

# Formulation énergétique de la mécanique des milieux continus

Jean Cousteix, Jacques Mauss, Jean Garrigues

#### ▶ To cite this version:

Jean Cousteix, Jacques Mauss, Jean Garrigues. Formulation énergétique de la mécanique des milieux continus. 2001. hal-00600261

# HAL Id: hal-00600261

https://hal.science/hal-00600261

Preprint submitted on 14 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formulation énergétique de la mécanique des milieux continus

J. Cousteix\* J. Mauss† J. Garrigues‡

#### Résumé

Les fondements de la mécanique des milieux continus classique, MMC, sont revus en posant le premier principe de la thermodynamique comme principe fondamental. On suppose que ce principe satisfait la loi d'invariance galiléenne. Des axiomes d'objectivité sont ajoutés pour le temps, la distance entre deux particules, la masse, l'énergie interne, la chaleur, toutes les forces sauf les forces fictives, la puissance des forces de contact intérieures. L'hypothèse de Cauchy précise la structure des forces de contact. L'analyse exclut les milieux micropolaires ou polarisés. Naturellement, la conservation de la masse est utilisée. Ces éléments suffisent pour définir une formulation axiomatique de la MMC où l'on démontre les équations de la résultante dynamique et du moment dynamique.

#### 1 Introduction

L'objectif de la mécanique des milieux continus classique, MMC, est d'analyser le mouvement d'un corps ou d'un objet matériel. Un corps est une abstraction mathématique de la réalité. Des exemples sont les points matériels, les tiges ou les barres, les membranes ou les coques, les corps tridimensionnels. Les corps peuvent être solides ou liquides. Ils sont doués d'une masse qui suit le principe de conservation de la masse. En MMC, le milieu et son mouvement sont caractérisés par des fonctions de champ continues et différentiables par morceaux.

La MMC, dont les fondements sont réexaminés dans cet article, est un schéma descriptif qui devient une théorie avec l'indication de lois donnant explicitement les forces. Les forces, à distance ou de surface, décrivent les interactions entre différentes parties du système ou avec le milieu extérieur. Le modèle envisagé ne tient pas compte de couple massique ou surfacique. Les milieux micropolaires ou polarisés sont donc exclus de l'analyse. Les interactions incluent aussi des échanges de chaleur.

<sup>\*</sup>ONERA - The french lab, ISAE; F-31055, Toulouse, France - jean.cousteix@sfr.fr

 $<sup>^\</sup>dagger \text{Universit\'e}$  de Toulouse; INPT, UPS, CNRS, IMFT; F-31400 Toulouse, France -mauss@cict.fr

 $<sup>^{\</sup>ddagger}$ École Centrale de Marseille; 13451 Marseille, France - jean.garrigues@centrale-marseille.fr

Les forces sont modélisées à l'aide de considérations phénoménologiques ou expérimentales. Il s'agit essentiellement des forces de contact. Les forces à distace, par exemple dues à la gravitation, n'ont pas le même statut, elles définissent des champs de forces.

L'étude est contrainte par la nature euclidienne de l'espace et le concept d'objet matériel. De plus, toute quantité physique doit être objective a priori, avant la formulation d'une loi phénoménologique qui doit obéir à certains axiomes. Les évènements physiques subis par un corps ne doivent pas dépendre de l'observateur. Cependant, leur représentation peut varier et il est important de pouvoir relier ces représentations entre elles.

Suivant la conception classique, la MMC repose sur quelques principes : 1°) les lois fondamentales de la dynamique exprimées dans une classe particulière de référentiels appelés galiléens, 2°) le premier et le deuxième principe de la thermodynamique. Parfois, la thermodynamique n'est pas nécessaire. Pourtant, il est raisonnable d'introduire quelques hypothèses relatives à la modélisation du matériau. Une formulation acceptable demande de prendre en compte les interactions thermomécaniques. Très souvent, il est possible d'étudier les systèmes au voisinage de l'équilibre thermodynamique de façon à analyser les aspects énergétiques. La modélisation repose sur des lois de comportement qui doivent être en accord avec le deuxième principe de la thermodynamique.

