



HAL
open science

Un outil complètement automatisé pour l'évaluation en profondeur des performances des modèles d'homogénéisation

Elias Ghossein, Martin Lévesque

► **To cite this version:**

Elias Ghossein, Martin Lévesque. Un outil complètement automatisé pour l'évaluation en profondeur des performances des modèles d'homogénéisation. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.66. hal-00603052

HAL Id: hal-00603052

<https://hal.science/hal-00603052>

Submitted on 24 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un outil complètement automatisé pour l'évaluation en profondeur des performances des modèles d'homogénéisation

A fully automated tool for a thorough evaluation of homogenization models performances

Elias Ghossein¹ et Martin Lévesque¹

¹ : CREPEC, Département de Génie Mécanique
École Polytechnique de Montréal - Québec - Canada
e-mail : elias.ghossein@polymtl.ca, martin.levesque@polymtl.ca

Résumé

Les modèles d'homogénéisation analytiques permettent de prédire le comportement mécanique de composites à partir de la connaissance de la microstructure ainsi que des propriétés des phases constituantes. En vue d'avoir une certaine confiance dans ces modèles, il est nécessaire de les valider par des méthodes numériques. Cette communication présente un outil complètement automatisable permettant de valider les performances de certains modèles d'homogénéisation analytiques pour des matrices isotropes renforcées par des inclusions sphériques isotropes et aléatoirement distribuées. Les sphères ont été générées par un algorithme basé sur la dynamique moléculaire. Les propriétés effectives du composite ont été déterminées grâce à un algorithme basé sur la Transformée de Fourier Rapide (TFR). Les prédictions de certains modèles analytiques sont comparées par rapport à la solution exacte fournie par l'outil numérique. Les modèles Mori-Tanka et auto-cohérent fournissent des solutions précises pour de faibles fractions volumiques. Ceci n'est pas le cas pour une grande fraction volumique d'inclusions, surtout lorsque le contraste entre sphère et matrice est élevé.

Abstract

Analytical homogenization models can predict the mechanical behaviour of composites from the knowledge of the microstructure and properties of the constituent phases. To have some confidence in these models, it is necessary to validate them by using numerical methods. This paper presents a fully automated tool to validate the performance of some analytical homogenization models for an isotropic matrix with randomly-distributed isotropic spherical inclusions. The spheres were generated by an algorithm based on molecular dynamics. The effective properties of the composite were determined using an algorithm based on Fast Fourier Transform (FFT). The predictions of some analytical models are compared against the exact solution provided by the numerical tool. Mori-Tanka and self-consistent models provide accurate solution for low volume fractions of spheres. This is not the case for high volume fractions of spheres, especially when the contrast between mechanical properties is important.

Mots Clés : Matériau composite, Modèle d'homogénéisation, Microstructures artificielles, Transformée de Fourier Rapide, Simulation numérique.

Keywords: Composite material, Homogenization models, Artificial microstructures, Fast Fourier Transform, Numerical simulation

1. Introduction

Plusieurs modèles d'homogénéisation analytiques permettent de prédire le comportement mécanique des composites à partir des propriétés des phases constituantes. Dans le schéma auto-cohérent (AC) [1,2], les propriétés mécaniques d'un composite sont déterminées en utilisant une configuration auxiliaire dans laquelle tous les renforts sont placés dans un milieu homogène équivalent. Ce milieu aura les mêmes propriétés effectives du matériau composite que l'on cherche

à identifier. Le modèle de Mori-Tanaka [3] repose sur un principe similaire au modèle AC mais où le milieu effectif est remplacé par la matrice in-situ le composite.

Afin d'évaluer la précision de ces modèles, il est nécessaire de les valider par des méthodes numériques. Il sera ainsi possible d'affirmer qu'un modèle est plus adapté qu'un autre pour une famille de microstructures donnée. Il n'existe pas d'étude systématique où l'on compare plusieurs modèles d'homogénéisation pour une vaste gamme de propriétés mécaniques, pour des distributions d'orientation particulières ainsi que pour des renforts aux formes variées. Étant donné qu'une grande campagne de validation est envisagée, les méthodes numériques ont avantage à être complètement automatisées. L'établissement de l'outil numérique requiert deux étapes indépendantes l'une de l'autre. La première consiste en la génération aléatoire de microstructures représentatives des composites étudiés. La seconde étape consiste à déterminer de manière précise les propriétés effectives des composites.

