droite normale à \mathcal{H}_h en $x_h(u)$ sera orientée dans le sens des $j_h(x)$ décroissants. Sauf mention explicite du contraire, nous considérerons désormais tout hérisson

\mathcal{H}_h de \mathbb{R}^3 muni de cette coorientation absolue. Par opposition à cette coorientation absolue, nous qualifierons la coorientation définie précédemment de **relative** (sous entendu au choix de h ou de \tilde{h} comme fonction de support).

Il est important de noter que la coorientation absolue de \mathcal{H}_h peut s'inverser lorsque l'on traverse une courbe d'auto-intersection de \mathcal{H}_h . Le point fondamental de notre démonstration sera qu'une telle inversion de la coorientation ne peut se produire que le long d'une courbe de points doubles hyperboliques. Si $x_h(u)$ est un point simple et régulier de \mathcal{H}_h , on définit $\varepsilon_h(u) \in \{-1, 1\}$ de telle sorte que le vecteur unitaire

$$\nu_h(u) = \varepsilon_h(u) \operatorname{sgn} [R_h(u)]u$$

dirige la normale à \mathcal{H}_h (muni de sa coorientation absolue) en $x_h(u)$. Rappelons que $R_h(u)$ désigne la fonction de courbure de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$. Par conséquent, nous avons $\varepsilon_h(u) = 1$ (resp. $\varepsilon_h(u) = -1$) si le vecteur normal unitaire $\nu_h(u)$ correspond (resp. ne correspond pas) à la coorientation relative du hérisson $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^2)$ en $x_h(u)$. Si $x_h(u)$ n'est pas un point simple et régulier de \mathcal{H}_h , alors on pose $\varepsilon_h(u) = 0$.

Lorsque $x_h(u)$ est un point elliptique de \mathcal{H}_h , c'est-à-dire tel que $R_h(u) > 0$, le sens du vecteur normal unitaire $\nu_h(u)$ est donné par le sens de la concavité de \mathcal{H}_h en $x_h(u)$ [7] : il pointe du côté de \mathcal{H}_h dans lequel se situe le plan tangent au voisinage de $x_h(u)$. Le signe de ε_h ne change donc pas sur l'image sphérique Ω d'une région elliptique $x_h(\Omega)$ de \mathcal{H}_h . Dans le cas de l'image sphérique Ω d'une région hyperbolique $x_h(\Omega)$, il en va tout autrement : le signe de ε_h peut en effet s'inverser lorsque l'on traverse l'image sphérique d'une courbe de points doubles hyperboliques comme le montre l'exemple du hérisson de fonction de support $h(x, y, z) := x(x^2 - 3y^2) + 2z^3$, où $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (Figure [4]). Il s'agit ici d'un hérisson projectif. Dans cet exemple, où les points de $x_h(\mathbb{S}^2)$ apparaissant comme doubles sont en fait quadruples, l'indice $j_h(x)$ est égal à -2 pour tout x d'une composante connexe bornée de $\mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$ (et naturellement égal à 0 pour tout x de la composante connexe non bornée). Par conséquent, le signe de ε_h s'inverse lorsqu'on traverse l'image sphérique de n'importe laquelle des courbes de points doubles hyperboliques. Lorsque le signe de ε_h s'inverse quand on traverse l'image sphérique d'une courbe donnée de points doubles hyperboliques, nous dirons de cette courbe qu'elle est une **courbe d'inversion de la coorientation** de \mathcal{H}_h . Cette notion de courbe d'inversion de la coorientation permet de distinguer deux types de queues d'arondes positives : celles dont est issue une courbe d'inversion de la coorientation de \mathcal{H}_h et les autres. La nature d'une queue d'aronde positive est en fait fonction de la position qu'elle occupe par rapport à la région hyperbolique de \mathcal{H}_h qui la jouxte. Découpons sur un hérisson \mathcal{H}_h , le voisinage d'une queue d'aronde positive tel que celui qui est représenté à la Figure 2.b. La courbe de points doubles partage cette portion de \mathcal{H}_h en deux parties : une partie A en forme de queue et une partie B qui n'est constituée que de points hyperboliques. La partie B a deux côtés : celui de A et le côté opposé. Si

l'indice j_h décroît lorsqu'on traverse B (hors la courbe de points doubles) en direction de A , il apparaît que la courbe de points doubles hyperboliques n'est pas une courbe d'inversion de la coorientation de \mathcal{H}_h . Par contre, si j_h croît lors d'une telle traversée, alors il apparaît que la courbe de points doubles est bien une courbe d'inversion de la coorientation de \mathcal{H}_h . Pour ces raisons, nous dirons qu'une queue **d'aronde positive** est **sortante** (resp. **rentrante**) si la courbe de points doubles qui en est issue est (resp. n'est pas) une courbe d'inversion de la coorientation de \mathcal{H}_h . Dans l'exemple considéré (Figure 4), toutes les queues d'aronde positives sont sortantes.

