HAL
open science

Vers un texton pour les micro-textures

Agnès Desolneux, Lionel Moisan, Samuel Ronsin

To cite this version:

Agnès Desolneux, Lionel Moisan, Samuel Ronsin. Vers un texton pour les micro-textures. GRETSI, Sep 2011, Bordeaux, France. hal-00607792

HAL Id: hal-00607792

https://hal.science/hal-00607792

Submitted on 11 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Vers un texton pour les micro-textures

Agnès DESOLNEUX, Lionel MOISAN, Samuel RONSIN

Laboratoire de Mathématiques Appliquées à Paris 5 (MAP5, UMR CNRS 8145)
Université Paris Descartes, 45 rue des Saints-Pères, 75006 Paris, France
Agnes.Desolneux@parisdescartes.fr, Lionel.Moisan@parisdescartes.fr
Samuel.Ronsin@mi.parisdescartes.fr

Résumé – Cet article s'intéresse à l'analyse des modèles mathématiques de micro-textures qui ont la propriété d'être perceptuellement invariantes quand on rend aléatoires les phases de la transformée de Fourier. Nous proposons une représentation "compacte" de ces textures en introduisant un représentant particulier (celui dont toutes les phases sont nulles), appelé texton. Nous montrons que ce texton possède de nombreuses propriétés, particulièrement des propriétés de concentration autour de l'origine spatiale. De plus, il rend facilement possible l'analyse et la synthèse de texture, et sa définition peut s'étendre au cas de micro-textures couleur.

Abstract – In this paper, we are interested in the mathematical analysis of the models of micro-textures that have the property to be perceptually invariant under the randomization of the phases of their Fourier transform. We propose a "compact" representation of these textures by introducing a special representant of them: the one that has identically null phases, and we call it "texton". We show that this texton has many properties, and particularly properties of concentration around the spatial origin. Moreover, it is a simple and useful tool for texture analysis and texture synthesis, and its definition can be extended to the case of color micro-textures.

1 Introduction

Les images de textures peuvent avoir des aspects perceptuels et statistiques très variables, et nous choisissons ici de continuer la discussion sur les textures telle qu'elle est proposée dans l'article de B. Galerne, Y. Gousseau et J.-M. Morel [1]. En effet, en reprenant leur point de vue et leur terminologie, l'ensemble des textures peut être, en première approximation, divisé en deux classes : les *macro-textures* et les *micro-textures*. Les macro-textures peuvent être décrites comme des images contenant des objets visuels présentant une organisation spatiale régulière (tel un mur de brique par exemple). Au contraire, les micro-textures ne contiennent pas d'objets visuels clairement identifiés, et elles sont caractérisées par le fait qu'elles sont perceptuellement invariantes par randomisation des phases de la transformée de Fourier (ce qui n'est pas le cas des macro-textures, car changer les phases détruit alors complètement les objets présents dans l'image). Parmi toutes les réalisations possibles pour le champ de phases (le module quant à lui est fixé comme étant celui de l'image d'origine), nous allons étudier ici un représentant particulier : celui dont toutes les phases sont nulles. Nous allons montrer que c'est un choix très simple qui conduit à des propriétés intéressantes tant pour l'analyse que la synthèse de texture. L'image ainsi obtenue en mettant toutes les phases à zéro sera appelée le *texton* de la micro-texture. Cette image a les deux caractéristiques fondamentales de la texture décrites par Julesz ([2], [3]) : elle est liée aux statistiques du second ordre et elle a une *forme élémentaire* qui caractérise la texture, ce qui justifie l'emploi du terme *texton* introduit par Julesz.