L'objectif de cet article est de présenter un outil complètement automatisé capable de valider les prédictions de quelques modèles d'homogénéisation analytiques pour des microstructures renforcées par des sphères. Cette communication est organisée de la manière suivante : la Section 2 introduit de manière succincte l'algorithme de génération aléatoire des microstructures artificielles. Les étapes nécessaires pour le calcul des propriétés effectives sont présentées à la Section 3. La Section 4 résume la méthodologie adoptée afin de réaliser la campagne de validation. Finalement, quelques comparaisons entre l'outil de validation et certains modèles d'homogénéisation sont présentées à la Section 5.

2. Génération aléatoire de microstructures artificielles périodiques

La majorité des microstructures aléatoires pour les composites présentes dans la littérature ont été générées par l'algorithme d'adsorption séquentielle aléatoire (ASA) [4,5]. Cet algorithme consiste à tirer au hasard la position d'un premier renfort. La position du second renfort est par la suite tirée aléatoirement. S'il y a interférence entre les deux renforts, la position du second est de nouveau tirée au hasard jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de contact avec le premier renfort. Le processus est répété ainsi de suite jusqu'à ce que la fraction volumique et le nombre de renforts voulus soient atteints. L'inconvénient majeur de cet algorithme est qu'il ne permet pas d'avoir un grand nombre de fibres ainsi qu'une fraction volumique élevée, en un temps de calcul raisonnable.

L'algorithme proposé par Lubachevsky et Stillinger [6] permet d'obtenir des fractions volumiques plus élevées et en un temps plus court que l'algorithme ASA. Celui-ci est basé sur la dynamique moléculaire. Les auteurs l'ont initialement appliqué pour des disques en deux dimensions et pour des sphères en trois dimensions. Au temps zéro, toutes les sphères sont créées et ont un volume nul. Une position et un vecteur vitesse leur sont attribués aléatoirement. Les sphères se mettent alors en mouvement et leur volume augmente progressivement. Si deux sphères rentrent en collision, leur vecteur vitesse est mis à jour selon le principe de l'énergie cinétique. Si une sphère quitte la cellule élémentaire à travers une certaine face, elle doit rentrer par la face opposée afin d'assurer les conditions de périodicité. La simulation s'arrête lorsque la fraction volumique voulue est atteinte. Les grandes lignes de cet algorithme sont présentées à l'Algorithme 1).

La (Fig. 1) montre un exemple de volume élémentaire périodique obtenu à l'aide de l'outil développé. Le volume contient 500 renforts sphériques pour une fraction volumique de 60%. L'outil permet également d'atteindre une fraction volumique de 74%, représentant la fraction maximale qu'il est possible d'atteindre pour une distribution de sphères identiques dans un cube [6].

Algorithme 1: Génération aléatoire de particules sphériques périodiques

- A. Soit un nombre de sphères, noté N et une fraction volumique désirée, notée v^f
- B. Initialisation des N sphères. Pour chaque sphère, assigner :
1. Position aléatoire
 2. Vecteur vitesse aléatoire
 3. Rayon $r_0 = 0$
 4. Taux de croissance du rayon = a_0
 5. $t_0 = 0$
- C. Initialisation de la fraction volumique réelle initiale: $v_0^r = 0$
- D. **Tant que** $v_i^r < v^f$
1. Calculer le temps de collision pour chaque paire de sphères
 2. Choisir le temps minimum, noté $t_{\text{collision}}$
 3. Calculer le temps de collision entre chaque sphère et les 6 faces du cube
 4. Choisir le temps minimum, noté t_{cube} .
 5. Identifier le prochain événement (collision ou sortie du cube) à $\Delta t_i = \min(t_{\text{collision}}, t_{\text{cube}})$
 6. Faire avancer toutes les sphères au temps $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$
 - i. Mise à jour de la position
 - ii. Mise à jour du rayon: $r_{i+1} = r_i + a_0 \Delta t_i$
 7. **Si** prochain événement = collision binaire
 - i. Mise à jour des vecteurs vitesse des deux sphères concernées
 8. **Si** prochain événement = sortie de cube d'une sphère
 - i. Créer n image(s) périodique(s) de la sphère ($n = 1$ si sortie par une face, $n=3$ si sortie par une arête et $n = 7$ si sortie par un coin.)
 9. Calculer nouvelle fraction volumique réelle $v_{i+1}^r = f(N, r_{i+1})$
- E. Fin de la boucle **Tant que**
-

