HAL open science

Statistique asymptotique de processus auto-excitatifs spatio-temporels

Larissa Valmy, Jean Vaillant

To cite this version:

Larissa Valmy, Jean Vaillant. Statistique asymptotique de processus auto-excitatifs spatio-temporels. 43ème Journée de la Statistique de la Société Française de Statistique, May 2011, Gammarth, Tunisie. paper 169. hal-00601512

HAL Id: hal-00601512

https://hal.science/hal-00601512v1

Submitted on 18 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Statistique asymptotique de processus auto-excitatifs spatio-temporels

Larissa VALMY & Jean VAILLANT

Université des Antilles et de la Guyane, LAMIA, EA4540
BP 592 Campus de Fouillole, 97157 Pointe-à-Pitre cédex

Résumé : Nous nous intéressons aux processus ponctuels auto-excitatifs introduits par Ogata (1998) et discutés par Zhuang et al. (2005). Ce modèle peut être vu comme une extension du processus de Hawkes (1971) et du modèle spatio-temporel ETAS d'Ogata (1988). Une de ses utilisations est le calcul de risques sismiques dans une région. Nous étudions les propriétés de la log-vraisemblance et des estimateurs de maximum de vraisemblance dans le cadre d'une application relative à la sismicité de l'Arc Antillais. Ceci est illustré à partir de données sismiques de l'arc des Petites Antilles.

Abstract : We consider self-exciting point processes introduced by Ogata (1998) and discussed in Zhuang et al. (2005). They are extension of Hawkes processes (1971) and ETAS spatio-temporal models (Ogata, 1988) and are useful for calculating seismic risks in a zone. In this paper, we study their log-likelihood and maximum likelihood estimator properties in a spatio-temporal case study of West Indies sismicity. Seismic data from the Caribbean arc are processed.

Mots-clés : *processus de Hawkes, processus ponctuels spatio-temporels, modèle ETAS, log-vraisemblance, estimateur maximum de vraisemblance*

1 Introduction

Une réalisation d'un processus ponctuel spatio-temporel est un ensemble aléatoire de points, où chaque point représente la date et la localisation d'un évènement (Karr, 1991). Les processus ponctuels sont utilisés depuis des années dans divers domaines tels l'épidémiologie, la neurophysiologie, la sismologie puisqu'ils permettent de modéliser des séries d'occurrences d'évènements (Holden et al., 2003 et Kagan, 2004). Sous certaines conditions, ils sont caractérisés de façon unique par leur processus intensité conditionnelle $\lambda(.)$ (Daley et Vere-Jones, 1988). En particulier, les processus de Hawkes sont auto-excitatifs et leur version temporelle a fait l'objet de nombreuses publications depuis l'article pionnier de Hawkes (1971). Ils prennent en compte l'histoire des évènements antérieurs et, dans les versions spatio-temporelles marquées et ETAS (Ogata, 1988), des coordonnées spatiales, temporelles et des marques.

Nous adoptons l'approche suivante : extension du processus ponctuel de Hawkes temporel au spatio-temporel en tenant compte de l'origine du temps de façon analogue à l'approche temporelle de Puri et Tuan (1986). Nous étudions donc les propriétés asymptotiques des processus spatio-temporels de Hawkes au vu de l'étude faite par Puri et Tuan (1986) ainsi que les travaux de Rathbun (1996).

Dans un premier temps, nous faisons quelques rappels sur les processus de Hawkes temporels et nous nous intéresserons à ces processus dans un cadre spatio-temporel. Nous discutons ensuite des propriétés asymptotiques de la log-vraisemblance et des estimateurs de maximum de vraisemblance.

2 Processus spatio-temporel auto-excitatifs

Hawkes (1971) introduit un processus auto-excitatif N d'intensité conditionnelle :

$$\lambda(t) = \mu + \int_{-\infty}^{t} g(t-s)dN(s)$$

où :

- μ est l'intensité d'arrière plan correspondant, par exemple en sismologie, aux secousses principales
- $\int_{-\infty}^{t} g(t-s)dN(s)$ est l'intensité due au passé du processus (les répliques en sismologie).