Dans le présent article, la formulation de la MMC est entièrement refondue. L'objectif est de proposer une nouvelle construction axiomatique de la MMC dans laquelle le premier principe de la thermodynamique est le socle. On postule que le premier principe s'exprime de la même façon dans une classe particulière  $\mathcal{G}$  de référentiels déduits l'un de l'autre par un mouvement de translation rectiligne uniforme. L'étude des conséquences de cette invariance galiléenne conduit à des conclusions suffisamment remarquables pour remettre en cause les fondements de la MMC à partir d'un point de vue énergétique. On montre que l'ajout d'axiomes d'objectivité et de l'hypothèse de Cauchy est suffisant pour proposer une formulation nouvelle de la MMC. Les résultats de cette étude montrent que les lois fondamentales de la dynamique deviennent des théorèmes, les équations de la résultante dynamique et du moment dynamique sont en effet démontrées. Bien sûr, la théorie doit être complétée par des lois de comportement qui ne contredisent pas le deuxième principe de la thermodynamique. La discussion de ces lois n'est pas le sujet de cet article.

# 2 La conservation de l'énergie comme principe fondamental de la MMC

On considère un système matériel  $\mathcal{D}$  qui, par définition, est fermé. Dans la suite, toutes les fonctions nécessaires aux développements seront supposées continues et différentiables dans  $\mathcal{D}$ .

De façon très vague, le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation d'énergie contenue dans  $\mathcal{D}$  est due aux échanges avec l'extérieur.

Parmi différentes formulations de la littérature [1,2], le choix est précisé dans la section (2.4).

Un référentiel est nécessaire pour écrire cette loi, c'est-à-dire un corps parfaitement rigide, ainsi qu'une chronologie. De plus, le concept de puissance demande la définition d'une cinématique. Dans cet article, le modèle de mécanique des milieux continus analysé est considéré comme classique. Les effets de relativité ne sont pas pris en compte.

Pour la suite, rappelons la notion d'objectivité [3]. Une grandeur physique  $\mathcal{X}$  représentée par un nombre x est objective si la valeur de x est la même dans tout référentiel, à tout instant. Ainsi, par axiome, la distance entre deux points mobiles est objective :

$$\forall t, \forall M_1, \forall M_2 \quad d(M_1, M_2)|_{\mathcal{R}} = d(M_1, M_2)|_{\mathcal{R}'}$$

où  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont deux référentiels. Alors, on montre qu'il existe un tenseur orthogonal  $\mathcal{Q}(t)$  tel que

$$\overrightarrow{M_1 M_2}\Big|_{\mathcal{R}'} = \mathcal{Q}(t) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}\Big|_{\mathcal{R}}$$

La notion d'objectivité est généralisée. Une grandeur physique  $\mathcal X$  représentée par un vecteur  $\vec x$  est objective si

$$\forall t, \forall M_1, \forall M_2 \quad \vec{x}|_{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}\Big|_{\mathcal{R}} = \vec{x}|_{\mathcal{R}'} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}\Big|_{\mathcal{R}'}$$

Alors, l'objectivité conduit à la règle de changement de référentiel

$$\vec{x}|_{\mathcal{R}'} = \mathcal{Q}(t) \cdot \vec{x}|_{\mathcal{R}}$$

Plus généralement, un tenseur d'ordre p est objectif si son application à  $\overrightarrow{M_1M_2}$  est un tenseur objectif d'ordre p-1.

Pour aller plus loin, détaillons les différents termes de l'équation d'énergie.

#### 2.1 Forces à distance

On suppose que les forces à distance sont des actions du milieu extérieur sur le système. Ces forces sont dues à un champ que ne change pas avec le système et son mouvement. Le champ est donné. Typiquement, de telles forces sont les forces dues au champ de gravitation de la Terre, connu a priori.

Les forces à distance sont exprimées par une densité  $\bar{f}$  par unité de masse. La puissance de ces forces agissant sur le système est :

$$P_b = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}m \tag{1}$$

où dm est l'élément de masse.