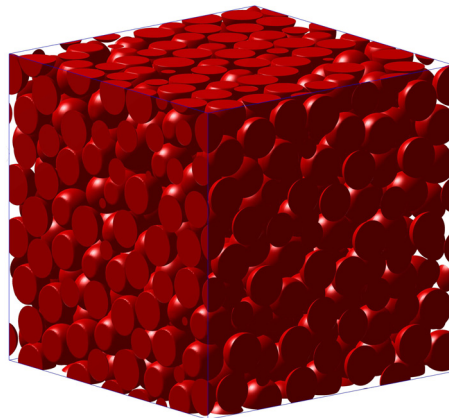


Fig. 1: 500 renforts sphériques distribués aléatoirement dans une cellule élémentaire pour une fraction volumique de 60%

3. Calcul des propriétés effectives du composite

Une fois les microstructures artificielles obtenues, des conditions aux frontières ont été imposées et le problème a été résolu afin d'obtenir les champs de contraintes et de déformations. Ceux-ci ont été déterminés à l'aide d'un algorithme proposé par Moulinec et Suquet [7] basé sur la Transformée de Fourier Rapide (TFR) et accéléré par les travaux de Eyre et Milton [8]. La technique proposée par les auteurs nécessite la connaissance des propriétés des constituants selon une grille en trois dimensions. Cela consiste donc à « voxéliser » une microstructure comme celle présentée à la (Fig. 1). L'avantage principal de cette technique est qu'elle ne requiert pas de maillage. Elle est donc

complètement automatisable. Les sous-sections suivantes présentent les grandes lignes de cet algorithme.

3.1 Discrétisation du volume élémentaire

La microstructure obtenue par l'algorithme de génération aléatoire est discrétisée en $N_1 \times N_2 \times N_3$ voxels cubiques. Un matériau est attribué à chaque voxel. Pour y parvenir, neuf points uniformément distribués ont été considérés dans chaque voxel. L'appartenance de chacun de ces points à la matrice ou à une sphère est vérifiée. Si la majorité des points appartiennent à une sphère, alors le voxel se verra attribuer les propriétés mécaniques des sphères. Dans le cas contraire, le voxel est considéré comme étant matrice. La règle d'arbitrage conduit à trois types de discrétisation: par défaut, normale et par excès. L'unique différence entre ces types de discrétisation est le nombre minimal de points devant appartenir à une sphère afin que le voxel en entier soit considéré comme sphère. Ce nombre vaut respectivement 6, 5 et 4 pour une discrétisation par défaut, normale et par excès. La discrétisation par excès contient toujours plus de sphères que celle par défaut. La moyenne des deux fractions volumiques résultantes tend plus rapidement vers la vraie fraction de sphères lorsque la résolution est plus fine. Ces différents types de discrétisation permettent donc de fournir un encadrement des propriétés mécaniques du composite.

La (Fig. 2) montre un exemple de discrétisation normale d'une cellule élémentaire selon une grille de $160 \times 160 \times 160$ voxels.

3.2 Calcul des propriétés homogénéisées en utilisant la TFR

Les étapes principales de l'algorithme sont présentées à l'Algorithme 2). x_d dénote les coordonnées des voxels dans l'espace réel alors que ξ_d représente les fréquences dans l'espace de Fourier.

TFR et TFR⁻¹ désignent respectivement la Transformée de Fourier Rapide et la Transformée de Fourier Rapide inverse. Deux types d'erreur ont été calculés dans cet algorithme. L'erreur d'équilibre permet de vérifier si le champ de contrainte est à l'équilibre. Cette erreur a été calculée à chaque itération dans l'espace de Fourier. L'erreur de compatibilité permet de mesurer l'écart entre le champ de déformation ε et un autre champ compatible e_{comp} calculé à l'étape D.7. Ceci permet de tester la compatibilité du champ de déformation à chaque itération. A la convergence, ces deux champs tendent vers la même limite.

