



HAL
open science

Trace et valeurs propres extrêmes d'un produit de matrices de Toeplitz. Le cas singulier.

Philippe Rambour, Abdellatif Seghier

► **To cite this version:**

Philippe Rambour, Abdellatif Seghier. Trace et valeurs propres extrêmes d'un produit de matrices de Toeplitz. Le cas singulier.. 2011. hal-00599574

HAL Id: hal-00599574

<https://hal.science/hal-00599574>

Preprint submitted on 10 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Trace et valeurs propres extrêmes d'un produit de matrices de Toeplitz. Le cas singulier.

Philippe Rambour* Abdellatif Seghier†

Résumé

Trace et valeurs propres extrêmes d'un produit de matrices de Toeplitz.

Le cas singulier.

Dans un premier théorème nous donnons un développement asymptotique de la trace de la matrice $T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)$ avec $f_1(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_1}c_1(e^{i\theta})$ et $f_2(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_2}c_2(e^{i\theta})$, c_1 et c_2 étant deux fonctions régulières sur le tore avec $-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$. Ensuite nous étudions le cas particulier $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$. Nous obtenons alors l'asymptotique de la trace des puissances entières de $T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)$ et nous en déduisons la limite lorsque N tend vers l'infini des valeurs propres de cette matrice ce qui nous permet de donner un principe de grandes déviations pour une famille de formes quadratiques de processus aléatoires gaussiens stationnaires.

Abstract

Trace and extreme eigenvalues of a product of truncated Toeplitz matrices.

The singular case.

In a first theorem we give an asymptotic expansion of $\text{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))$ where $f_1(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_1}c_1(e^{i\theta})$ and $f_2(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_2}c_2(e^{i\theta})$, with c_1 and c_2 are two regular functions of the torus and $-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$. In a second part of this work we study the particular case where $\alpha_1 > 0$ and $\alpha_2 < 0$. Then we obtain the asymptotic of $\text{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s$ for $s \in \mathbb{N}^*$ that provides us the limits when N goes to the infinity of the extreme eigenvalues of this matrix. This last result allows us to give a large deviation principle for a family of quadratic forms of stationary process.

1 Introduction

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ on appelle matrice de Toeplitz d'ordre N et de symbole f , et on note $T_N(f)$, la matrice définie par $(T_N(f))_{k+1, l+1} = \widehat{f}(l-k)$ pour $0 \leq k \leq N$ et $0 \leq l \leq N$, où $\widehat{h}(s)$ désigne le coefficient de Fourier d'ordre s de la fonction h . On dira que le symbole f est régulier si la fonction f est strictement positive sur le tore, et que le symbole f est singulier si la fonction f admet des zéros ou des pôles sur le tore. Une bonne approche des matrices de Toeplitz peut se trouver dans [5].

Un problème de l'étude des matrices de Toeplitz est d'établir la trace du produit de deux matrices de Toeplitz, ou même d'une puissance d'un produit de matrice de Toeplitz. Cette

*Université de Paris Sud, Bâtiment 425; F-91405 Orsay Cedex; tel : 01 69 15 57 28 ; fax 01 69 15 60 19
e-mail : philippe.rambour@math.u-psud.fr

†Université de Paris Sud, Bâtiment 425; F-91405 Orsay Cedex; tel : 01 69 15 60 09 ; fax 01 69 15 72 34
e-mail : abdelatif.seghier@math.u-psud.fr

étude intervient autant dans le domaine de l'analyse (recherche des valeurs propres) que des probabilités (théorèmes de limite centrale, principes de grandes déviations). Le problème de l'étude de $\text{Tr}(T_N(f)T_N(g))^s$ est un grand classique de la littérature consacrée aux matrices de Toeplitz et à l'étude des processus aléatoires Gaussiens. Il a été en particulier étudié par Avram ([1]) dans le cas régulier ou pour une puissance deux, et par Fox et Taqu ([13], [12]), dans un cadre plus général. Il faut aussi citer Grenander et Szegô [21], Ibragimov [22], Rosenblatt [30], Taniguchi [34], Dalhaus [10], Giraitis et Surgalis [19], Ginovyan [14], Taniguchi and Kakizawa [35], Ginovyan et Sahakyan [17], [16] et [15], et Lieberman et Philips [26]. Un bon résumé des principaux acquis peut se trouver dans [18].

La question qui peut également se poser est de connaître la trace de $(T_N(f)T_N^{-1}(g))^s$. Une façon de faire peut consister à se ramener à la trace de $(T_N(f)T_N(g^{-1}))^s$, mais cette méthode n'est pas toujours satisfaisante, surtout dans le cas singulier. Dans cet article nous proposons un développement asymptotique d'ordre 1 ou 2, suivant les cas, de $\text{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))$ dans le cas où $f_1(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_1}c_1(\theta)$ et $f_2(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_2}c_2(\theta)$ avec $-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$ et où c_1 et c_2 sont deux fonctions régulières sur le tore. Les méthodes que nous utilisons sont différentes de celles de Fox et Taqu, mais utilisent des travaux antérieurs (voir [28] et [29]). Nous mettons en évidence les différents cas qui peuvent se présenter, et la suite de notre travail est consacrée à l'étude du cas $\alpha_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$ (cas 1) ii). Nous donnons dans ce cas une expression asymptotique de $\text{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s$ et aussi de $\text{Tr}(T_N(f_1)T_N(f_2^{-1}))^s$ (ce qui revient à donner $\text{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s$ pour $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$ complétant ainsi des résultats de Taniguchi([34], [35] et de Lieberman et Phillips [26]. Nous étudions ensuite les conséquences de ces résultats pour les valeurs propres de $T_N(f_1)T_N(f_2^{-1})$ et nous en déduisons un résultat probabiliste. Dans le cas d'une matrice de Toeplitz le comportement des valeurs propres obéit à certains principes bien connus. On sait par exemple que si $\lambda_i^{(N)}$ sont les valeurs propres d'une matrices de Toeplitz d'un symbole f avec $\inf_{\theta \in \mathbb{T}} f(\theta) = m$ et $\sup_{\theta \in \mathbb{T}} f(\theta) = M$ alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\inf_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{(N)} \right) = m \text{ et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{(N)} \right) = M.$$
 Cette propriété n'est évidemment

plus vraie pour un produit de matrices de Toeplitz ni à plus forte raison pour le produit d'une matrice de Toeplitz avec une matrice hermitienne. Si on étudie une forme quadratique W_N définie par $W_N = \frac{1}{N}X^{(N)*}M_N X^{(N)}$ avec (X_n) un processus stationnaire centré gaussien et la matrice M_N une matrice hermitienne (voir, entre autre, [31], [3] et [4]) on ne peut donc pas alors appliquer le théorème de Gärtner-Ellis ([11]) pour obtenir un principe de grandes déviations pour W_N . Dans le cas où $M_N = T_N(f)$ et où $f, g \in L^\infty(\mathbb{T})$ (g étant la densité spectrale de $X^{(N)}$) [3] et [4] donnent des solutions à ce problème. Cela leur permet notamment de donner un principe de grandes déviations dans l'étude du rapport de vraisemblance de deux processus gaussiens stationnaires ([8], [7],[9],[6] [2]) dans le cas où les densités spectrales sont régulières. Supposons maintenant que $X^{(N)}$ admette pour densité spectrale une fonction f_1 et que $M_N = T_N^{-1}(f_2)$. Dans le cas α_1 positif et α_2 négatif en notant $\mu_i^{(N)}$ les valeurs

propres de $T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)$ nous obtenons, en étudiant la convergence de la mesure $\sum_{i=0}^N \delta_{\mu_i^{(N)}}$,

que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\inf_{1 \leq i \leq N} \mu_i^{(N)} \right) = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{1 \leq i \leq N} \mu_i^{(N)} \right) = \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_\infty$. Nous pouvons alors obtenir

sur un intervalle maximal la limite de la suite de fonctions (voir [21])

$$\begin{aligned} L_N(t) &= \frac{1}{N} \ln E(e^{NtW_N}) \\ &= -\frac{1}{2N} \ln \det \left(I_N - 2tT_N^{1/2}(f_1)T_N^{-1}(f_2)T_N^{1/2}(f_1) \right) = -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \ln(1 - 2t\mu_i^{(N)}). \end{aligned}$$