2 Définition et propriétés

Les images considérées sont définies sur un domaine rectangulaire discret Ω de taille $M \times N$, et qui est de la forme $\Omega = I_M \times I_N$ où pour n entier, I_n est l'intervalle discret $[-\frac{n-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}]$ pour n impair, et $[-\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} - 1]$ pour n pair. Pour $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une image discrète en niveau de gris, on notera $\widehat{u}$ sa transformée de Fourier discrète. D'autre part u peut être étendue par périodicité en une fonction sur $\mathbb{Z}^2$ en posant pour tout $y \in \mathbb{Z}^2$, $u(y) = u(y_1, y_2) = u(y_1 (mod\, M), y_2 (mod\, N))$. Ceci permet en particulier de définir la translation (périodique) de vecteur y d'une image u, notée $\tau_y(u)(.) = u(y + .)$. Dans la suite, nous utiliserons aussi la notation suivante : si $x = (x_1, x_2)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ sont deux éléments de Ω, nous définirons et noterons leur produit scalaire discret par $\langle x, \xi \rangle = \frac{1}{M} x_1 \xi_1 + \frac{1}{N} x_2 \xi_2$, de sorte que la transformée de Fourier discrète d'une image u s'écrit alors simplement $\widehat{u}(\xi) = \sum_{x \in \Omega} u(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}$. Nous introduisons alors le texton d'une image u par la définition suivante.

Definition 1 (Texton d'une image)**.** *Soit u une image définie sur Ω, alors le texton de u, noté $T(u)$, est l'image définie sur Ω ayant le même module en Fourier que u, la même valeur moyenne que u et dont les phases, hors celle en 0, sont identiquement nulles. En d'autres termes, le texton $T(u)$ est caractérisé dans le domaine de Fourier par :*

$$\forall \xi \in \Omega, \xi \neq 0, \quad \widehat{T(u)}(\xi) = |\widehat{u}(\xi)| \quad et \quad \widehat{T(u)}(0) = \widehat{u}(0) \tag{1}$$

et, de façon équivalente, dans le domaine spatial par

$$\forall x \in \Omega, T(u)(x) = \frac{1}{MN}\widehat{u}(0) + \frac{1}{MN}\sum_{\xi\in\Omega,\xi\neq 0} |\widehat{u}(\xi)| e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}. \tag{2}$$

Propriétés élémentaires Le texton $T(u)$ associé à une image u vérifie de nombreuses propriétés. En particulier :

1. Pour toute image u, $T(u)$ est une image réelle et symétrique, c'est à dire que $T(u)(-x) = T(u)(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega$.
2. $T(T(u)) = T(u)$, ce qui signifie que $T(u)$ est son propre texton.
3. L'opérateur T est 1-Lipschitz pour la norme L^2, c'est à dire : si u et v sont des images définies sur Ω, alors $\| T(u) - T(v) \|_2 \leq \| u - v \|_2$.
4. Le texton est invariant par translation : $T(\tau_y(u)) = T(u)$ pour tout $y \in \Omega$.
5. Pour toute image u sur Ω, et pour tout réels α et β, on a : $T(\alpha u + \beta) = |\alpha| T(u) + (\alpha - |\alpha|)\overline{u} + \beta$, où $\overline{u}$ est la moyenne de u sur Ω.
6. Pour toute image u et pour toute image k définies sur Ω, alors $T(k * u) = T(k) * T(u)$ (où $*$ est l'opérateur de convolution sur Ω). En particulier si k est un noyau de convolution symétrique dont la transformée de Fourier discrète est positive (par exemple un noyau gaussien), alors $T(k * u) = k * T(u)$.

Propriétés de concentration Le texton $T(u)$ vérifie de plus des propriétés de concentration saptiale en 0. Ceci est très visible sur les images, et mathématiquement peut se comprendre grâce aux résultats suivants. Le premier résultat est que si u est une image définie sur Ω et à moyenne positive, alors $T(u)$ est l'unique solution du problème d'optimisation suivant : trouver

$$v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ qui maximise } v(0) \text{ sous la contrainte } |\widehat{v}| = |\widehat{u}|.$$