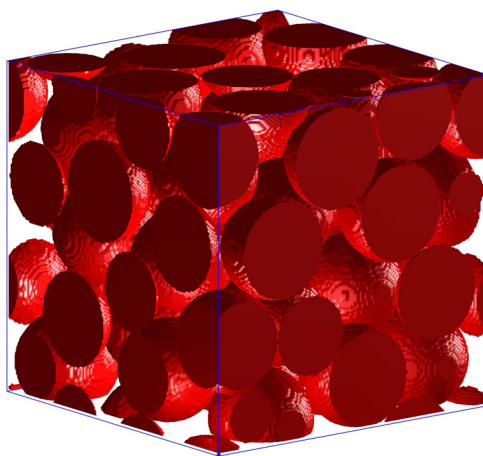


Fig. 2: Microstructure discrétisée selon une grille $160 \times 160 \times 160$. Nombre de renforts: 40. Fraction volumique: 60%

Algorithme 2: Calcul des propriétés effectives du composite

- A. Initialisation du champ de déformation $\varepsilon^0(x_d) = E$, $\forall x_d \in V$, où E dénote la moyenne de la déformation périodique à imposer.
- B. Soit le tenseur de rigidité discrétisé, noté par $C(x_d)$
- C. Initialisation de l'erreur d'équilibre et de compatibilité : $err_eq = 1$ et $err_comp = 1$
- D. **Tant que** $\max(err_eq, err_comp) > 10^{-4}$
1. $\sigma^i(x_d) = C(x_d) : \varepsilon^i(x_d)$
 2. $\hat{\sigma}^i = TFR(\sigma^i)$
 3. Évaluer l'erreur d'équilibre sur la contrainte: $err_eq = f(\hat{\sigma}^i)$
 4. $r^i(x_d) = C(x_d) : \varepsilon^i(x_d) + C^0 : \varepsilon^i(x_d)$
 5. $\hat{r}^i = TFR(r^i)$
 6. $\hat{e}_{comp}^i(\xi_d) = \Gamma^0(\xi_d) : \hat{r}^i(\xi_d) \quad \forall \xi_d \neq 0$ et $\hat{e}_{comp}^i(0) = E$
 7. $e_{comp}^i = TFR^{-1}(\hat{e}_{comp}^i)$
 8. Évaluer l'erreur de compatibilité: $err_comp = f(\varepsilon^i, e_{comp}^i)$
 9. $\varepsilon^{i+1}(x_d) = \varepsilon^i(x_d) - 2(C(x_d) - C^0)^{-1} : C^0 : (e_{comp}^i - \varepsilon^i)$
- E. Fin de la boucle **Tant que**

Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est proportionnel à \sqrt{K} [8], K étant le contraste entre les propriétés de la matrice et celles des sphères. Pour une vitesse de convergence optimale, le matériau de référence, dont le tenseur de rigidité est noté par C^0 , a été choisi tel que [7] :

$$k^0 = \sqrt{k_1 k_2} \quad (\text{Eq. 1a})$$

$$\mu^0 = \sqrt{\mu_1 \mu_2} \quad (\text{Eq. 1b})$$

k et μ désignent respectivement le module de compressibilité et de cisaillement. L'indice 1 réfère à la matrice alors que l'indice 2 réfère aux sphères. Dans l'algorithme, Γ^0 dénote l'opérateur de Green. Le livre de Mura [9] fournit de expressions détaillées de cet opérateur pour différentes symétries matérielles. Lorsque le matériau de référence est isotrope, l'opérateur s'exprime dans l'espace de Fourier sous la forme :

$$\Gamma_{ijkl}^0(\xi) = \frac{1}{4\mu^0 |\xi|^2} (\delta_{ki} \xi_l \xi_j + \delta_{li} \xi_k \xi_j + \delta_{kj} \xi_l \xi_i + \delta_{lj} \xi_k \xi_i) - \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\mu^0 (\lambda^0 + 2\mu^0)} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}{|\xi|^4} \quad (\text{Eq. 2})$$

où λ^0 dénote le coefficient de lamé du matériau de référence.