Toujours dans le cas 1) ii) avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$ nous retrouvons un théorème de limite centrale similaire à celui donné par Fox et Taqqu dans [13] mais dans lequel nous pouvons considérer la forme quadratique $X^{(N)*}T_N(f_2)^{-1}X^{(N)}$ au lieu de $X^{(N)*}T_N(f_2).X^{(N)}$.

Dans un prochain travail nous nous attacherons à développer les cas différents du cas 1) ii) qui interviennent dans le théorème 1. Nous aurons deux objectifs : d'abord établir des expressions asymptotiques pour les traces de $(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s$ puis utiliser ces expressions pour donner des théorèmes de limites centrales pour des formes quadratiques du type $X^{(N)*}T_N(f_2)^{-1}X^{(N)}$ ou X_N est un processus aléatoire centré gaussien stationnaires de densité spectrale f_1 .

2 Principaux résultats

2.1 Trace de produits de matrices de Toeplitz.

Dans la suite nous noterons χ la fonction définie par $\chi(\theta) = e^{i\theta}$. Pour tous les réels ν positifs nous considérerons aussi les ensembles $A(\mathbb{T}, \nu) = \{h \in L^2(\mathbb{T}) / \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\nu \hat{h}(k) < \infty\}$, où

$\hat{h}(k)$ désigne le coefficient d'ordre k de la fonction h .

Théorème 1 *On considère deux fonctions f_1 et f_2 définies sur le tore \mathbb{T} par $f_1 = |1 - \chi|^{2\alpha_1} c_1$ et $f_2 = |1 - \chi|^{2\alpha_2} c_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions régulières dans $A(\mathbb{T}, \frac{3}{2})$ et $-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$. On a alors les résultats suivants :*

1. Si $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$
 - i) dans le cas ou $\frac{1}{2} > \alpha_2 - \alpha_1 > 0$

$$\text{Tr} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) = \text{Tr} \left(T_N \frac{f_1}{f_2} \right) + O(N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1}),$$

- ii) dans le cas ou $0 > \alpha_2 - \alpha_1 > -1$

$$\begin{aligned} \text{Tr} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) &= \text{Tr} \left(T_N \frac{f_1}{f_2} \right) + \hat{f}_1(0) \left(\langle \ln f_2^{-1}, \frac{1}{f_2} \rangle_{2,1/2} \right) \\ &+ C_1(f_1, f_2) + O(N^{\max(2\alpha_2 - 2\alpha_1, -1)}). \end{aligned}$$

Si les fonctions f_1 et f_2 sont des fonctions paires on a

$$C_1(f_1, f_2) = -2(\alpha_2 + 1) \left(\langle \ln f_2^{-1}, \frac{f_1}{f_2} \rangle_{2,1/2} - \langle \ln f_2^{-1}, \frac{1}{f_2} \rangle_{2,1/2} \hat{f}_1(0) - \langle \ln f_1, \frac{1}{f_2} \rangle_{2,1/2} \right).$$

2. Si $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$

i) Dans le cas où $\frac{1}{2} < \alpha_2 - \alpha_1 < 1$ on a

$$\mathrm{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) = N^{2\alpha_2-2\alpha_1}C_2(f_1, f_2) + o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1})$$

ii) Dans le cas où $-\frac{1}{2} < \alpha_2 - \alpha_1 < \frac{1}{2}$ on a

a) Si $\alpha_1 < 0$

$$\mathrm{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) = \mathrm{Tr}\left(T_N \frac{f_1}{f_2}\right) + N^{2\alpha_2-2\alpha_1}C_3(f_1, f_2) + o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1})$$

b) Si $\alpha_1 > 0$

$$\mathrm{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) = \mathrm{Tr}\left(T_N \frac{f_1}{f_2}\right) + \left(\int_{1/2}^1 \tilde{G}_{\alpha_2}(x)dx\right) \frac{2N^{2\alpha_2}\hat{f}_1(0)}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} + o(N^{2\alpha_2})$$

avec

$$\tilde{G}_{\alpha_2}(x) = \int_0^x t^{2\alpha_2-2} ((1-t)^{2\alpha_2} - 1) - t^{2\alpha_2}(1-t)^{2\alpha_2-2} dt dx + \frac{x^{2\alpha_2-1}}{(2\alpha_2-1)},$$

et $x \in [1/2, 1]$.

Remarque 1 Les constantes $C_i(f_1, f_2)$ $1 \leq i \leq 3$, peuvent être obtenues à partir de la démonstration du théorème.

Dans l'énoncé suivant nous étudions un cas particulier du théorème 1. et nous noterons $f_{2,t}$ la fonction

$$f_{2,t}(\theta) = tf_1(\theta) + f_2(\theta),$$

Théorème 2 Si f_1 et f_2 sont deux fonctions paires définies sur le tore et vérifiant les hypothèses du théorème 1 avec de plus α_1 positif et α_2 négatif on a, pour tout entier naturel s non nul

$$\mathrm{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s - \mathrm{Tr}\left(T_N\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^s\right) = (-1)^{s-1} \frac{\Psi_1^{(s-1)}(0)}{(s-1)!} + o(1).$$

avec

$$\Psi_1(t) = \hat{f}_1(0) \left(\langle \ln f_{2,t}^{-1}, \frac{1}{f_{2,t}} \rangle_{2,1/2} \right) - C_1(f_1, f_{2,t}).$$

Corollaire 1 On considère deux fonctions h_1 et h_2 paires définies sur le tore \mathbb{T} par $h_1 = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_1} d_1$ et $h_2 = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha_2} d_2$ où d_1 et d_2 sont deux fonctions régulières appartenant à $A(\mathbb{T}, \frac{3}{2})$. On suppose de plus que $\frac{1}{2} > \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Nous pouvons alors écrire, pour tout entier $s \geq 1$

$$\mathrm{Tr}(T_N h_1 T_N h_2)^s = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((h_1 h_2)(\theta))^s d\theta + o(N).$$

2.2 Quelques applications aux grandes déviations et aux valeurs propres

Dans tout ce paragraphe nous considérons encore $f_1 = |1 - \chi|^{2\alpha_1} c_1$ et $f_2 = |1 - \chi|^{2\alpha_2} c_2$ deux fonctions paires avec α_1 positif et α_2 négatif et c_1, c_2 deux fonctions régulières dans $A(\mathbb{T}, \frac{3}{2})$.