De plus, par l'inégalité triangulaire, le texton $T(u)$ atteint sa valeur maximale en $x = 0$. On peut aussi montrer que le texton $T(u)$ est, parmi les images ayant même module en Fourier que u, celle qui optimise n'importe quelle dérivée d'ordre paire en 0. Une telle dérivée est alors donnée par :

$$\frac{\partial^{2m+2n} T(u)}{\partial^{2m} x_1 \partial^{2n} x_2}(0) = \frac{(-4\pi^2)^{m+n}}{M^{2m+1} N^{2n+1}} \sum_{\xi\in\Omega} \xi_1^{2m} \xi_2^{2n} |\widehat{u}(\xi)|.$$

Notons que toutes les dérivées d'ordre impair sont nulles en 0 à cause de la propriété de symétrie du texton.

Un deuxième résultat concerne la régularité de la transformée de Fourier du texton. On montre en effet que, si u est une image de moyenne positive (ce que l'on peut toujours supposer quitte à changer u en $-u$), alors le texton $T(u)$ minimise, parmi l'ensemble des images v ayant même module en Fourier que u, n'importe quelle norme L^p, $p > 0$, du gradient (périodique) discret de la transformée de Fourier donnée par

$$\begin{aligned} \| \nabla \widehat{v} \|_p^p &= \sum_{\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\Omega} (|\widehat{v}(\xi_1+1,\xi_2) - \widehat{v}(\xi_1,\xi_2)|^p \\ &\quad + |\widehat{v}(\xi_1,\xi_2+1) - \widehat{v}(\xi_1,\xi_2)|^p). \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $p = 2$, en revenant dans le domaine de l'image par le théorème de Parseval, ceci implique que le texton minimise, sous la contrainte $|\widehat{v}| = |\widehat{u}|$, la fonctionnelle suivante (qui est une mesure de concentration spatiale en 0) :

$$E(v) = \sum_{(x_1,x_2)\in\Omega} (\sin(\frac{\pi}{M}x_1)^2 + \sin(\frac{\pi}{N}x_2)^2) v(x_1,x_2)^2.$$

Textures gaussiennes Les textures gaussiennes forment une grande classe de l'ensemble des micro-textures. Parmi elles, les textures gaussiennes périodiques stationnaires se décrivent très bien dans le domaine de Fourier. En effet, elles sont caractérisées par la loi suivante : les coefficients de la transformée de Fourier pris sur un demi-domaine Ω_+ sont des variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes. Ce qui est équivalent à dire que, sur Ω_+, les phases sont i.i.d. uniformes sur $[0, 2\pi)$ et les modules sont indépendants et suivent des lois de Rayleigh. Ces textures gaussiennes peuvent se voir comme la limite asymptotique des modèles de texture de type *spot noise* (introduit par van Wijk [4]), et sont alors appelées ADSN (pour Asymptotic Discrete Spot Noise, suivant la terminologie de [1]). Une texture ADSN s'écrit $U = h * W$, où h est une image à moyenne nulle, et W est un bruit blanc. Le texton associé à U est alors donné par $T(U) = T(h) * T(W)$. L'analyse du texton de ces textures se ramène donc au calcul du texton d'un bruit blanc. Ce dernier se calcule explicitement. En particulier, on peut montrer que $T(W)$ est asympotiquement "proche" d'une masse de Dirac en 0. Plus précisement, on a la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit W une image de bruit blanc (i.e., les $W(x)$ sont i.i.d. de loi normale centrée réduite), alors $T(W)$ est une image aléatoire dont les moments sont donnés par :*

- $\mathbb{E}(T(W)(0)) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{MN}$ *et* $\mathbb{E}(T(W)(x)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{MN}}$ *pour $x \in \Omega$ et $x \neq 0$.*
- $\mathrm{Var}(T(W)(0)) \sim \frac{4-\pi}{2}$ *et* $\mathrm{Var}(T(W)(x)) = \frac{4-\pi}{4}$ *pour $x \in \Omega$ et $x \neq 0$.*
- $\mathrm{Cov}(T(W)(x), T(W)(y)) = \frac{\pi-2}{MN}$ *pour $x \neq y$*

C'est en ce sens que $T(W)$ est asymptotiquement proche (quand $NM \to +\infty$) d'une masse de Dirac en 0.