## 2.2 Énergie

L'énergie E du système comprend l'énergie interne U et l'énergie macroscopique  ${\cal E}_k$  :

$$E = U + E_k \tag{2}$$

Par axiome, l'énergie interne est additive et objective. L'énergie cinétique macroscopique est additive mais non objective. Avec les densités d'énergie, on a :

$$U = \int_{\mathcal{D}} u \, \mathrm{d}m \tag{3}$$

$$E_k = \int_{\mathcal{D}} \frac{v^2}{2} \, \mathrm{d}m \quad \text{avec} \quad v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \tag{4}$$

### 2.3 Échanges d'énergie avec l'extérieur

Les échanges d'énergie avec le milieu extérieur sont dus à la puissance  $P_b$  des forces à distance, à la puissance des forces de contact et aux transferts de chaleur. On doit souligner que le modèle ne prend pas en compte les effets de couples massiques ou surfaciques.

La puissance des forces de contact est :

$$P_{ec} = \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{v} \, d\sigma \tag{5}$$

où d $\sigma$  est un élément de surface le long de la frontière  $\partial \mathcal{D}$ . Le vecteur contrainte  $\overrightarrow{\mathcal{T}}$  est associé aux forces de contact exercées par le milieu extérieur. Une hypothèse clé, due à Cauchy, est introduite :  $\overrightarrow{\mathcal{T}}$  ne dépend que du point d'application M et du vecteur unitaire  $\overrightarrow{n}$  normal à  $\partial \mathcal{D}$  en M et orienté vers l'extérieur. Comme on le verra plus loin, ce point est crucial pour interpréter l'effet des forces de contact à l'aide d'un tenseur du deuxième ordre.

Les échanges de chaleur entre le système et l'extérieur sont dus aux effets de conduction le long de la surface  $\partial \mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$  ou aux effets de rayonnement. Strictement, le rayonnement conduit à un échange d'énergie qui est transformée en chaleur lors de l'interaction avec la matière. Ici, on suppose que les effets de rayonnement sont limités aux effets thermiques, on ne prend pas en compte les forces électromagnétiques. Ces échanges sont représentés par une densité q par unité de surface :

$$\dot{Q} = \int_{\partial \mathcal{D}} q \, d\sigma \tag{6}$$

#### 2.4 Principe fondamental

On définit d'abord une classe de référentiels comme l'ensemble des référentiels déduits l'un de l'autre par un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Le principe fondamental de la MMC s'énonce alors comme suit : **Principe fondamental.** Il existe une classe particulière  $\mathcal{G}$  de référentiels  $\mathcal{R}$  dans lesquels, pour tout domaine matériel  $\mathcal{D}$ , on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v} + q) \,\mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

Dans cette équation,  $E_{\mathcal{R}}$  est l'énergie E définie par (2) et évaluée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Bien sûr, l'équation (7) n'est rien d'autre que l'équation d'énergie pour laquelle les conditions nécessaires à son écriture ont été données. La validité de l'équation d'énergie dans un référentiel quelconque de  $\mathcal{G}$  signifie que le principe d'invariance galiléenne est satisfait. Dans le membre de droite de l'équation (7), il n'y a pas de terme de production interne. Avec les hypothèses énoncées, l'énergie E est conservative.

Les grandeurs  $U, \vec{f}, \vec{T}, q$  sont objectives. Elles sont vues de la même façon, non seulement dans tout référentiel de  $\mathcal{G}$  mais également dans tout autre référentiel. L'énergie E n'est pas objective car l'énergie cinétique  $E_k$  ne l'est pas. Par principe, la masse est une grandeur objective et additive.

L'équation (7) peut être étendue pour prendre en compte d'autres transferts d'énergie mais, pour l'objectif visé, il suffit de travailler avec cette forme de l'équation d'énergie qui couvre déjà bon nombre de situations pratiques.

# 3 Théorème de la résultante dynamique

L'analyse des conséquences de l'invariance galiléenne de l'équation d'énergie est particulièrement fructueuse. Dans cette section, il est montré que l'équation de la résultante dynamique en est un résultat. Les principales étapes de la démonstration sont données ci-dessous. Les détails sont précisés en annexe. Notons que l'idée d'appliquer le principe d'invariance galiléenne à l'équation d'énergie a également été exploitée par D. Jou et al. [4].