Lemme 1 Si $\mu_i^{(N)}$ $1 \leq i \leq N$ désignent les valeurs propres de $T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)$, classées dans l'ordre croissant, alors la suite de mesures $\sum_{i=1}^N \delta_{\mu_i^{(N)}}$ converge au sens faible (ou en loi) vers $P_{\frac{f_1}{f_2}}$ la mesure image de la mesure de Lebesgue sur le tore par $\frac{f_1}{f_2}$.

Ce lemme admet comme corollaire immédiat les deux théorèmes suivants

Théorème 3 Avec les hypothèses et notations précédentes

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mu_1^{(N)} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu_N^{(N)} = \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{\infty}.$$

On considère maintenant pour tout entier N la forme quadratique W_N définie par

$$W_N = \frac{1}{2N} X^N (T_N^{-1} f_2) X^N$$

où X^N un processus de densité spectrale $f_1 = |1 - \chi|^{2\alpha_1} c_1$ et $f_2 = |1 - \chi|^{2\alpha_2} c_2$, c_1 et c_2 étant deux fonctions régulières sur le tore. On considère alors la suite de fonctions

$$L_N(t) = \frac{1}{2N} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(1 - 2\mu_i^{(N)} t) \right)$$

où $(\mu_i^{(N)})_{i=1 \dots N}$ sont les valeurs propres de $A_N = T_N^{1/2} f_1 T_N^{-1} f_2 T_N^{1/2} f_1$ qui sont aussi celles de $T_N(f_1)T_N^{-1} f_2$. Alors nous pouvons écrire, en posant $\Delta =] - \delta^{-1}, \delta^{-1}[$ avec $\delta = \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{\infty}$

Théorème 4 Si $\frac{f_1}{f_2} \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$ on a pour tout t tel que $2t \in \Delta$

$$L_N(t) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(1 - 2t \frac{f_1}{f_2}(\theta) \right) d\theta + o(1),$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(N L_N(t) + \frac{N}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(1 - 2t \frac{f_1}{f_2}(\theta) \right) d\theta \right) = \frac{\Psi(2t)}{2}$$

avec $\Psi(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} (t)^l \frac{\Psi_1^{(l)}(0)}{l!}$

Remarque 2 Ce théorème revient à dire que si $\frac{f_1}{f_2} \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ et $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ alors (W_N) satisfait une SLDP (Sharp Large Deviation Principle) pour une fonction L^* qui est le dual de Fenchel-Legendre est $L(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(1 - 2t \frac{f_1}{f_2}(\theta) \right) d\theta$.

D'autre part en posant $m_N = E(t X^N (T_N^{-1} f_2) X^N)$ nous pouvons énoncer le théorème

Théorème 5 *La variable aléatoire :*

$$\frac{{}^t X^N (T_N^{-1} f_2) X^N - m_N}{\sqrt{N}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée de variance $1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f_1(\theta)}{f_2(\theta)} \right)^2 d\theta$.

Remarque 3 *La démonstration de ce théorème est bien sûr parfaitement identique à celle du théorème du même genre donné dans [13]*

Pour démontrer le théorème 1 nous allons devoir, dans un premier temps, donner une expression asymptotique simple pour N suffisamment grand, des coefficients du polynôme prédicteur de degré N d'une fonction f admettant une singularité d'ordre α comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. C'est ce que nous faisons, après un bref rappel, dans la partie suivante.

3 Asymptotique des coefficients du polynôme prédicteur

3.1 Définition et propriétés fondamentales du polynôme prédicteur

Définition 1 *Si h une fonction positive dans $L^1(\mathbb{T})$ on appelle polynôme prédicteur de degré N de h le polynôme K_N définie par $K_N = \sum_{k=0}^N \frac{(T_N^{-1})_{k+1,1}}{\sqrt{(T_N^{-1})_{1,1}}} z^k$.*

Nous avons alors les résultats suivants (voir [25])

Théorème 6 *Si h une fonction positive dans $L^1(\mathbb{T})$ et K_N son polynôme prédicteur de degré N alors*

$$\forall s, -N \leq s \leq N \quad |\widehat{K_N}^{-2}(s)| = \widehat{h}(s).$$

– K_N ne s'annule pas sur le tore.

Ce théorème admet la conséquence immédiate suivante

Théorème 7 *Avec les hypothèses du théorème précédent nous avons*

$$T_N(|K_N|^{-2}) = T_N(h).$$

Le calcul de $T_N^{-1}(h)$ s'en trouve alors facilité grâce au lemme suivant qui a été établi dans [27] et qui est une version algébrique de la formule de Gohberg-Semencul [20].

Lemme 2 *Si $P = \sum_{u=0}^N \delta_u z^u$ un polynôme de degré N sans zéros sur le tore on a*

$$T_N^{-1}(|P|^{-2}) = (\bar{\delta}_0 \delta_{l-k} + \cdots + \bar{\delta}_k \delta_l - (\delta_{N-k} \bar{\delta}_{N-l} + \cdots + \delta_N \bar{\delta}_{N+k-l})).$$

Dans cette partie nous considérons une fonction f définie par $f = |1 - \chi|^{2\alpha} c$ où c est une fonction régulière sur le tore avec $c_1 = g_1 \bar{g}_1$, $g_1 \in H^{2+}$ et $g = (1 - \chi)^\alpha g_1$. On pose $\beta_k^{(\alpha)} = \widehat{g^{-1}}(k)$ et on note par $\beta_{k,N}$ le coefficient de χ^k du polynôme prédicteur de degré N de f . D'autre part nous nous plaçons dans le cas $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Théorème 8 *On considère une fonction f comme ci-dessus. Alors si n_1 est entier fixé, indépendamment de N ,*

$$\beta_{k,N} = \beta_k^{(\alpha)} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^\alpha (1 + o(1))$$

pour tout entier $k \in [0, N - n_1]$, uniformément par rapport à N .

Remarque 4 *Dans la pratique n_1 est choisi de manière à ce que pour tout entier $u \geq n_1$ on ait $\beta_u^{(\alpha)} = \frac{1}{g_1(1)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ avec la précision nécessaire.*

Remarque 5 *Ce théorème peut se lire*

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \text{t.q.} \quad \forall N \geq N_0 \quad \forall k, \quad 0 \leq k \leq N - n_1 \quad \exists R_k, \quad |R_k| \leq \varepsilon \quad \text{tel que}$

$$\beta_{k,N} = \beta_k^{(\alpha)} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^\alpha (1 + R_k)$$

3.2 Démonstration du théorème 8

Pour démontrer ce théorème nous allons découper l'intervalle $[0, N\delta]$ en deux, à savoir $[0, \delta_1]$ et $[\delta_1, \delta]$. La démonstration du théorème sur $[\delta_1, \delta]$ est assez rapide. Dans [29] nous avons démontré

Théorème 9 *Si $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$ nous avons pour $0 < x < 1$*

$$g_1(1) \beta_{[Nx], N} = N^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha + o(N^{\alpha-1})$$

uniformément en x dans $[\delta_1, \delta_2]$, pour $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$.