3 Applications

Analyse de texture Une première application possible du texton est l'analyse de textures. En effet le texton présente un "résumé" des propriétés de la texture : taille caractéristique, anisotropie, etc. Ceci vient du fait que, grâce à la propriété d'échange produit/convolution de la transformée de Fourier, on a $C_u = \frac{1}{MN} T(u) * T(u)$ où C_u est la covariance empirique

de l'image (supposée ici à moyenne empirique nulle). Le texton est donc moins flou que la covariance (car cette dernière s'obtient par une auto-convolution du texton), et il permet de formuler les statistiques du second ordre de la texture dans un espace identique à celui de la texture elle-même (i.e. sans manipuler des carrés d'intensités). Ces propriétés rendent le texton particulièrement intéressant pour l'analyse statistique des textures. Ceci est bien visible sur une image d'os du calcaneum telle que celle présentée sur la figure 1 et qui est provient de la base d'images collectées par l'équipe de l'Ipros à Orléans [5].

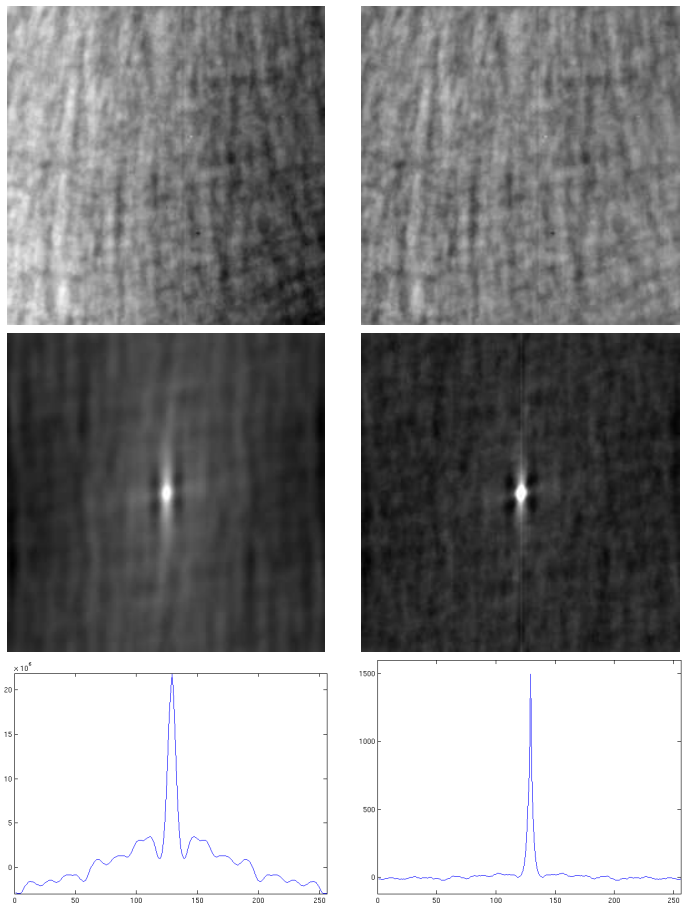

FIG. 1 – Au haut : l'image originale d'un os du calcaneum et à droite, sa composante périodique obtenue par la décomposition *periodic+smooth* [6]. Au milieu, la covariance empirique périodique de cette image et à droite le texton. Ce dernier est manifestement à la fois plus net et plus concentré que la covariance. Ceci est aussi illustré par les figures de la dernière ligne qui donnent l'intensité le long de la droite horizontale traversant les images au milieu : sur la covariance (à gauche) et sur le texton (à droite).