Les propriétés homogénéisées du composite ont été déduites à partir de la moyenne volumique des contraintes et déformations. Ces deux entités sont en fait reliées par la relation suivante :

$$\langle \sigma(x_d) \rangle = \tilde{C} : \langle \varepsilon(x_d) \rangle \quad (\text{Eq. 3})$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne sur le volume et \tilde{C} désigne le tenseur effectif du composite que l'on cherche à identifier.

3.3 Parallélisation de l'algorithme

Le calcul de chaque colonne (en notation de Voigt modifiée) du tenseur de rigidité effectif \tilde{C} a été réalisé en imposant un champ de déformation périodique dans une direction particulière. Par exemple, la première colonne a été déterminée en imposant une déformation dans la première direction principale (ε_{11}). Les cinq autres colonnes sont déduites de manière équivalente. Ainsi, l'algorithme 2 doit être appelé six fois de manière indépendante, d'où l'idée de paralléliser les calculs. Dans chaque processeur, une déformation périodique a été imposée dans une direction particulière et la colonne correspondante du tenseur de rigidité a été déterminée. Les résultats ont été par la suite récupérés de chaque processeur et le tenseur effectif a été assemblé. En utilisant un ordinateur à six processeurs, le temps de calcul a quasiment été réduit de six fois.

4. Campagne de validation

Les performances de quelques modèles d'homogénéisation présents dans la littérature ont été évaluées avec l'outil de validation présenté aux Sections 2 et 3. Dans cette communication, on considère le cas de microstructures constituées d'une matrice isotrope renforcée par des sphères isotropes. Une vaste gamme de propriétés mécaniques a été balayée. Plusieurs valeurs de contrastes entre sphères et matrice ont été considérées. On définit trois types de contrastes faisant intervenir les modules de compressibilité et de cisaillement : μ_2 / μ_1 , k_1 / μ_1 et k_2 / μ_1 . Chacun de ces contrastes a été varié entre 1 et 10^3 . Plusieurs fractions volumiques allant jusqu'à 50% ont été également étudiées.

Pour chaque combinaison de contraste et de fraction volumique, les propriétés isotropes effectives ont été calculées en utilisant la méthodologie de Kanit et al [10]. Pour un même nombre de sphères, plusieurs simulations aléatoires ont été lancées jusqu'à ce que la mi-largeur d'un intervalle de confiance de niveau 95% sur la valeur moyenne soit inférieure à 1% de la valeur moyenne. La procédure a été répétée pour un nombre croissant de sphères. Le volume élémentaire représentatif (VER) a été obtenu lorsque les propriétés effectives ne variaient plus d'un nombre de sphères à l'autre. Les propriétés effectives finales ont été celles calculées pour le volume élémentaire représentatif. Il est également important de noter qu'une analyse de convergence en nombre de voxels a été effectuée pour chaque réalisation. Finalement, chaque microstructure aléatoire a été "voxélisée" selon les trois types de discrétisation : par défaut, normale et par excès.

5. Résultats et discussions

5.1 Comparaison avec les éléments finis

Avant d'entamer la campagne de validation, quelques résultats de l'outil numérique ont été comparés avec ceux obtenus par un modèle d'éléments finis dans le but d'en assurer l'exactitude. Une sphère centrée dans un cube a été considérée. Les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice ont été fixés à 1. Les propriétés de la sphère ont été fixées à $\mu_2 = 100$ et $k_2 = 100$.

Le volume élémentaire a été maillé avec ANSYS par des éléments tétraédriques et des conditions aux rives périodiques ont été imposées. Dans l'outil de validation, une discrétisation normale de $64 \times 64 \times 64$ voxels a été utilisée. La (Fig. 3) compare les propriétés effectives obtenues par les deux méthodes en fonction de la fraction volumique de la sphère. Étant donné que le modèle présente une symétrie cubique, uniquement trois coefficients indépendants du tenseur de rigidité effectif ont été considérés. On peut constater que la différence entre les propriétés obtenues par les deux techniques est négligeable.