#### 3.1 Taux de variation de l'énergie E

Soit  $\mathcal{R}'$  un référentiel qui n'appartient pas nécessairement à  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{R}$  un référentiel de  $\mathcal{G}$ . D'après l'équation (22), annexe A, en tenant compte de l'objectivité de U, on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} - \int_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{V}_{c} \cdot \vec{a} + \vec{a}_{c} \cdot \vec{v}') \,\mathrm{d}m$$
 (8)

Dans cette expression,  $\overrightarrow{V}_c$  est la vitesse d'entraînement due au mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{a}_c$  est l'accélération d'entraînement, voir annexe A,  $\vec{a}$  est l'accélération d'une particule évaluée dans  $\mathcal{R}$  et  $\vec{v}$  ' est la vitesse de la même particule dans  $\mathcal{R}'$ . L'énergie  $E_{\mathcal{R}'}$  est évaluée dans  $\mathcal{R}'$  par la même formule (2) que dans  $\mathcal{R}$ .

#### 3.2 Théorème de la résultant dynamique

D'après (8), la comparaison de l'équation d'énergie écrite dans deux référentiels de  $\mathcal G$  montre que, annexe B

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{a} \, dm = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \, dm + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T} \, d\sigma \tag{9}$$

Ainsi, dans la formulation proposée de la MMC, l'équation de la résultante dynamique d'un système quelconque est démontrée et non pas admise comme un principe.

#### 3.3 Équation locale de quantité de mouvement

La structure des forces de contact est précisée avec l'hypothèse de Cauchy. On suppose que le vecteur contrainte  $\overrightarrow{T}$  est fonction seulement du point d'application et de la normale unitaire à l'élément de surface. Si l'on considère un élément de surface d $\sigma$  de  $\partial \mathcal{D}$  associé à la normale extérieure unitaire  $\vec{n}$ , avec l'équation (9) on sait que le vecteur contrainte s'exprime à l'aide d'un tenseur du deuxième ordre  $\bar{t}$  [3] :

$$\overrightarrow{T} = \overline{\overline{t}} \cdot \overrightarrow{n} \tag{10}$$

En outre, on montre que le tenseur  $\bar{t}$  est objectif [3].

En prenant deux éléments de surface identiques d $\sigma$  munis de normales unitaires opposées, avec (10) on déduit :

$$\overrightarrow{\mathcal{T}}(\vec{n}) = -\overrightarrow{\mathcal{T}}(-\vec{n})$$

Les forces de contact satisfont la loi des actions mutuelles.

En portant (10) dans (9), avec le théorème de Gauss et en notant que l'équation (9) est valable pour tout domaine  $\mathcal{D}$ , on obtient l'équation locale de quantité de mouvement

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\bar{t}} \tag{11}$$

où  $\rho$  représente la masse volumique. L'équation (11) est valable dans tout référentiel de  $\mathcal{G}.$ 

**Note.** Si le champ de masse volumique  $\rho$  est une distribution de Dirac, en écrivant une intégrale de Lebesgue sur  $\mathcal{D}$ , on obtient la loi fondamentale de Newton pour un point matériel dans un référentiel de  $\mathcal{G}$ :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{12}$$

où m est la masse du point matériel et  $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{f}$ .

Or, par définition des référentiels galiléens, la loi (12) est valable seulement dans un référentiel galiléen. On identifie donc la classe  $\mathcal G$  avec celle des référentiels galiléens.

## 4 Référentiels non-galiléens

Jusqu'à présent, l'équation d'énergie a été écrite dans un référentiel galiléen. Dans cette section, on montre que son expression dans un référentiel non-galiléen repose sur l'axiome d'objectivité de la puissance des forces intérieures.

#### 4.1 Équation de l'énergie interne

Dans un référentiel galiléen, l'équation d'énergie est écrite sous la forme (7). D'autre part, en multipliant (11) scalairement par la vitesse  $\vec{v}$  et en intégrant l'équation résultante, on obtient l'équation de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{v^2}{2} \,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{D}} (\mathrm{div}\,\bar{\vec{t}}) \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

où d $\tau$  est l'élément de volume. En prenant la différence entre les équations (7) et (13), on obtient l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \int_{\partial \mathcal{D}} q \,\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial \mathcal{D}} [\bar{\bar{t}} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} (\mathrm{div}\,\bar{\bar{t}}) \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

