



HAL
open science

Espaces de Hardy et compacité par compensation : un résultat en dimension deux

Fabien Flori, Catherine Giacomoni

► **To cite this version:**

Fabien Flori, Catherine Giacomoni. Espaces de Hardy et compacité par compensation : un résultat en dimension deux. 2010. hal-00604057

HAL Id: hal-00604057

<https://hal.science/hal-00604057>

Preprint submitted on 30 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ESPACES DE HARDY ET COMPACITÉ PAR COMPENSATION
UN RÉSULTAT EN DIMENSION 2

Fabien Flori

Université Française d'Égypte, fabien.flori@ufe.edu.eg

Catherine Giacomoni

Université de Corse, giaco@univ-corse.fr

Résumé - *Nous donnons un résultat faisant apparaître un phénomène de léger gain en régularité dans des quantités non linéaires par rapport à leur régularité apparente.*

On définit l'espace de Hardy généralisé introduit par E. Stein et G. Weiss [3] que nous noterons \mathcal{H}^1

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^2) / \sup_{\eta \geq 0} |h_\eta \star f| \in L^1(\mathbb{R}^2) \right\}$$

où $h_\eta(x) = \frac{1}{\eta^2} h\left(\frac{x}{\eta}\right) \geq 0$ appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et vérifie :

$$\text{supp} h_\eta(x) \subset B_\eta^x, \quad \int_{\mathbb{R}^2} h_\eta(x) dx = 1.$$

On travaille dans ce qui suit sur des espaces de Hardy définis sur des domaines bornés et en particulier on pose :

$$\mathcal{H}_z^1(\Omega) = \{ f \in L^1(\Omega) / f_z \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \}$$

où f_z est le prolongement de f par 0 dans \mathbb{R}^2 . Notons que toute fonction f dans $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ vérifie $\int_{\Omega} f dx = 0$. Une norme sur cet espace est donnée par

$$\|f\|_{\mathcal{H}_z^1(\Omega)} = \|f_z\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}.$$

On définit l'espace de *Hardy-Sobolev* $W^1\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions ϕ de $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ dont les dérivées $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ appartiennent aussi à $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$. On note $W_0^1\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^1\mathcal{H}_z^1(\Omega)$. On munit $W_0^1\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ de la norme :

$$\|\phi\|_{W_0^1\mathcal{H}_z^1(\Omega)} = \|\text{div } \phi\|_{\mathcal{H}_z^1(\Omega)} + \|\text{curl } \phi\|_{\mathcal{H}_z^1(\Omega)}.$$

On montre le résultat suivant :

Théorème 1 - Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $v = (v_1, v_2) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ alors

$$v_i v_j \in L^2(0, T; W^1\mathcal{H}_z^1(\Omega)) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

Remarque 1 - On retrouve ainsi un résultat classique en mécanique des fluides lorsque le fluide est incompressible et que $\text{div } v = 0$. En effet, si $v_i v_j \in$

$L^2(0, T; W^1\mathcal{H}_z^1(\Omega))$ alors le terme d'advection $(v \cdot \nabla)v$ appartient à $L^2(0, T; \mathcal{H}_z^1(\Omega))$ avec $\mathcal{H}_z^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ dans le cas de la dimension 2 [2].

Lemme 1 - Si $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ alors :

$$\text{curl}(v_j v) \in L^2(0, T; \mathcal{H}_z^1(\Omega)) \quad \forall j \in \{1, 2\}.$$

Preuve du lemme 1 - Dans ce qui suit, comme $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on prolonge v et $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ par 0 sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$.

Pour tout $x \in \Omega$, on note B_η^x la boule de \mathbb{R}^2 de centre x et de rayon η . Sur chaque boule B_η^x , on peut toujours décomposer v de façon unique sous la forme :

$$v = \nabla p_\eta^x + \text{Curl } q_\eta^x$$

avec $\text{Curl} q = (\frac{\partial q}{\partial x_2}, -\frac{\partial q}{\partial x_1})$, $p_\eta^x \in H^1(B_\eta^x)$ et $q_\eta^x \in H_0^1(B_\eta^x)$. Bien sûr, si B_η^x et $B_{\eta'}^{x'}$ sont deux boules telles que $B_\cap = B_\eta^x \cap B_{\eta'}^{x'} \neq \emptyset$, sur chacune de ces boules, v se décompose de façon unique et il est clair que l'on n'a pas nécessairement $\text{Curl } q_\eta^x = \text{Curl } q_{\eta'}^{x'}$ sur B_\cap . Toutefois, on a $\text{curl } u = \text{curl } \text{Curl } q_\eta^x = \text{curl } \text{Curl } q_{\eta'}^{x'}$ sur B_\cap . Cette propriété sera utile par la suite.