5.2 Validation de quelques modèles d'homogénéisation

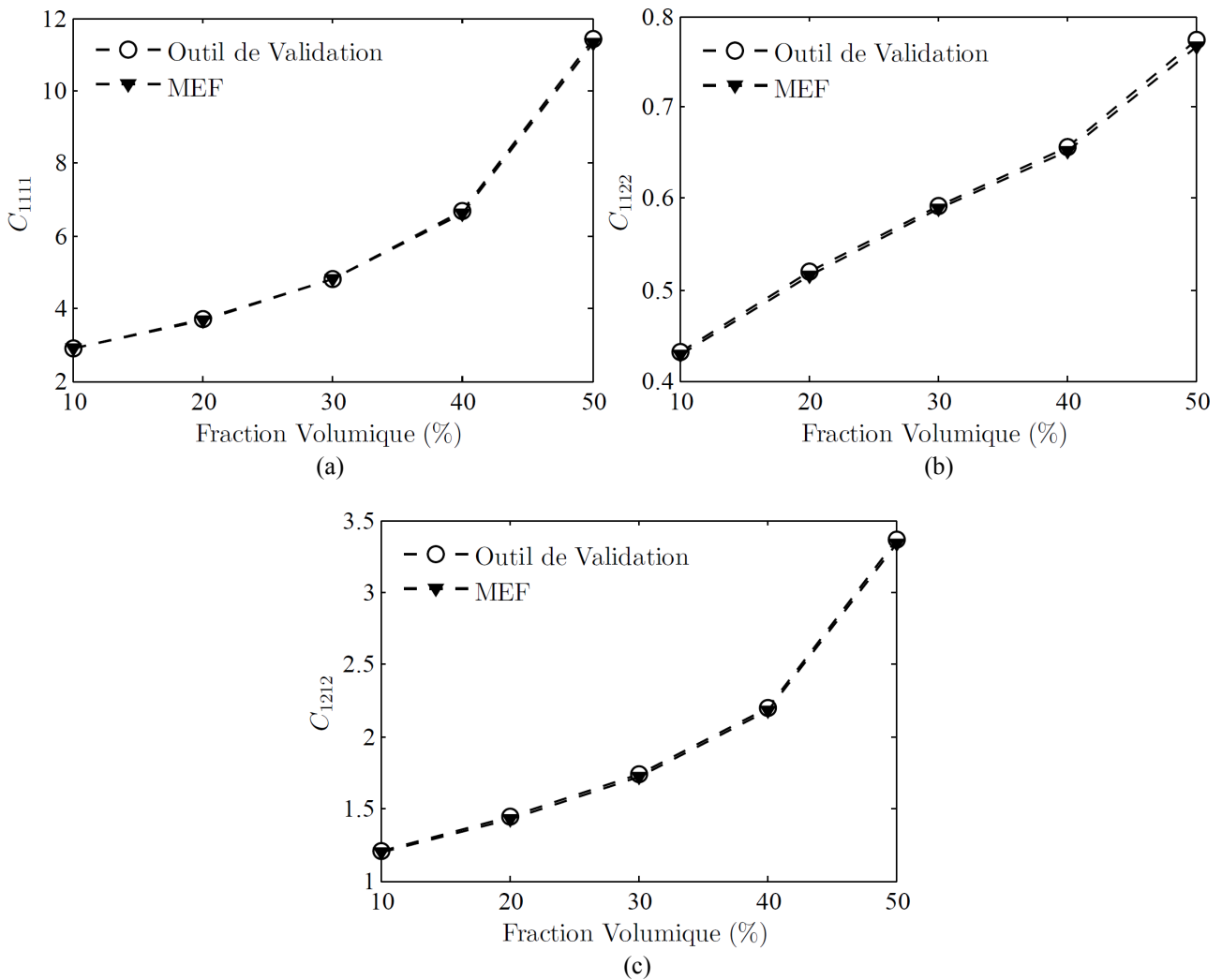


Fig. 3: Comparaison des propriétés effectives obtenues par l'outil de validation et par la méthode des éléments finis pour une sphère centrée dans un volume élémentaire. Les coefficients C_{1111} , C_{1122} et C_{1212} du tenseur de rigidité effectif ont été considérés. Propriétés des phases: $\mu_1 = k_1 = 1$, $\mu_2 = k_2 = 100$.