En notant  $\overline{\overline{\boldsymbol{t}}}^{\ T}$  le transposé de  $\overline{\overline{\boldsymbol{t}}},$  on peut écrire :

$$\begin{split} \int_{\partial \mathcal{D}} \left( [\bar{\bar{t}} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{v} \right) \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div} \bar{\bar{t}}) \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}\tau &= \int_{\mathcal{D}} \left[ \operatorname{div} (\bar{\bar{t}}^T \cdot \vec{v}) - (\operatorname{div} \bar{\bar{t}}) \cdot \vec{v} \right] \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathcal{D}} \bar{\bar{t}} : \overline{\overline{L}} \, \mathrm{d}\tau \end{split}$$

avec:

$$\overline{\overline{L}}=\operatorname{grad}\vec{v}$$

La puissance  $P_{ic}$  des forces de contact intérieures est définie par :

$$P_{ic} = -\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{t}} : \overline{\overline{L}} \, \mathrm{d}\tau$$

de sorte que l'équation (14) devient :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \int_{\partial \mathcal{D}} q \,\mathrm{d}\sigma - P_{ic} \tag{15}$$

Un axiome déterminant consiste à exiger que  $P_{ic}$  soit une quantité objective. On montre alors que le tenseur  $\bar{t}$  est symétrique, annexe C. On note que la symétrie de  $\bar{t}$  et l'objectivité de  $P_{ic}$  sont des propositions équivalentes. La symétrie de  $\bar{t}$  entraı̂ne :

$$P_{ic} = -\int_{\overline{D}} \overline{\overline{t}} : \overline{\overline{D}} \, \mathrm{d}\tau \tag{16}$$

où  $\overline{\overline{D}}$  est la partie symétrique de  $\overline{\overline{L}}$ , c'est-à-dire le tenseur des vitesses de déformation.

Avec l'objectivité de  $P_{ic}$ , tous les termes de l'équation (15) sont objectifs. L'équation (15) est donc universelle. Elle a la même forme dans un référentiel galiléen ou non :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathcal{R}'} = \int_{\partial \mathcal{D}} q \,\mathrm{d}\sigma - P_{ic} \tag{17}$$

#### 4.2 Équation d'énergie dans un référentiel non-galiléen

Écrivons d'abord l'équation locale de quantité de mouvement dans un référentiel non-galiléen  $\mathcal{R}'$ . La procédure est classique, on utilise la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\rm c} + \vec{a}_{\rm Cor}$$

où  $\vec{a}'$  est l'accélération d'une particule dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{a}_{\rm c}$  est l'accélération d'entraînement et  $\vec{a}_{\rm Cor}$  est l'accélération de Coriolis. L'équation de quantité de mouvement dans un référentiel non-galiléen est obtenue à partir de sa formulation (11) en référentiel galiléen en introduisant les densités de forces fictives  $\vec{f}_{\rm Cor} = -\vec{a}_{\rm Cor}$  et  $\vec{f}_{\rm c} = -\vec{a}_{\rm c}$ . Avec l'objectivité de la densité de force  $\vec{f}$ , du vecteur contrainte et de sa divergence, on peut écrire l'équation de quantité de mouvement dans un référentiel non-galiléen :

$$\rho \vec{a}' = \rho \vec{f} + \rho \vec{f}_{c} + \rho \vec{f}_{Cor} + \text{div } \bar{\bar{t}}$$
(18)

L'équation (18) est mulitipliée scalairement par  $\vec{v}$  ' et l'équation résultante est intégrée. Comme la puissance des forces de Coriolis est nulle, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big|_{\mathcal{R}'} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{v'^2}{2} \,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{D}} \rho \left( \vec{f} + \vec{f_c} \right) \cdot \vec{v} \,' \,\mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{D}} (\mathrm{div}\,\bar{\bar{t}}) \cdot \vec{v} \,' \,\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

L'addition membre à membre des équations (17) et (19) fournit l'équation d'énergie dans un référentiel non-galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} \rho \left( \vec{f} + \vec{f_c} \right) \cdot \vec{v}' \, \mathrm{d}\tau + \int_{\partial \mathcal{D}} \left( \left[ \overline{t} \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{v}' + q \right) \, \mathrm{d}\sigma \tag{20}$$

# 5 Théorème du moment dynamique

En écrivant l'équation d'énergie dans un référentiel non-galiléen et en utilisant (8), on obtient l'équation du moment dynamique dans un référentiel galiléen, voir annexe D :

$$\int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{a} \, dm = \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{f} \, dm + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{\mathcal{T}} \, d\sigma$$
 (21)

où A est un point quelconque, mobile ou non dans  $\mathcal{R}$ , et M est soit un point courant de  $\mathcal{D}$  où  $\vec{a}$  et  $\vec{f}$  sont évalués, soit un point courant de la frontière  $\partial \mathcal{D}$  où  $\overrightarrow{\mathcal{T}}$  est évalué.