Ce théorème est équivalent à

$$g_1(1) \beta_{k,N} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} k^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^\alpha + o(N^{\alpha-1})$$

pour tout entier naturel k dans $[N\delta_1, N\delta_2]$, uniformément par rapport à N . Cette remarque, jointe au résultat (voir [36]) $\beta_k^{(\alpha)} = \frac{1}{g_1(1)\Gamma(\alpha)} k^{\alpha-1} (1 + o(1))$, uniformément par rapport à k pour k assez grand, permet d'obtenir le résultat sur $[N\delta_1, N\delta]$.

Pour démontrer le théorème dans l'intervalle $[0, N\delta_1]$, il nous faut revisiter les résultats de [29].

Nous avons obtenu dans cet article le lemme

Lemme 3 *On suppose $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Alors, sous les hypothèses du théorème 9 nous pouvons écrire pour N suffisamment grand et pour $0 \leq k \leq \delta N$, $0 < \delta < 1$*

$$\beta_{k,N} = \beta_k^{(\alpha)} - \frac{1}{N} \sum_{u=0}^k \beta_{k-u}^{(\alpha)} \left(F_\alpha \left(\frac{u}{N} \right) \right) (1 + o(1)).$$

la fonction $z \rightarrow F_\alpha(z)$ est continue et dérivable sur tout compact de $[0, 1[$ et de plus pour tout réel dans $[0, \delta]$ on a

$$|F_\alpha(z)| \leq K_0(1 + |\ln(1 - z)|),$$

où K_0 est une constante indépendante de N .

Remarque 6 En utilisant le déterminant de $T_N(|1 - \chi|^{2\alpha} f_1)$ et la formule d'Hartwig-Fisher nous obtenons facilement

$$F_\alpha(0) = \alpha^2 + o(1).$$

Si $k \in [0, k_0]$ et N suffisamment grand le lemme 3 permet d'écrire

$$\begin{aligned} \beta_k^{(\alpha)} + \frac{1}{N} \sum_{u=0}^k F_\alpha\left(\frac{u}{N}\right) \beta_{k-u}^{(\alpha)} &= \beta_k^{(\alpha)} (1 - o(1)) \\ &= \beta_k^{(\alpha)} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^\alpha (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Si $k_0 < k < N\delta_1$ nous pouvons considérer, toujours avec le lemme 3, les égalités

$$\begin{aligned} \beta_k^{(\alpha)} - \frac{1}{N} \sum_{u=0}^k F_\alpha\left(\frac{u}{N}\right) \beta_{k-u}^{(\alpha)} &= \beta_k^{(\alpha)} - \frac{1}{N} \sum_{u=0}^k \left(F_\alpha\left(\frac{u}{N}\right) - F_\alpha(0)\right) \beta_{k-u}^{(\alpha)} \\ &\quad - F_\alpha(0) \frac{1}{N} \sum_{u=0}^k \beta_{k-u}^{(\alpha)} \\ &= \beta_k^{(\alpha)} - \beta_k^{(\alpha+1)} \frac{\alpha^2}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^k u \beta_{k-u}^{(\alpha)} F'_\alpha(c_u) \end{aligned}$$

avec, pour tout u , $0 \leq c_u \leq \frac{u}{N}$. Alors si k_0 suffisamment grand pour que l'approximation de $\beta_k^{(\alpha)}$ et de $\beta_k^{(\alpha+1)}$ soient pertinentes on a, en utilisant l'uniformité de ces mêmes approximations,

$$\begin{aligned} \beta_k^{(\alpha)} - \beta_k^{(\alpha+1)} \frac{\alpha^2}{N} &= \beta_k^{(\alpha)} - \alpha \frac{k}{N} \beta_k^{(\alpha)} (1 + o(1)) \\ &= \beta_k^{(\alpha)} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^\alpha (1 + o(1)) \end{aligned}$$

uniformément par rapport à $k \in [k_0, N\delta_1]$. Si α positif on a $\frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^k u \beta_{k-u}^{(\alpha)} F'_\alpha(c_u) = O\left(\frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^k u \beta_{k-u}^{(\alpha)}\right)$, et nous avons également

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^k u \beta_{k-u}^{(\alpha)} \right| &\leq \frac{1}{N^2} \left(\sum_{u=0}^k (k-u) |\beta_{k-u}^{(\alpha)}| + \sum_{u=0}^k k |\beta_{k-u}^{(\alpha)}| \right) \\ &= O\left(\frac{k^{\alpha+1}}{N^2}\right) = O(k^{\alpha-1} \delta_1^2) = o(\beta_k^{(\alpha)}) \end{aligned}$$

D'autre part si α est négatif nous pouvons écrire, toujours si k_0 suffisamment grand pour que l'approximation des coefficients $\beta_k^{(\alpha)}$ soit pertinente

$$\sum_{u=0}^k u \beta_{k-u}^{(\alpha)} = \sum_{u=0}^{k-k_0} u \beta_{k-u}^{(\alpha)} + \sum_{u=k-k_0+1}^k u \beta_{k-u}^{(\alpha)}.$$

Nous avons encore

$$\frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^{k-k_0} u \beta_{k-u}^{(\alpha)} = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{u=0}^{k-k_0} (k-u) \beta_{k-u}^{(\alpha)} + \sum_{u=0}^{k-k_0} k \beta_{k-u}^{(\alpha)} \right).$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \sum_{u=0}^k (k-u) |\beta_{k-u}^{(\alpha)}| &= O\left(\frac{k^{\alpha+1}}{N^2}\right) \\ &= O(k^{\alpha-1} \delta_1^2) = o(\beta_k^{(\alpha)}) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{u=0}^{k-k_0} k \beta_{k-u}^{(\alpha)} = -k \sum_{u=k-k_0+1}^{\infty} \beta_{k-u}^{(\alpha)} = O(\beta_k^{(\alpha)}).$$

Enfin en utilisant la formule d'Euler et Mac-Laurin (en supposant k_0 assez grand pour que cela ait un sens) il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \sum_{u=k-k_0+1}^k |\beta_{k-u}^{(\alpha)}| &= \frac{1}{N^2} O(k^{\alpha+1} - (k-k_0)^{\alpha+1}) \\ &= \frac{k^{\alpha+1}}{N^2} O\left(1 - \left(1 - \frac{k_0}{k}\right)^{\alpha+1}\right) = O\left(\frac{k^\alpha}{N}\right) = o(k^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer le lemme, et l'uniformité, pour $k \in [0, \delta_0]$.

Reste à obtenir la formule pour $k \in [N\delta_2, N - n_1]$.

Pour ce faire nous allons utiliser les polynômes orthogonaux Q_j , $0 \leq j \leq N$ associés au poids f et reliés aux polynômes prédicteurs par $Q_N(\chi) = \overline{P_N(\chi)}$.