Synthèse de texture Une deuxième application est la synthèse de texture. On suppose ici que l'image est à moyenne nulle (on peut toujours s'y ramener). Le texton étant très concentré spatialement autour 0 et présentant peu de de grandes valeurs loin de 0, on peut effectuer un seuillage dur ce qui permet d'obtenir une image de texton à support compact. Pour synthétiser une texture de n'importe quelle taille, il suffit alors d'étendre par 0 le nouveau texton à support compact, puis de procéder à une randomisation des phases. Ceci est illustré sur les différentes images de la figure 2.

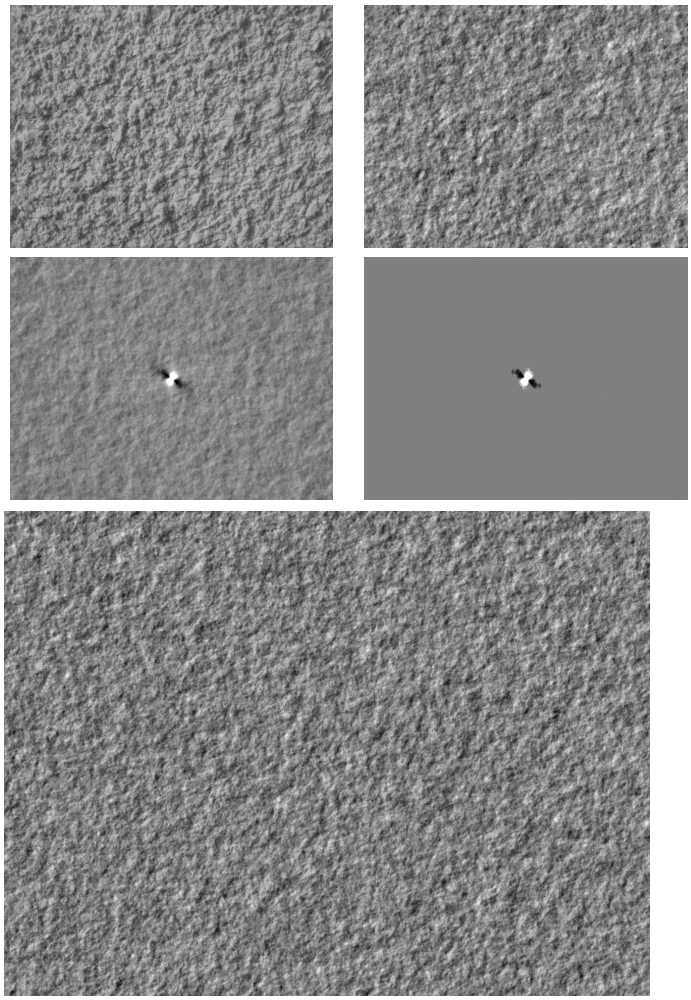

FIG. 2 – En haut à gauche, l'image originale u d'une texture (du crépi). Pour éviter les artefacts de bords dans la transformée de Fourier discrète, nous travaillons sur la composante périodique de l'image résultant de la décomposition *periodic+smooth* [6]. En haut à droite, une réalisation obtenue par randomisation (i.i.d. uniformes sur $[0, 2\pi)$) des phases. Au milieu à gauche, le texton $T(u)$ de l'image u, qui vérifie plusieurs propriétés de concentration en 0. Au milieu à droite, le texton $T(u)$ seuillé par seuillage dur. On obtient une image à support compact qui peut être étendue par 0 (moyenne de u) en dehors du domaine. Ceci permet alors de synthétiser, par randomisation de phases, des textures de n'importe quelle taille (image en bas, de taille double de la texture originale de crépi).