Sur chaque boule B_η^x on a la décomposition :

$$\text{curl}(v_j v) = \text{curl}(v_j \text{Curl } q_\eta^x) - \nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j.$$

On estime séparément chacun des termes du second membre en utilisant les propriétés de la décomposition $v = \nabla p_\eta^x + \text{Curl } q_\eta^x$ sur chaque boule. On obtient une borne de $\text{curl}(v_j v)$ dans $L^2(0, T; \mathcal{H}_z^1(\Omega))$ indépendante de η .

1ère étape - Estimation de $\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j$.

On adapte le théorème div - curl [1] au terme $\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j$.

$$|\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| = \left| \int_{B_\eta^x} (\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j)(y) \frac{1}{\eta^2} h\left(\frac{x-y}{\eta}\right) dy \right|$$

Comme $h_\eta(x)$ est à support compact sur B_η^x , il vient :

$$|\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| = \left| \int_{B_\eta^x} \nabla p_\eta^x(y) \left(\frac{v_j - \bar{v}_j}{\eta}\right)(y) \frac{1}{\eta^2} \text{Curl } h\left(\frac{x-y}{\eta}\right) dy \right|$$

où $\bar{v}_j = \int_{B_\eta^x} v_j dy$ et $\nabla p_\eta^x = v - \text{Curl } q_\eta^x$. Si on pose $C_0 = \pi \|\text{Curl } h\|_\infty$ et $\text{mes}(B_\eta^x) = \pi \eta^2$ on obtient :

$$|\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| \leq C_0 \int_{B_\eta^x} \left| \frac{v_j(y) - \bar{v}_j}{\eta} \right| |v(y)| dy + C_0 \int_{B_\eta^x} |v_j(y) - \bar{v}_j| \left| \frac{\text{Curl } q_\eta^x(y)}{\eta} \right| dy$$

Avec l'inégalité de Holder, en posant $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$, on a :

$$|\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| \leq C_1 \left(\int_{B_\eta^x} \left| \frac{v_j(y) - \bar{v}_j}{\eta} \right|^{\beta'} dy \right)^{\frac{1}{\beta'}} \left(\int_{B_\eta^x} |v|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$+C_1 \left(\int_{B_\eta^x} |v_j(y) - \bar{v}_j|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_{B_\eta^x} \left| \frac{\text{Curl } q_\eta^x}{\eta} \right|^{\beta'} dy \right)^{\frac{1}{\beta'}}$$

On applique ensuite l'inégalité de Sobolev-Poincaré avec $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta'}$. Il vient d'une part :

$$\left(\int_{B_\eta^x} \left| \frac{v_j(y) - \bar{v}_j}{\eta} \right|^{\beta'} dy \right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq C_2 \left(\int_{B_\eta^x} |\nabla v_j|^\alpha dy \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et d'autre part, comme $\int_{B_\eta^x} \text{Curl } q_\eta^x dy = 0$, $\text{Curl } q_\eta^x \cdot n = 0$ sur ∂B_η^x et $\text{curl } v = \text{curl } \text{Curl } q_\eta^x$ sur B_η^x , il est clair avec l'inégalité de Sobolev-Poincaré que :

$$\left(\int_{B_\eta^x} \left| \frac{\text{Curl } q_\eta^x}{\eta} \right|^{\beta'} dy \right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq C_3 \left(\int_{B_\eta^x} |\text{curl } v|^\alpha dy \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sup_{\eta>0} |\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| &\leq C_4 \left(\sup_{\eta>0} \int_{B_\eta^x} |\nabla v_j|^\alpha dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sup_{\eta>0} \int_{B_\eta^x} |v|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &+ C_5 \left(\int_{B_\eta^x} |v_j(y) - \bar{v}_j|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\sup_{\eta>0} \int_{B_\eta^x} |\text{curl } v|^\alpha dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

avec

$$\left(\int_{B_\eta^x} |v_j(y) - \bar{v}_j|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq C_5 \left(\int_{B_\eta^x} |v_j(y)|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}} + C_5 \int_{B_\eta^x} |v_j(y)| dy$$