Avec  $\overrightarrow{T} = \overline{\overline{t}} \cdot \overrightarrow{n}$ , la symétrie de  $\overline{\overline{t}}$  permet d'écrire (21) sous la forme

$$\int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{a} \, \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{f} \, \mathrm{d}m + \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \mathrm{div} \, \overline{\overline{\boldsymbol{t}}} \, \mathrm{d}\tau$$

Cette équation est valable dans tout domaine  $\mathcal{D}$ . On en déduit l'équation locale :

$$\overrightarrow{AM} \times \rho \overrightarrow{a} = \overrightarrow{AM} \times \rho \overrightarrow{f} + \overrightarrow{AM} \times \operatorname{div} \overline{\overline{t}}$$

On retrouve simplement le produit vectoriel de l'équation de quantité de mouvement (11) par  $\overrightarrow{AM}$ . Aucune information nouvelle n'est apportée par cette équation. Ce résultat est dû à la symétrie de  $\overline{\overline{t}}$ .

#### 6 Conclusion

Les fondements de la mécanique des milieux continus classique, MMC, sont complètement révisés à partir d'un point de vue reposant sur une formulation énergétique.

L'équation d'énergie qui exprime le premier principe de la thermodynamique est érigé en principe fondamental de la MMC. Plus précisément, on suppose qu'il existe une classe  $\mathcal G$  de référentiels dans lesquels l'équation d'énergie est valabe. Dans  $\mathcal G$  l'équation d'énergie satisfait le principe d'invariance galiléenne puisque tous les référentiels de  $\mathcal G$  se déduisent l'un de l'autre par un mouvement de translation rectiligne uniforme.

La nouvelle formulation de la MMC est élaborée en ajoutant des axiomes d'objectivité pour les grandeurs suivantes : le temps, la distance entre deux particules, la masse, l'énergie interne, la chaleur, la puissance  $P_{ic}$  des forces de contact intérieures, toutes les forces exceptées les forces fictives. Avec l'hypothèse de Cauchy, le vecteur contrainte est seulement fonction du point d'application et du vecteur unitaire normal à l'élément de surface associé. On suppose aussi qu'il n'y a pas de couple massique ou surfacique. Les milieux micropolaires ou polarisés sont exclus de l'analyse.

L'équation de la résultante dynamique devient un théorème issu des hypothèses déjà énoncées : invariance galiléenne de l'équation d'énergie, objectivité de l'énergie interne, des forces et des transferts de chaleur. Ce résultat est au cœur de la nouvelle formulation axiomatique proposée.

On déduit aussi que la classe  $\mathcal G$  de référentiels est identifiable à celle des référentiels galiléens.

L'existence du tenseur des contraintes résulte de l'hypothèse de Cauchy et l'objectivité de  $P_{ic}$  montre que ce tenseur est symétrique.

L'objectivité de la puissance des forces intérieures est un élément clé du développement qui conduit à l'expression de l'équation d'énergie dans un référentiel non-galiléen. Le théorème du moment dynamique est alors démontré. La symétrie du tenseur des contraintes montre que cette équation n'apporte en fait aucune information supplémentaire par rapport à l'équation de quantité de mouvement.

Ainsi, l'objectivité de  $P_{ic}$ , la symétrie du tenseur des contraintes et l'équation du moment dynamique sont des propositions équivalentes dans la construction.

# Acknowledgements

Nous avons le plaisir de remercier chaleureusement les professeurs J.Ph. Pérez et R. Borghi pour les nombreux échanges (d'énergie) que nous avons eus avec eux.