Nous allons utiliser également la relation (voir [23],[24]) que

$$\beta_{N+1, N+1} \sim \frac{\alpha}{N}. \quad (1)$$

D'autre part la relation (voir, par exemple [33])

$$P_m(\chi) = P_{m-1}(\chi) + \chi \beta_{m,m} Q_{m-1}$$

permet, en identifiant les coefficients en $N - m$

$$\beta_{N-m} = \beta_{N-m, N-1} + \beta_{N, N} \beta_{m, N-1}$$

et pour $m \leq k$ et k suffisamment petit nous obtenons

$$\beta_{N-k, N-m} = \beta_{N-m-(k-m), N-m} = \beta_{N-k, N-m-1} + \beta_{N-m, N-m} \beta_{k-m, N-m-1}$$

ce qui donne, en ajoutant cette relation pour m de 0 à k :

$$\beta_{N-k, N} = \sum_{m=0}^k \beta_{N-m, N-m} \beta_{k-m, N-m-1}.$$

Ce qui se traduit, en utilisant le lemme (3) et l'équation (1)

$$\beta_{N-k,N} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{N}\right) \frac{\alpha}{N} \sum_{m=0}^k \beta_{k-m,N-m-1} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

et avec les résultats établis au début de la démonstration

$$\begin{aligned} \beta_{N-k,N} &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{N}\right) \frac{\alpha}{N} \sum_{m=0}^k \left(\beta_{k-m}^{(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{N} \beta_{k-m}^{(\alpha+1)} \right) + o\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{N}\right) \frac{\alpha}{N} \left(\beta_k^{(\alpha+1)} - \frac{\alpha^2}{N} \beta_k^{(\alpha+2)} \right) + o\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\beta_{N-k+1,N} = \frac{\alpha \beta_k^{(\alpha+1)}}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2)$$

Ce qui s'écrit aussi si nous considérons un entier $j \in [N\delta_2, N - n_1]$

$$\begin{aligned} g_1(1)\beta_{j+1,N} &= \frac{\alpha(N-j)^\alpha}{N\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^\alpha N^{\alpha-1} + o\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^\alpha \left(\frac{N-j+j}{j}\right)^{\alpha-1} j^{\alpha-1} + o\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\beta_{j+1,N} = \beta_j^{(\alpha)} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^\alpha + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

L'uniformité du résultat est alors assurée par la façon dont δ_2 tend vers 1.

4 Démonstration du théorème principal

On doit calculer la trace de $(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))$ avec $f_1 = |1 - \chi|^{2\alpha_1} c_1$ et $f_2 = |1 - \chi|^{2\alpha_2} c_2$ où $-\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{2}$ et où c_1 et c_2 sont des fonctions régulières.

On peut écrire

$$\text{Tr}(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) = \hat{f}_1(0) \sum_{k=0}^N (T_N^{-1}(f_2))_{k,k} + 2\Re \left(\sum_{s=1}^N \hat{f}_1(s) \sum_{k=0}^{N-s} T_N^{-1}(f_2)_{k,k+s} \right),$$

et aussi (avec $s > 0$) et en utilisant le lemme 2

$$\sum_{k=0}^{N-s} T_N^{-1}(f_2)_{k,k+s} = (N-1-s)A_1(s) + A_2(s)$$

avec

$$\begin{cases} A_1(s) = \sum_{l=0}^{N-s} \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} \\ A_2(s) = -2 \left(\sum_{l=0}^{N-s} l \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} \right) \end{cases}$$

où les $\beta_{l,N}$, $0 \leq l \leq N$, sont les coefficients du polynôme prédicteur de la fonction f_2 . Nous avons établi plus haut que si n_0 est un entier tel que $\frac{n_0}{N} = o(1)$ nous pouvons écrire

$$\beta_{l,N} = \beta_l^{(\alpha_2)} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} (1 + o(1)) \quad (3)$$

uniformément pour tout entier l dans $[0, N - n_0]$. Dans un premier temps nous allons démontrer le lemme suivant

Lemme 4 *Avec les hypothèses du théorème nous avons quel que soit s , $0 \leq s \leq N - n_0$, uniformément par rapport à s*

1. Si $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-s} T_N^{-1}(f_2)_{l,l+s} &= N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) + \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \tau_2\left(\frac{s}{N}\right) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{\alpha_2} \overline{\beta_u^{\alpha_2}}\right) + \\ &+ \frac{N^{2\alpha_2}}{\Gamma^2(\alpha_2) c_2(1)} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} F_1\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2}) \end{aligned}$$

où F_1 est une fonction continue sur $[0, 1]$, et $\tau_2(t) = -(\alpha_2 + ((1-t)(\alpha_2 + 2)))$.

2. Si $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$ alors

$$\sum_{l=0}^{N-s} T_N^{-1}(f_2)_{l,l+s} = N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) + \frac{N^{2\alpha_2}}{\Gamma^2(\alpha_2) c_2(1)} F_2\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2})$$

où F_2 est une fonction continue sur $[0, 1]$,

4.1 Démonstration du lemme 4

Remarque 7 *La démonstration de l'uniformité des restes, qui est un peu fastidieuse, a été repoussé dans l'appendice.*

4.1.1 Calcul du coefficient A_1

En supposant que n_1 est un entier tel que $\frac{n_1}{N} = o(1)$ et $n_1 \leq n_0$ nous pouvons écrire la décomposition :

$$A_1(s) = \sum_{l=0}^{N-s-n_1} \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} + \sum_{l=N-s-n_1+1}^{N-s} \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}}.$$

Compte tenu de la remarque 3 nous pouvons écrire, en posant $s' = s + n_1$

$$\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} = \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} \overline{\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2}} (1 + o(1)).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} \overline{\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2}} = \\ & = \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) + 1 \right) \left(\left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) + \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \end{aligned}$$

En développant on a

$$\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} \overline{\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2}} = A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_1 = \left(\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \\ A'_2 = \left(\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) \right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \\ A'_3 = \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \\ A'_4 = \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right). \end{array} \right.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} A'_1 &= \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) - \sum_{N-s'+1}^{+\infty} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} dt \right) + o(N^{2\alpha_2-1}). \end{aligned}$$

On peut remarquer que quand $\frac{s}{N}$ tend vers 1 et α_2 négatif nous pouvons écrire

$$A'_1 \sim \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} \frac{N^{2\alpha_2}}{\alpha_2 c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} + o(N^{2\alpha_2})$$

Nous avons d'autre part

i) Si $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$

$$\begin{aligned} A'_2 &= \left(\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{l}{N} \right) \right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{N} \left(\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} l \right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2}{N} \left(\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} l \right) = \frac{\alpha_2}{N} \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) - \\ & - N^{2\alpha_2-1} \frac{\alpha_2}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} dt + o(N^{2\alpha_2-1}), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\left(\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{l}{N} \right) \right) = \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \Phi_1\left(\frac{s'}{N}\right) + o(N^{\alpha_2-1})$$

avec

$$\Phi_1\left(\frac{s'}{N}\right) = \int_0^{1-s'/N} t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left((1-t)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 t\right) dt.$$

En posant finalement

$$\Phi_2\left(\frac{s'}{N}\right) = \Phi_1\left(\frac{s'}{N}\right) + \alpha_2 \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} dt$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A'_2 &= \left(-\frac{\alpha_2}{N} \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) + \right. \\ & \left. + N^{2\alpha_2-1} \frac{1}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \Phi_2\left(\frac{s'}{N}\right) \right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + o(N^{\alpha_2-1}), \end{aligned}$$

où Φ_2 est une fonction continue sur $[0, 1]$.

ii) Si $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$ nous avons

$$A'_2 = \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} N^{2\alpha_2-1} \frac{1}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left((1-t)^{\alpha_2} - 1\right) dt + o(N^{\alpha_2-1})$$

Calculons maintenant le terme A'_3 . Là aussi nous devons distinguer les cas α_2 positif et α_2 négatif.

i) Si $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$.