En posant $\sup_{\eta>0} \int_{B_\eta^x} |f| dy = M(f)$, on parvient à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sup_{\eta>0} |\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| dx &\leq C_4 \int_{\Omega} (M(|\nabla v_j|^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} (M(|v|^\beta))^{\frac{1}{\beta}} dx \\ &+ C_5 \int_{\Omega} (M(|v_j|^\beta))^{\frac{1}{\beta}} (M(|\text{curl } v|^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} dx + C_5 \int_{\Omega} (M(|v_j|)) (M(|\text{curl } v|^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} dx \end{aligned}$$

On utilise à nouveau l'inégalité de Holder $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sup_{\eta>0} |\nabla p_\eta^x \text{Curl } v_j * h_\eta(x)| dx &\leq C_6 \|M(|\nabla v_j|^\alpha)\|_{L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{1}{\alpha}} \left\| M(|v|^\beta) \right\|_{L^{\frac{p'}{\beta}}(\Omega)}^{\frac{1}{\beta}} \\ &+ C_7 \left\| M(|v_j|^\beta) \right\|_{L^{\frac{p'}{\beta}}(\Omega)}^{\frac{1}{\beta}} \|M(|\text{curl } v|^\alpha)\|_{L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{1}{\alpha}} \\ &+ C_8 \|M(|v_j|)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|M(|\text{curl } v|^\alpha)\|_{L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Finalement en choisissant $\beta' < p'$ et $\alpha < p$ on peut appliquer le théorème maximal de Hardy-Littlewood :

$$\int_{\Omega} \sup_{\eta>0} |\nabla p_{\eta}^x \text{Curl } v_j * h_{\eta}(x)| dx \leq C_9 \|\nabla v_j\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} + C_{10} \|v_j\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\text{curl } v\|_{L^p(\Omega)}$$

Si on fixe $p = p' = 2$, comme $v \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, alors :

$$\int_{\Omega} \sup_{\eta>0} |\nabla p_{\eta}^x \text{Curl } v_j * h_{\eta}(x)| dx \leq C(t) \in L^2(0, T)$$

Finalement, comme d'une part $\int_{\Omega} \nabla p_{\eta}^x \text{Curl } v_j dx = 0$ et que d'autre part $\nabla p_{\eta}^x \text{Curl } v_j = 0$ sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$ (car on a prolongé v_j et $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ par 0 sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$), on obtient :

$$\nabla p_{\eta}^x \text{Curl } v_j \in L^2(0, T; \mathcal{H}_z^1(\Omega)) \quad (0.1)$$

2ème étape - Estimation de $\text{curl}(v_j \text{Curl } q_{\eta}^x)$.

On a :

$$|\text{curl}(v_j \text{Curl } q_{\eta}^x) * h_{\eta}(x)| = \left| \int_{B_{\eta}^x} \frac{1}{\eta^2} \text{Curl } h \left(\frac{x-y}{\eta} \right) v_j(y) \frac{\text{Curl } q_{\eta}^x(y)}{\eta} dy \right|$$

et avec l'inégalité de Holder si $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$:

$$|\text{curl}(v_j \text{Curl } q_{\eta}^x) * h_{\eta}(x)| \leq C_1 \left| \left(\int_{B_{\eta}^x} |v_j|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_{B_{\eta}^x} \left(\frac{|\text{Curl } q_{\eta}^x|}{\eta} \right)^{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \right|.$$

Comme $\int_{B_{\eta}^x} \text{Curl } q_{\eta}^x dy = 0$, $\text{Curl } q_{\eta}^x \cdot n = 0$ sur ∂B_{η}^x et $\text{curl } v = \text{curl } \text{Curl } q_{\eta}^x$ sur B_{η}^x , il est clair avec l'inégalité de Sobolev-Poincaré que :

$$\left(\int_{B_{\eta}^x} \left| \frac{\text{Curl } q_{\eta}^x}{\eta} \right|^{\beta'} dy \right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq C_2 \left(\int_{B_{\eta}^x} |\text{curl } v|^{\alpha} dy \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