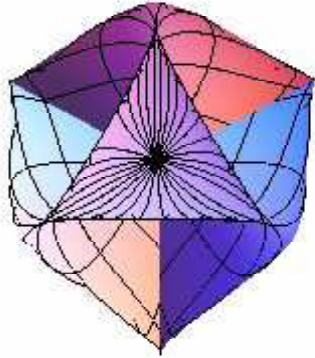


Figure 4 : Hérisson de fonction de support $h(x, y, z) := x(x^2 - 3y^2) + 2z^3$

Démonstration du théorème. Considérons donc un chemin générique de hérissons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_\infty^3$, $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$ réalisant un retournement de la surface S dans \mathbb{R}^3 : $\mathcal{H}_{h_0} = \mathcal{H}_f$ et $\mathcal{H}_{h_1} = \mathcal{H}_{\tilde{f}}$, où f est la fonction de support de la surface convexe S . La fonction ε_{h_t} étant constante égale à 1 (resp. -1) pour $t = 0$ (resp. $t = 1$), il existe nécessairement des valeurs de $t \in]0, 1[$ pour lesquelles les courbes sur lesquelles ε_{h_t} change de signe disconnectent \mathbb{S}^2 . Or, l'étude conjointe des métamorphoses génériques des hérissons de \mathbb{R}^3 et de la coorientation absolue nous permet d'affirmer que : 1. Les courbes d'inversion de la coorientation sont des courbes de points doubles hyperboliques ; 2. Lorsque t croît continûment de 0 à 1, une telle courbe d'inversion de la coorientation ne peut apparaître que si deux régions hyperboliques de \mathcal{H}_{h_t} entrent en contact à un instant t ou s'il apparaît sur \mathcal{H}_{h_t} une paire de queues d'aronde positives sortantes. Or, si deux régions hyperboliques de \mathcal{H}_{h_t} entrent en contact à l'instant t , cela ne peut-être qu'en l'image m par x_{h_t} de deux points antipodaux $-u$ et u de \mathbb{S}^2 : $m = x_{h_t}(-u) = x_{h_t}(u)$. Dans ce cas, nous avons nécessairement $\varepsilon_{h_t}(-u) = -\varepsilon_{h_t}(u) \neq 0$, ce qui suppose qu'il existait déjà une courbe disconnectant \mathbb{S}^2 sur laquelle ε_{h_t} change de signe. Par

conséquent, lorsque t croît continûment de 0 à 1, la première apparition d'une courbe d'inversion de la coorientation de \mathcal{H}_{h_t} est nécessairement concomitante à l'apparition d'une paire de queues d'aronde positives sortantes, ce qui démontre le théorème. \square

References

- [1] V.I. Arnold, *Critical points of smooth functions*. Proc. Int. Cong. Math., Vancouver 1974, vol. 1, 1939.
- [2] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss)*. Singularities, Banach Center Publ. 20 (1988), 245-253.
- [3] Y. Martinez-Maure, *Feuilletages des Surfaces et Hérissons de \mathbb{R}^3* , Thèse de 3^{ème} cycle, Université Paris 7, France, (1985).
- [4] Y. Martinez-Maure, *Indice d'un hérisson : étude et applications*, Publ. Mat. 44 (2000), 237-255.
- [5] Y. Martinez-Maure, *Sommets et normales des courbes convexes de largeur constante et singularités des hérissons*, Arch. Math. 79 (2002), 489-498.
- [6] Y. Martinez-Maure, *Geometric study of Minkowski differences of plane convex bodies*, Canad. J. Math. 58 (2006), 600-624.
- [7] Y. Martinez-Maure, *New notion of index for hedgehogs of \mathbb{R}^3 and applications*, Eur. J. Comb. 31 (2010), 1037-1049.
- [8] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge: Cambridge University Press 1993.

Y. Martinez-Maure
Institut Mathématique de Jussieu
UMR 7586 du CNRS
F-75013 Paris France
martinez@math.jussieu.fr