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A'_3 &= \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 \frac{l}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) - \\ &- \frac{\alpha_2}{N} \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2}{N} \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} = (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \frac{\alpha_2}{N} \sum_{u=0}^{\infty} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} - \\ & - (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \frac{\alpha_2 N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{\alpha_2} (t + \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} dt + o(N^{2\alpha_2-1}) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left((1 - \frac{l+s}{N})^{\alpha_2} - (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2} + \alpha_2 \frac{l}{N} (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \right) = \\ & = \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \Phi_3\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2-1}), \end{aligned}$$

Avec

$$\Phi_3\left(\frac{s}{N}\right) = \int_0^{1-s'/N} t^{\alpha_2-1} (t + \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \left((1-t - \frac{s}{N})^{\alpha_2} - (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2} + \alpha_2 t (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \right) dt.$$

En écrivant

$$\begin{aligned} & t^{\alpha_2-1} (t + \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \left((1-t - \frac{s}{N})^{\alpha_2} - (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2} + \alpha_2 t (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \right) \\ & = (t + \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \sum_{n \geq 2} \delta_n t^{\alpha_2+n-1} (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-n} \end{aligned}$$

où les coefficients δ_n sont les coefficients du développement entière de la fonction $t \rightarrow (1-t)^{\alpha_2}$ nous pouvons conclure que $\Phi_3(u) \sim O((1-u)^{2\alpha_2})$ au voisinage de 1. En posant

$$\Phi_4\left(\frac{s}{N}\right) = \alpha_2 \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{2\alpha_2} (t + \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} dt$$

nous pouvons écrire finalement

$$\begin{aligned} A'_3 &= (1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \left(-\frac{\alpha_2}{N} \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \right) + \\ & + \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \left((1 - \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} \Phi_4\left(\frac{s}{N}\right) + \Phi_3\left(\frac{s}{N}\right) \right) + o(N^{2\alpha_2-1}) \end{aligned}$$

où Φ_3 est une fonction continue sur $[0, 1[$ et équivalente à $O((1-t)^{2\alpha_2})$ en 1, et où Φ_4 est une fonction continue sur $[0, 1]$.

ii) Si $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$ nous pouvons écrire de même

$$\frac{\alpha_2}{N} \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} = \frac{\alpha_2 N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_2} (t + \frac{s}{N})^{\alpha_2-1} dt + o(N^{2\alpha_2-1})$$

et, comme ci-dessus

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 \frac{l}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) = \\ & = \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \Phi_3\left(\frac{s'}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2-1}). \end{aligned}$$

D'où

$$A'_3 = \left(\frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \tilde{\Phi}_4\left(\frac{s'}{N}\right) + \Phi_3\left(\frac{s'}{N}\right) \right) \right) + o(N^{2\alpha_2-1}),$$

avec

$$\tilde{\Phi}_4\left(\frac{s}{N}\right) = \alpha_2 \int_0^1 t^{2\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} dt$$

Il est d'autre part facile de se convaincre que

$$\begin{aligned} A'_4 &= \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^{1-\frac{s'}{N}} t^{\alpha_2-1} \left(\left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right. \\ & \quad \left. \left(\left(1-t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \left((1-t)^{\alpha_2-1} \right) + o(N^{2\alpha_2-1}) \right) \\ &= \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \Phi_5\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2-1}) \end{aligned}$$

où Φ_5 est une fonction continue sur $[0, 1[$ et où $\Phi_5(u)$ est équivalent à $O((1-u)^{2\alpha_2+1})$ en 1. Enfin en utilisant l'équation 2 qui est apparue dans la démonstration du théorème 8 on obtient que, quel que soit le signe de α_2 on a

$$\sum_{l=N-s-n_1}^{N-s} \overline{\beta_{l,N} \beta_{l+s,N}} = O(N^{\alpha_2-2})$$

ce qui implique

$$(N-s-1) \sum_{l=N-s-n_1}^{N-s} \overline{\beta_{l,N} \beta_{l+s,N}} = o(N^{2\alpha_2}).$$

En regroupant on peut donc écrire

- Si $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$

$$\begin{aligned} (N+1-s)A_1(s) &= N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) - \alpha_2 \left(2 - \frac{s}{N}\right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{s}{N}\right) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) + \\ &+ \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} \tilde{F}_1\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2}) \end{aligned}$$

avec \tilde{F}_1 une fonction continue sur $[0, 1]$.

- Si $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$

$$(N+1-s)A_1(s) = N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) + \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \tilde{F}_2\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2}),$$

où \tilde{F}_2 est une fonction continue sur $[0, 1]$.

4.1.2 Calcul du coefficient A_2

Toujours avec la même définition de s' on a Nous avons $A_2(s) = -2 \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}}$.

i) Dans le cas où $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$ nous avons

$$\begin{aligned}
A_2(s) &= -2 \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} \\
&= -2 \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} \left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} \\
&= -2 \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} \left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) - \\
&\quad - 2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}}.
\end{aligned}$$

Soit, finalement :

$$\begin{aligned}
A_2(s) &= -2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) + \\
&\quad + 2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} dt \\
&\quad - 2 \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^{1-s'/N} t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left((1-t)^{\alpha_2} \left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) dt \\
&\quad + o(N^{2\alpha_2}).
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
H_3\left(\frac{s}{N}\right) &= - \int_{1-s'/N}^{+\infty} t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} dt + \\
H_4\left(\frac{s}{N}\right) &= \int_0^{1-s'/N} t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left((1-t)^{\alpha_2} \left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) dt,
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
A_2(s) &= -2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) + \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} H_3\left(\frac{s}{N}\right) \right) - \\
&\quad - \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} H_4\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2})
\end{aligned}$$

où H_3 et H_4 sont des fonctions continues sur $[0, 1]$ (on vérifie aisément que $H_4(u) = O((1-u)^{\alpha_2+1})$ au voisinage de 1.

ii) Le cas $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$ se traite plus rapidement. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
A_2(s) &= -2 \sum_{l=0}^{N-s'} l \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} \left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} \\
&= -2 \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} (1-t)^{\alpha_2} \left(1-t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} dt + o(N^{2\alpha_2}).
\end{aligned}$$

Pour résumer nous pouvons poser

- Si $\alpha_2 < 0$ alors

$$\begin{aligned}
A_2(s) &= -2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{s}{N}\right) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \\
&\quad - \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \left(-2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} H_3\left(\frac{s}{N}\right) + H_4\left(\frac{s}{N}\right) \right) + o(N^{2\alpha_2}).
\end{aligned}$$

- Si $\alpha_2 > 0$ alors

$$A_2(s) = -2 \frac{N^{2\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} H_5\left(\frac{s}{N}\right) + o(N^{2\alpha_2}).$$

D'autre part quelque soit le signe de α_2 , nous avons, comme pour le calcul de A_1 nous avons

$$-2 \sum_{l=N-s-n_1}^{N-s} l \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} = o(N^{2\alpha_2}).$$