Il s'agit donc d'un processus purement temporel. Puri et al. (1986) étudie le fait que, dans la pratique, on n'a pas accès à la totalité de l'histoire du processus et que l'on considère donc cette histoire à partir d'une date initiale choisie égale à zéro. Ils regardent l'existence d'éventuels effets sur l'efficacité des techniques de vraisemblance dus à l'approximation de $\lambda(.)$ par

$$\hat{\lambda}(t) = \mu + \int_{0}^{t} g(t-s)dN(s).$$

telle que

$$0 < \int_{0}^{\infty} g(t)dt < 1.$$

Ogata (1988) a développé le modèle temporel ETAS puis il s'est intéressé au spatio-temporel avec marques (Ogata, 2006). Il considère un ensemble de marques $\mathcal{M}$, un espace $X \subset \mathbb{R}^n$, un réel strictement positif T et pose :

$\forall (t, x, M) \in [0, T] \times X \times \mathcal{M}$

$$\lambda^*(t, x, M) = \lambda(t, x|H_{t^-}) \times J(M) \tag{1}$$

où $J(.)$ est la fonction densité de probabilités des magnitudes des évènements ayant $M_c \leq M$ et où M_c est un seuil de magnitude. H_{t^-} est l'histoire du processus N jusqu'à la date t exclue.

$$\lambda(t, x|H_{t^-}) = \mu(x) + \int_0^t \int_X \int_{\mathcal{M}} \kappa(M) \times g(t-s) \times f(x-\epsilon|M) \times dN(s, \epsilon, M) \tag{2}$$

Dans le membre de droite de (2), interviennent
- $\mu(.)$: fonction intensité d'arrière-plan,
- $\kappa(.)$: nombre attendu d'évènements déclenchés par un séisme de magnitude M,
- $g(.)$: fonction densité de probabilités des dates d'occurrences des répliques,
- $f(.)$: fonction de répartition spatiale conditionnelle des répliques

avec les conditions

$$\int_X \mu(x) dN(x) < +\infty$$

et

$$\int_0^{+\infty} \int_X \int_{\mathcal{M}} \kappa(M) \times g(t-s) \times f(x-\epsilon|M) \times dN(s, \epsilon, M) < 1.$$

3 Propriétés asymptotiques et log-vraisemblance

Soit N un processus spatio-temporel de processus intensité λ_θ, avec $\theta \in \Theta$, Θ étant un ensemble de paramètres. La fonction de log-vraisemblance correspondant à l'intervalle d'observation $[0, T]$ et l'espace mesuré (X, ν) est

$$L_N(\theta) \propto \int_0^T \int_X \big(\log \lambda_\theta(t, x) dN(t, x) - \lambda_\theta(t, x) \nu(dx) dt\big)$$

et peut être approchée par une quasi-log-vraisemblance

$$\widehat{L_N(\theta)} \propto \int_0^T \int_X \big(\log \widehat{\lambda}_\theta(t, x) dN(t, x) - \widehat{\lambda}_\theta(t, x) \nu(dx) dt\big)$$

Cette approximation utilisée à la place de la log-vraisemblance produit un estimateur de maximum de quasi-log-vraisemblance dont le comportement est étudié dans le cadre d'une application relative à la sismicité de l'Arc Antillais.

4 Applications

Des données sismiques de l'arc des Petites Antilles entre 1999 et 2004 sont traitées et une étude comparative est effectuée pour différents modèles.

Bibliographie

[1] Daley, D., and Vere-Jones, D. (1988) *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer-Verlag, New York.
[2] Hawkes, A.G. (1971) Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58 :83-90.
[3] Holden, L., Sannan, S. and Bungum, H. (2003) A stochastic marked point process model for earthquakes. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 3 :95-101.
[4] Kagan, Y. Y. (2004) Short-term properties of earthquake catalogs and models of earthquake source. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(4) :1207-1228.
[5] Karr, A. F. (1991) *Point Processes and their statistical inference*, Probability : pure and applied (2), New York.
[6] Ogata, Y. (1988) Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of American Statistical Association*, 83(401) :9-27.
[7] Ogata, Y. (1998) Space-time point-process models for earthquake occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 50(2) :379-402.
[8] Ogata, Y. and Zhuang, J. (2006) Space-time ETAS models and an improved extension. *Tectonophysics*, 413 :13-23.
[9] Puri, Madan L. and Tuan, Pham D. (1986) Maximum likelihood estimation for stationary point processes. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83 :541-545.
[10] Rathbun, Stephen L. (1996) Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator for spatio-temporal point processes. *Journal of Statistical Planning and and Inference*, 51 : 55-74.
[11] Zhuang, J., Chang, C.-P., Ogata, Y. and Chen Y.-I. (2005). A study on the background and clustering seismicity in the Taiwan region by using a point process model. *Journal of Geophysical Research*, 110 : 275-290.