#### Annexes

# A Taux de variation de l'énergie cinétique dans des référentiels différents

On considère un référentiel  $\mathcal{R}$  appartenant à  $\mathcal{G}$  et un référentiel  $\mathcal{R}'$  qui n'appartient pas nécessairement à  $\mathcal{G}$ . D'après la règle de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \overrightarrow{V}_c + \vec{v}'$$

on obtient:

$$E_{k\mathcal{R}'} = E_{k\mathcal{R}} - \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{V}_{c} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{V}_{c}}{2} + \overrightarrow{v}' \right) dm$$

où  $E_{k\mathcal{R}'}$  et  $E_{k\mathcal{R}}$  sont les valeurs de l'énergie cinétique contenue dans un domaine  $\mathcal{D}$  évaluées dans  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$ . En prenant la dérivée par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E_{k\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{k\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} - \int_{\mathcal{D}} \left( \overrightarrow{V}_{c} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}_{c}}{\mathrm{d}t} \bigg|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{V}_{c} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}'}{\mathrm{d}t} \bigg|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{v}' \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}_{c}}{\mathrm{d}t} \bigg|_{\mathcal{R}} \right) dm$$

Dans cette expression, le référentiel dans lequel la dérivée est calculée est précisé si nécessaire.

La règle de composition des accélérations donne :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{c} + \vec{a}_{Cor}$$

où  $\vec{a}$  ' est l'accélération d'une particule dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{a}_{\rm c}$  est l'accélération d'entraînement et  $\vec{a}_{\rm Cor}$  est l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_{\mathrm{Cor}} = 2 \overrightarrow{\Omega} \times \vec{v}$$
  $'$ 

En outre, on a:

$$\frac{d\overrightarrow{V}_{c}}{dt}\bigg|_{\mathcal{R}} = \vec{a}_{c} + \overrightarrow{\Omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt}\bigg|_{\mathcal{R}} = \vec{a}' + \overrightarrow{\Omega} \times \vec{v}'$$

et bien sûr :

$$\vec{a} = \left. \frac{\mathrm{d}\vec{V}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathcal{R}}$$

En regroupant les résultats, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E_{k\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{k\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} - \int_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{V}_{c} \cdot \vec{a} + \vec{a}_{c} \cdot \vec{v}') \,\mathrm{d}m$$
 (22)

## B Théorème de la résultante dynamique

Soit  $\mathcal{R}'$  un référentiel de  $\mathcal{G}$ . En vertu de (7), l'équation d'énergie écrite dans  $\mathcal{R}'$  est :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v}' \,\mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v}' + q) \,\mathrm{d}\sigma$$
 (23)

En prenant la différence entre les équations (23) et (7), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \overrightarrow{V}_{\mathrm{c}} \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{V}_{\mathrm{c}} \, \mathrm{d}\sigma$$

D'autre part, d'après (8), on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{V}_{c} \cdot \vec{a} + \vec{a}_{c} \cdot \vec{v}') \,\mathrm{d}m$$

Ici,  $\overrightarrow{V}_{\rm c}$  est une vitesse constante et uniforme,  $\vec{a}_{\rm c}=0$ , de sorte que :

$$\overrightarrow{V}_{c} \cdot \left\{ \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{a} \, dm - \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{f} \, dm - \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T} \, d\sigma \right\} = 0$$

Le terme entre les accolades est indépendant de  $\overrightarrow{V}_c$  et cette vitesse est arbitraire. On en déduit l'équation (9) :

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{a} \, dm = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \, dm + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T} \, d\sigma$$

Les résultats présentés dans cette annexe éclairent le calcul de poussée d'un réacteur proposé par Sforzini [5]. Ce calcul est mené en appliquant l'équation d'énergie à deux volumes de contrôle, l'un étant fixe par rapport au réacteur et l'autre étant lié à l'écoulement. Or, les résultats donnés ici montrent que l'équation de quantité de mouvement est retrouvée à partir de l'équation d'énergie. Ainsi, le calcul de Sforzini est justifié par des résultats d'une portée beaucoup plus étendue.