En réunissant les résultats des points abordés nous obtenons l'énoncé du lemme 4

4.2 Démonstration du théorème dans le cas où $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}, 0[$

Il s'agit de calculer la somme

$$\widehat{f}_1(0) \text{Tr} (T_N(f_2))^{-1} + 2\Re \left(\sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \sum_{l=0}^{N-s} (T_N(f_2))_{l,l+s}^{-1} \right).$$

Rappelons que dans le cas où l'exposant α_2 est négatif il a été établi que

$$\text{Tr} (T_N^{-1}(f_2)) = (N+1) \widehat{\left(\frac{1}{f_2}\right)}(0) + \langle \ln f_2 | \frac{1}{f_2} \rangle_{2,1/2} + o(1)$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle_{2,1/2}$ désigne le produit scalaire dans $A(\mathbb{T}, \frac{1}{2}) = \{\rho \in L^2(\mathbb{T}) / \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m| |\hat{\rho}(m)|^2 < \infty\}$ (voir [28]). En utilisant toujours la propriété 2 extraite de la démonstration du théorème 8 il vient, avec $|N-s| < n_0$, avec n_0 comme dans le préambule de la démonstration, et si n_0 assez petit :

$$\sum_{l=0}^{N-s} \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

et

$$\sum_{l=0}^{N-s} l \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Soit

$$\sum_{s=N-n_0}^N \widehat{f}_1(s) (N-s) \sum_{l=0}^{N-s} \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} = O(N^{-2\alpha_2-2})$$

et

$$\sum_{s=N-n_0}^N \widehat{f}_1(s) \sum_{l=0}^{N-s} l \beta_{l,N} \overline{\beta_{l+s,N}} = O(N^{-2\alpha_2-2}).$$

Nous allons donc étudier ne fait la somme

$$\widehat{f}_1(0) \text{Tr} (T_N(f_2))^{-1} + 2\Re \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \sum_{l=0}^{N'-s} (T_N(f_2))_{l,l+s}^{-1} \right)$$

avec $N' = N - n_0$. Nous vérifierons ensuite que l'approximation trouvée est d'ordre supérieur à $O(N^{-2\alpha_2-2})$.

D'après le lemme précédent la somme précédente se décompose en quatre sommes que nous allons traiter séparément.

4.2.1 Calcul de $(N+1) \left(\widehat{f}_1(0) \widehat{\left(\frac{1}{f_2}\right)}(0) + 2 \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f_2^{-1}}(-s) \right)$

Il est connu que pour s suffisamment grand on a

$$\widehat{f}_1(s) = \frac{c_1(1)}{\Gamma(-2\alpha_1)} s^{-2\alpha_1-1} + o(s^{-2\alpha_1-1}), \quad \widehat{f_2^{-1}}(s) = \frac{1}{c_2(1)\Gamma(2\alpha_2)} s^{2\alpha_2-1} + o(s^{-2\alpha_2-1}).$$

Trois cas sont à distinguer pour calculer cette somme.

a) $\frac{1}{2} > \alpha_2 - \alpha_1 > 0$.

Sous cette hypothèse nous pouvons écrire, en posant $C_1 = \frac{c_1(1)}{c_2(1)} \frac{1}{\Gamma(-2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)}$

$$\begin{aligned} (N+1) \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) &= (N+1) \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) + \\ &+ (N+1) \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 \right) \end{aligned}$$

ce qui donne encore

$$\begin{aligned} (N+1) \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) &= (N+1) \sum_{s=1}^{+\infty} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) - (N+1) \sum_{s=N}^{+\infty} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \\ &+ (N+1) \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure

$$\begin{aligned}
& (N+1) \left(\widehat{f_1}(0) \widehat{\left(\frac{1}{f_2}\right)}(0) + 2 \sum_{s=1}^N \widehat{f_1}(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \right) \\
&= \text{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right) + 2N^{2\alpha_2-2\alpha_1} C_1 \left(\int_0^1 u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} \left((1-u)^{\alpha_2+1} - 1 \right) du - \right. \\
&\quad \left. - \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} du \right) + o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1})
\end{aligned}$$

b) $0 > \alpha_2 - \alpha_1 > \frac{-1}{2}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
(N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f_1}(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f_2^{-1}}(-s) &= (N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) - (\alpha_2+1) \sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) \\
&+ (N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 + (\alpha_2+1) \frac{s}{N} \right) \\
&= (N+1) \sum_{s=1}^{+\infty} \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) - (\alpha_2+1) \sum_{s=1}^{+\infty} s \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) - \\
&- (N+1) \sum_{s=N+1}^{+\infty} \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) + (\alpha_2+1) \sum_{s=N+1}^{+\infty} s \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}}(-s) + \\
&+ (N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f_1}(s) \widehat{f_2^{-1}} \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 + (\alpha_2+1) \frac{s}{N} \right)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
& (N+1) \left(\widehat{f_1}(0) \widehat{(f_2^{-1})}(0) + 2 \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f_1}(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f_2^{-1}}(-s) \right) = \\
&= \text{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right) - (\alpha_2+1) \langle f_1 | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} + \\
&+ 2N^{2\alpha_2-2\alpha_1} C_1 \left(\int_0^1 u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} \left((1-u)^{\alpha_2+1} - 1 + (\alpha_2+1)u \right) du - \right. \\
&\quad \left. - \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} du + (\alpha_2+1) \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2-2\alpha_1-1} du \right) + o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1}).
\end{aligned}$$

c) $-\frac{1}{2} > \alpha_2 - \alpha_1 > -1$

On utilise alors la décomposition suivante

$$\begin{aligned} (N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2^{-1}(-s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} &= \\ (N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2^{-1}(-s) - (\alpha_2+1) \sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2^{-1}(-s) &+ \frac{(\alpha_2+1)\alpha_2}{2N} \sum_{s=1}^{N'} s^2 \widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2^{-1}(-s) + \\ (N+1) \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2^{-1}(-s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 + (\alpha_2+1) \frac{s}{N} - \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)s^2}{2N^2} \right) & \end{aligned}$$

Ce qui nous permet finalement d'écrire, en utilisant les mêmes calculs que ci-dessus

$$\begin{aligned} (N+1) \left(\widehat{f}_1(0) \widehat{f}_2^{-1}(0) + 2 \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f}_2^{-1}(-s) \right) &= \\ = \operatorname{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right) - (\alpha_2+1) \langle f_1 | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} + O\left(\frac{1}{N}\right). & \end{aligned}$$

4.2.2 Calcul de $2\Re \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \tau_2\left(\frac{s}{N}\right) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \right)$

Pour alléger les calculs nous poserons dans la suite de cette démonstration

$$\left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) = \Sigma(s).$$

Rappelons le résultat, pour s suffisamment grand

$$\Sigma(s) = C_2 s^{2\alpha_2}, \quad \text{avec} \quad C_2 = \frac{C_1}{\alpha_2}.$$

Là aussi nous allons devoir distinguer trois cas suivant les valeurs de $\alpha_2 - \alpha_1$.