Les modèles de Mori-Tanaka (MT) et auto-cohérent (AC) ont été étudiés. La (Fig. 4) compare les prédictions de ces modèles par rapport à la solution de l'outil de validation. Deux fractions ont été considérées, soit 20% et 40%. Pour chacune, plusieurs valeurs de contrastes ont été balayées. Les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice ont été fixés à 1 et les propriétés des sphères ont été variées simultanément. La (Fig. 4a) illustre le module de compressibilité effectif alors que la (Fig. 4b) illustre le module de cisaillement effectif du composite.

Pour de faibles fractions volumiques et contrastes, les deux modèles d'homogénéisation fournissent des prédictions assez proches de la solution exacte. Mori-Tanaka sous-estime légèrement la solution réelle alors que le schéma auto-cohérent la surestime. Pour une fraction volumique de 20%, les estimations des modèles sont satisfaisantes, même à contrastes élevés. Dans la gamme de contraste testée, les erreurs relatives maximales de ces modèles sont respectivement de 8.8% et 6.1% pour Mori-Tanaka et Auto-cohérent. Alors, pour une fraction volumique de 20%, il semble que le modèle auto-cohérent soit plus précis que le modèle de Mori-Tanaka. Toutefois, ceci n'est plus le cas lorsque la fraction volumique devient importante. A 40% de concentration de sphères, les prédictions des deux modèles s'éloignent de la solution réelle et l'erreur maximale s'élève respectivement à 29.9% et 72.6%, toujours dans la gamme de contraste étudiée. Ces deux modèles ne sont donc pas valides pour des contrastes et fractions volumiques élevés.