# C Symétrie du tenseur des contraintes

La décomposition du tenseur grad  $\vec{v}$  en parties symétrique et antisymétrique donne :

 $\overline{\overline{t}} : \operatorname{grad} \vec{v} = \overline{\overline{t}} : \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{t}} : \overline{\overline{W}}$ 

où le tenseur des vitesses de déformation  $\overline{\overline{D}}$  est la partie symétrique de grad  $\overrightarrow{v}$ , et  $\overline{\overline{W}}$  est la partie antisymétrique de grad  $\overrightarrow{v}$ . Comme  $\overline{\overline{t}}$  et  $\overline{\overline{D}}$  sont objectifs,  $\overline{\overline{t}}:\overline{\overline{D}}$  est un scalaire objectif. Ainsi,  $\overline{\overline{t}}:\operatorname{grad}\overrightarrow{v}$  est objectif si et seulement si  $\overline{\overline{t}}:\overline{\overline{W}}$  est objectif.

Comme  $\overline{\overline{W}}$  est antisymétrique, on peut écrire :

$$\overline{\overline{t}}$$
: grad  $\vec{v} = \overline{\overline{t}}$ :  $\overline{\overline{D}} + \frac{1}{2}(\overline{\overline{t}} - \overline{\overline{\overline{t}}}^T)$ :  $\overline{\overline{W}}$ 

Or, le tenseur  $\overline{\overline{W}}$  dépend de l'observateur. La grandeur  $(\overline{\overline{t}}-\overline{\overline{t}}^T):\overline{\overline{W}}$  doit être un scalaire objectif pour tout  $\overline{\overline{W}}$ . Cette condition est remplie si et seulement si  $(\overline{\overline{t}}-\overline{\overline{t}}^T)=0$ . L'objectivité de  $\overline{\overline{t}}:\operatorname{grad} \overrightarrow{v}$  est réalisée si et seulement si  $\overline{\overline{t}}$  est symétrique.

# D Théorème du moment dynamique

Soit  $\mathcal{R}'$  un référentiel non-galiléen. Avec (7) et (8), on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v} + q) \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} (\vec{V}_{c} \cdot \vec{a} + \vec{a}_{c} \cdot \vec{v}') \, \mathrm{d}m$$

La règle de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} ' \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} (\overrightarrow{T} \cdot \vec{v} ' + q) \, \mathrm{d}\sigma$$

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \overrightarrow{V}_{c} \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{V}_{c} \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{V}_{c} \cdot \vec{a} + \vec{a}_{c} \cdot \vec{v} ') \, \mathrm{d}m$$

En tenant compte de l'équation d'énergie dans  $\mathcal{R}'$ , on déduit :

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \overrightarrow{V}_{c} \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{V}_{c} \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{V}_{c} \cdot \vec{a} \, \mathrm{d}m = 0$$

Avec l'expression de la vitesse d'entraı̂nement  $\overrightarrow{V}_{\text{c}}$ 

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{c}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{A} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \times \overrightarrow{AM}$$

où A est un point fixe dans  $\mathcal{R}'$ , on obtient :

$$\overrightarrow{V}_{A} \cdot \left\{ \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{f} \, dm + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T} \, d\sigma - \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{a} \, dm \right\}$$

$$+ \overrightarrow{\Omega} \cdot \left\{ \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{f} \, dm + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T} \, d\sigma - \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{a} \, dm \right\} = 0$$

Compte tenu de l'équation de quantité de mouvement, on a :

$$\overrightarrow{\Omega} \cdot \left\{ \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{f} \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T} \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{a} \, \mathrm{d}m \right\} = 0$$

Cette équation est valable pour toute valeur de  $\overrightarrow{\Omega}$ . Or, le terme entre les accolades est indépendant de  $\overrightarrow{\Omega}$ . On en déduit l'équation de la résultante dynamique (21) écrite dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ 

$$\int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{a} \, \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{f} \, \mathrm{d}m + \int_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T} \, \mathrm{d}\sigma$$

où A est un point quelconque mobile ou fixe dans  $\mathcal{R}$ .

#### Références

- [1] J.P. Pérez. Thermodynamique, fondements et applications. Dunod, 2001. 3ième édition.
- [2] A. Watzky. *Thermodynamique macroscopique*. Éditions De Boeck Université, Bruxelles, 2007.
- [3] J. Garrigues. Fondements de la mécanique des milieux continus. Hermes Science Publications, 2007.
- [4] D. Jou, J. Casas-Vásquez, and G. Lebon. Extended Irreversible Thermodynamics, 4th edition. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [5] R.H. Sforzini. Derivation of the thrust equation from conservation of energy. J. Aircraft, 7(6):538–540, Nov-Dec 1970.