Cas des textures couleur Pour finir, signalons aussi que la notion de texton s'étend au cas de textures couleur. Dans ce cas, pour définir correctement le texton, sans créer d'artefacts de couleur, il faut non pas mettre les phases des trois canaux à zéro, mais plutôt retrancher la même phase à tous (celle de la luminance par exemple) pour garder intact le déphasage entre les canaux. On peut en effet montrer que cette définition est la seule qui permette de conserver le spectre de toutes les couleurs. Plus précisement, on a la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit* $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b)$ *une image couleur, définie sur* Ω *et à valeur dans* $\mathbb{R}^3$*. Pour tout* $\lambda = (\lambda_r, \lambda_g, \lambda_b) \in \mathbb{R}^3$*, on note* $\lambda \cdot \mathbf{u}$ *l'image à valeurs réelles définie sur* Ω *par* $\lambda \cdot \mathbf{u}(x) = \lambda_r u_r(x) + \lambda_g u_g(x) + \lambda_b u_b(x)$*.*

1. *Si* $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ *est un texton couleur associé à* $\mathbf{u}$*, alors la condition de conservation de toutes les amplitudes en Fourier qui s'écrit*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^3, \forall \xi \in \Omega, \quad \left|\widehat{\lambda \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u})}(\xi)\right| = \left|\widehat{\lambda \cdot \mathbf{u}}(\xi)\right| \quad (3)$$

est satisfaite si et seulement si il existe un champ de phase ϕ*, défini sur* Ω *vérifiant* $\phi(-\xi) = -\phi(\xi)$ *pour tout* $\xi \in \Omega$*, et tel que*

$$\forall k = r, g, b, \quad \widehat{\mathbf{T}(\mathbf{u})_k}(\xi) = \widehat{u_k}(\xi) e^{-i\phi(\xi)}. \quad (4)$$

2. *Soit* $\alpha = (\alpha_r, \alpha_g, \alpha_b) \in \mathbb{R}^3$*, et soit* ϕ_α *le champ de phase de la transformée de Fourier de* $\alpha \cdot \mathbf{u}$*. Alors si on note* $T_\alpha(\mathbf{u})$ *le texton couleur de* u *obtenu en retranchant aux 3 canaux la même phase* ϕ_α *(c'est à dire en prenant* $\phi = \phi_\alpha$ *dans l'équation* (4)*), on a*

$$T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot T_\alpha(\mathbf{u}),$$

où $T(\alpha \cdot \mathbf{u})$ *est le texton (au sens de la définition 1) de l'image à valeurs réelles* $\alpha \cdot \mathbf{u}$*.*

Une illustration du texton couleur obtenu sur une image de texture couleur, à partir de la luminance (c'est à dire en prenant $\alpha = (0.33, 0.5, 0.17)$) est montrée sur la figure 3.

FIG. 3 – Au haut, l'image originale : c'est la composante périodique (obtenue par [6]) d'une image de ciel au crépuscule. Au milieu, le texton couleur de cette image obtenu en retranchant à la phase de tous les canaux la phase de la luminance. En bas, une réalisation de la texture à phase aléatoire (la même phase aléatoire est utilisée sur les 3 canaux, afin de préserver toutes les amplitudes de la transformée de Fourier - cf Proposition 2).

Références

[1] B. Galerne, Y. Gousseau and J.-M. Morel, Random Phase Textures : Theory and Synthesis, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 20, No. 1, pp. 257–267, 2011.

[2] B. Julesz, Visual Pattern Discrimination, *IRE transactions on Information Theory*, Vol. 8, No. 2, pp.84–92, 1962.

[3] B. Julesz, A Theory of Preattentive Texture Discrimination Based on First-Order Statistics of Textons, *Biological Cybernetics*, Vol. 41, pp. 131–181, 1981.

[4] J. J. van Wijk, Spot noise texture synthesis for data visualization, In : *SIGGRAPH '91*, pp. 309–318, 1991.

[5] E. Lespessailles, C. Gadois, I. Kousignian, J. P. Neveu, P. Fardellone, S. Kolta, C. Roux, J. P. Do-Huu, C. L. Benhamou, Clinical interest of bone texture analysis in osteoporosis : a case control multicenter study, *Osteoporos Int.*, Vol. 19, pp. 1019–1028, 2008.

[6] L. Moisan, Periodic plus smooth image decomposition, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 39, No. 2, pp. 161–179, 2011.