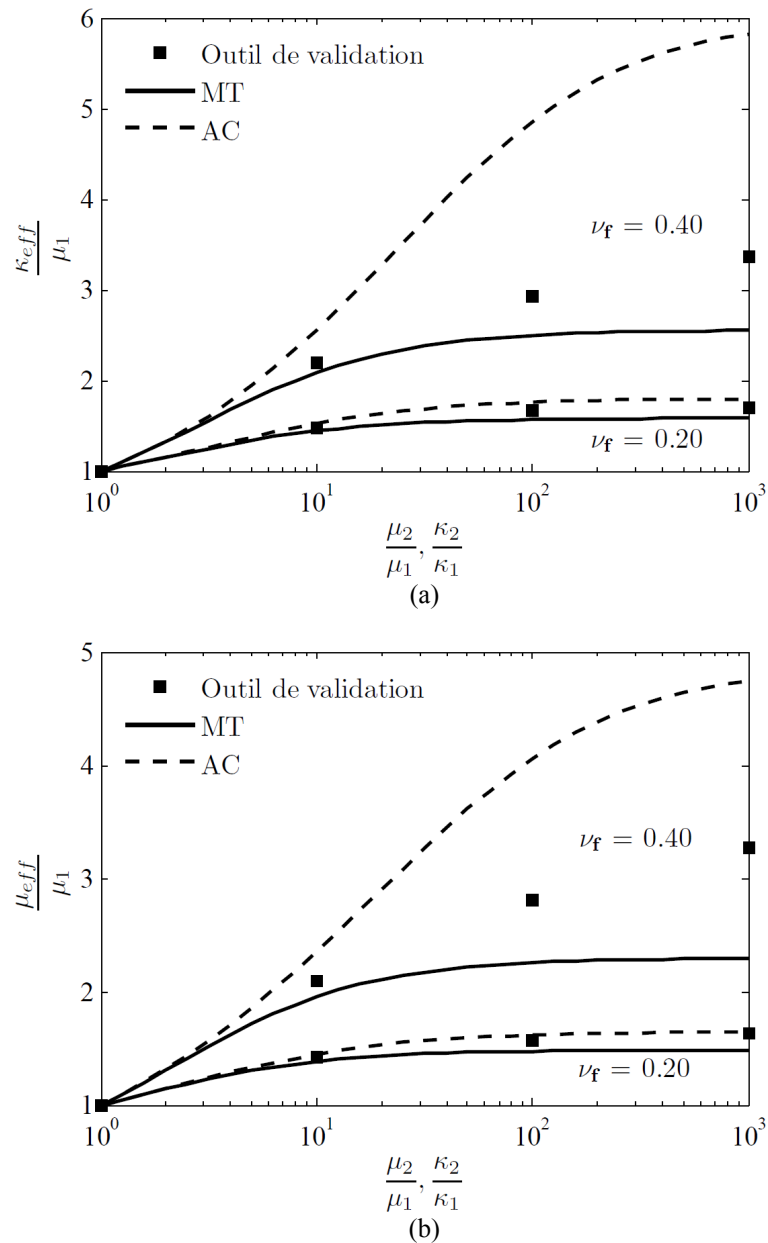


Fig. 4: Propriétés effectives normalisées pour un composite constitué d'une matrice isotrope renforcée par des renforts sphériques isotropes. Comparaison des prédictions des modèles Mori-Tanaka (MT) et auto-cohérent (AC) par rapport à la solution exacte fournie par l'outil de validation. La comparaison a été effectuée pour différentes valeurs de contrastes entre sphères et matrice et pour deux fractions volumiques de sphères. Les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice ont été fixés à 1. L'indice 1 est utilisé pour la matrice alors que l'indice 2 réfère aux inclusions.

Avec le temps, cette étude permettra de fixer un domaine de validité, assorti d'une précision, pour les modèles d'homogénéisation. Il sera alors possible d'affirmer qu'un modèle est précis pour telle fraction volumique et tel contraste entre les propriétés des phases constituantes. Une comparaison approfondie entre les différents modèles d'homogénéisation pourra alors être effectuée.

6. Conclusion

Pour des composites à renforts sphériques isotropes et aléatoirement distribués, les prédictions des modèles Mori-Tanaka et auto-cohérent fournissent des résultats satisfaisants pour une fraction volumique de 20%. Ces prédictions s'éloignent de la solution exacte lorsque la concentration des inclusions augmente. À 40% de fraction volumique, les modèles étudiés ne deviennent plus valides, surtout lorsque le contraste entre les propriétés mécaniques est élevé.

A l'aide de l'outil développé, il sera possible de valider de manière exhaustive les performances des modèles d'homogénéisation. Ainsi, pour une famille de microstructures donnée, il sera possible d'identifier le(s) modèle(s) le(s) plus adapté(s). Finalement, les auteurs mettront cet outil à la disposition de la communauté scientifique. D'autres chercheurs pourront alors s'en servir dans le but de valider leurs modèles d'homogénéisation ou bien d'obtenir les propriétés effectives pour certains composites.

Les travaux futurs auront pour objectif de finaliser la validation des modèles d'homogénéisation pour des composites isotropes à renforts sphériques. Une base de données complète sera établie pour ces types de modèles. On y trouvera tous les résultats numériques générés par l'outil numérique. Par la suite, un algorithme générant des renforts elliptiques sera implémenté et les modèles d'homogénéisation seront validés pour ces types de microstructures.

7. Références

- [1] B. Budiansky, « On the elastic moduli of some heterogeneous materials ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 13, pp. 223-227, 1965.
- [2] R. Hill, « A self-consistent mechanics of composite materials ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 13, pp. 213-222, 1965.
- [3] T. Mori, K. Tanaka, « Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions ». *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571-574, 1973.
- [4] J. Segurado, J. Llorca, « A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 50, pp. 2107-2121, 2002.
- [5] R.B. Barello, M. Lévesque, « Comparison between the relaxation spectra obtained from homogenization models and finite elements simulation for the same composite ». *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 850-867, 2008.
- [6] B.D. Lubachevsky, F.H. Stillinger, « Geometric properties of random disk packings ». *Journal of Statistical Physics*, Vol. 60, pp. 561-583, 1990.
- [7] H. Moulinec, P. Suquet, « A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 157, pp. 69-94, 1998.
- [8] D.J. Eyre, G.W. Milton, « A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement ». *Journal of Physics III*, Vol. 6, pp. 41-47, 1999.
- [9] T. Mura, « General theory of eigenstrains », in *Micromechanics of defects in solids*, 2^{ème} édition, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1987, pp. 1-73.
- [10] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, D. Jeulin, « Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach ». *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 3647-3679, 2003.