avec $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta'}$. Ainsi, en posant $\sup_{\eta>0} \int_{B_{\eta}^x} |f| = M(f)$, on parvient à :

$$\int_{\Omega} \sup_{\eta>0} |\text{curl}(v_j \text{Curl } q_{\eta}^x) * h_{\eta}(x)| dx \leq C_4 \int_{\Omega} \left(M(|v_j|^{\beta}) \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(M(|\text{curl } v|^{\alpha}) \right)^{\frac{1}{\alpha}} dx$$

et toujours avec l'inégalité de Holder si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\int_{\Omega} \sup_{\eta>0} |\text{curl}(v_j \text{Curl } q_{\eta}^x) * h_{\eta}(x)| dx \leq C_5 \left\| M(|v_j|^{\beta}) \right\|_{L^{\frac{p}{\beta}}(\Omega)}^{\frac{1}{\beta}} \left\| M(|\text{curl } v|^{\alpha}) \right\|_{L^{\frac{p'}{\alpha}}(\Omega)}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Finalement, si on choisit $\beta < p = 2$ et $\alpha < p' = 2$, le théorème du maximum de Hardy-Littlewood montre que :

$$\int_{\Omega} \sup_{\eta > 0} |\operatorname{curl} (v_j \operatorname{Curl} q_{\eta}^x) * h_{\eta}(x)| \, dx \leq C_6 \|v_j\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{curl} v\|_{L^2(\Omega)} \in L^2(0, T).$$

Finalement, comme d'une part :

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} (v_j \operatorname{Curl} q_{\eta}^x) \, dx = 0$$

et que d'autre part $\operatorname{curl} (v_j \operatorname{Curl} q_{\eta}^x) = 0$ sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$ (car on a prolongé v_j et $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ par 0 sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$), on obtient :

$$\operatorname{curl} (v_j \operatorname{Curl} q_{\eta}^x) \in L^2(0, T; \mathcal{H}_z^1(\Omega)). \quad (0.2)$$

De (0.1) et (0.2) on tire le résultat annoncé dans le lemme.

Lemme 2 - Si $v \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ alors :

$$\operatorname{div} (v_j v) \in L^2(0, T; \mathcal{H}_z^1(\Omega)).$$

Preuve du lemme 2 - En dimension 2 on remarque que :

$$\operatorname{div} (v_j v) = -\operatorname{curl} (v_j \alpha(v)), \quad \alpha(v) = (-v_2, v_1).$$

Sur chaque boule B_{η}^x , on peut toujours décomposer $\alpha(v)$ de façon unique sous la forme :

$$\alpha(v) = \nabla r_{\eta}^x + \operatorname{Curl} s_{\eta}^x$$

avec $r_{\eta}^x \in H^1(B_{\eta}^x)$ et $s_{\eta}^x \in H_0^1(B_{\eta}^x)$. On remarque que :

$$-\operatorname{div} (v_j v) = \operatorname{curl} (v_j \alpha(v)) = \operatorname{curl} (v_j \operatorname{Curl} s_{\eta}^x) - \operatorname{Curl} v_j \nabla r_{\eta}^x.$$

On procède alors comme au lemme 1 et on prouve que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sup_{\eta > 0} |\operatorname{Curl} v_j \nabla r_{\eta}^x * h_{\eta}(x)| \, dx &\leq C_1 \|\nabla v_j\|_{L^2(\Omega)} \|\alpha(v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C_2 \|v_j\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{curl} \alpha(v)\|_{L^2(\Omega)} \in L^2(0, T), \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} \sup_{\eta > 0} |\operatorname{curl} (v_j \operatorname{Curl} s_{\eta}^x) * h_{\eta}(x)| \, dx \leq C_3 \|u_j\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{curl} \alpha(u)\|_{L^2(\Omega)} \in L^2(0, T)$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé.

Preuve du théorème 1 - La preuve du théorème est une simple conséquence des lemmes 1 et 2.

RÉFÉRENCES

- [1] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes : Séminaire Equations aux Dérivées Partielles - Ecole Polytechnique **14**, (1989-1990), p. 1-8.
- [2] J. Hogan, C. LI, A. McIntosh, K. Zhang : Ann. Inst. Henri Poincaré **17**, (2000), p. 193-217.
- [3] E. Stein et G. Weiss : Acta Math., **103** (1960), p. 25-62.