a) $\frac{1}{2} > \alpha_2 - \alpha_1 > 0$

Dans ce cas la formule d'Euler et Mac-Laurin permet d'écrire directement

$$\begin{aligned} 2\Re \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \tau_2\left(\frac{s}{N}\right) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \right) &= \\ = 2N^{2\alpha_2-2\alpha_1} \int_0^1 u^{2\alpha_2-2\alpha_1-1} (1-u)^{\alpha_2} \tau_2(u) du + o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1}) & \end{aligned}$$

b) $0 > \alpha_2 - \alpha_1 > -\frac{1}{2}$

Nous allons utiliser la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \alpha_2 \left(2 - \frac{s}{N}\right) \Sigma(s) = \\
&= 2\alpha_2 \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \Sigma(s) - \frac{\alpha_2}{N} \sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \Sigma(s) \\
&= 2\alpha_2 \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \Sigma(s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) + \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \Sigma(s) \right) \\
&\quad - \frac{\alpha_2}{N} \sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f}_1(s) \Sigma(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne, tous calculs faits

$$\begin{aligned}
& \Re \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \Sigma(s) \alpha_2 \left(2 - \frac{s}{N}\right) \right) = 2\alpha_2 \Re \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \widehat{f}_1(s) \Sigma(s) \right) \\
&+ C_1 N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1} \left(2 \int_0^1 u^{2\alpha_2 - 2\alpha_1 - 1} \left((1 - u)^{\alpha_2} - 1 \right) du \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 u^{2\alpha_2 - 2\alpha_1} (1 - u)^{\alpha_2} du - 2 \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2 - 2\alpha_1 - 1} du \right) + o(N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1}).
\end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}
& \Re \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2 + 1} 2\Sigma(s) \right) = \\
&= 2\Re \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \widehat{f}_1(s) \Sigma(s) \right) + \\
&+ 4C_1 N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1} \left(\int_0^1 u^{2\alpha_2 - 2\alpha_1 - 1} \left((1 - u)^{\alpha_2 + 1} - 1 \right) du \right. \\
&\quad \left. - \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2 - 2\alpha_1 - 1} du \right) + o(N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1}).
\end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à calculer

$$4(\alpha_2 + 1) \Re \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \widehat{f}_1(s) \Sigma(s) \right).$$

Précisons cette quantité quand les fonctions f_1 et f_2 sont paires. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} &= -i \sum_{u \geq 0} u \widehat{g_2^{-1}}(u) \overline{\widehat{g_2^{-1}}(u+s)} \\
&= -i \langle (g_2^{-1})' | (\chi^{-s} g_2^{-1}) \rangle = -i \langle (g_2^{-1})' g_2 | (\chi^{-s} f_2^{-1}) \rangle \\
&= \sum_{u \geq 0} u \widehat{(\ln g_2^{-1})}(u) \overline{\widehat{\chi^{-s} f_2^{-1}}(u)}.
\end{aligned}$$

Et de même nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{u \geq 0} \overline{u \beta_u^{(\alpha_2)} \beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} &= \sum_{u \geq 0} \overline{u g_2^{-1}(u) g_2^{-1}(u+s)} \\
&= i \sum_{u \geq 0} \overline{(g_2^{-1})'(u) g_2^{-1}(u+s)} = i \sum_{u \geq 0} \overline{(g_2^{-1})'(-u) \left(\overline{g_2^{-1}(u+s)} \right)} \\
&= i \sum_{u \geq 0} \overline{(g_2^{-1})'(-u) \overline{g_2^{-1}(-u-s)}} = i \langle (\overline{g_2^{-1}})' | (\chi^s \overline{g_2^{-1}}) \rangle \\
&= i \langle (\overline{g_2^{-1}})' \overline{g_2} | (\chi^s f_2^{-1}) \rangle = - \sum_{u \leq 0} u \overline{(\ln \overline{g_2^{-1}})(u) \chi^s f_2^{-1}(u)}.
\end{aligned}$$

En remarquant que l'on a $\pi_+ \ln(\widehat{f_2^{-1}})(u) = \ln(\widehat{g_2^{-1}})(u)$ si $u > 0$ et $\pi_- \ln(\widehat{f_2^{-1}})(u) = \ln(\widehat{g_2^{-1}})(u)$ si $u < 0$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
2\Re \left(\sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \Sigma(s) \right) &= \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \sum_{u \geq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u) \chi^{-s} f_2^{-1}(u)} \\
&\quad - \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(-s) \sum_{u \leq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u) \chi^s f_2^{-1}(u)}.
\end{aligned}$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \sum_{u \geq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u) \chi^{-s} f_2^{-1}(u)} &= \sum_{u \geq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \overline{\chi^{-s} f_2^{-1}(u)} \\
&= \sum_{u \geq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \overline{f_2^{-1}(u+s)} \\
&= \sum_{u \geq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \overline{f_2^{-1}(-u-s)}
\end{aligned}$$

et en remplaçant u par $-u$, en utilisant la parité de f_2

$$\sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \sum_{u \geq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u) \chi^{-s} f_2^{-1}(u)} = \sum_{u \leq 0} |u| \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \overline{f_2^{-1}(u-s)}; \quad (4)$$

en procédant de même il vient

$$\begin{aligned}
- \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(-s) \sum_{u \leq 0} u \overline{\ln f_2^{-1}(u) \chi^s f_2^{-1}(u)} &= \sum_{u \leq 0} |u| \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(-s) \overline{\chi^{-s} f_2^{-1}(u)} \\
&= \sum_{u \leq 0} |u| \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(-s) \overline{f_2^{-1}(u-s)} \\
&= \sum_{u \leq 0} |u| \overline{\ln f_2^{-1}(u)} \sum_{s \geq 1} \widehat{f_1}(s) \overline{f_2^{-1}(s-u)}
\end{aligned}$$

ce qui donne, toujours grâce à la parité de f_2 :

$$-\sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(-s) \sum_{u \leq 0} u \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \overline{\chi^s f_2^{-1}}(u) = \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s). \quad (5)$$

Nous pouvons donc écrire

$$2\Re \left(\sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \Sigma(s) \right) = 2 \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s). \quad (6)$$

Considérons maintenant l'égalité

$$2 \left(\langle \ln f_2^{-1} | \frac{f_1}{f_2} \rangle_{2,1/2} - \langle \ln f_2^{-1} | \frac{1}{f_2} \rangle_{2,1/2} \widehat{f_1}(0) \right) = +S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \quad (7)$$

avec

$$S_1 = 2 \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \leq -1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s)$$

$$S_2 = 2 \sum_{u \geq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \leq -1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s)$$

$$S_3 = 2 \sum_{u \geq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s),$$

$$S_4 = 2 \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s).$$

Nous avons clairement $S_4 = S_2 = \Re \left(\sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \Sigma(s) \right)$ et $S_1 = S_3$. Nous avons d'autre

part

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \leq -1} \widehat{(f_1)}(s) \widehat{f_2^{-1}}(u-s) \\ &= \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \leq -1} \widehat{(f_1)}(s) \overline{\widehat{f_2^{-1}}(s-u)} \\ &= \sum_{u \leq 0} |u| \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \overline{\widehat{f_2^{-1}}(s+u)} \\ &= - \sum_{s \geq 1} \widehat{(f_1)}(s) \sum_{u \leq 0} u \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \overline{\chi^{-s} f_2^{-1}}(u). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant constater que

$$\begin{aligned}
-\sum_{u \leq 0} u \widehat{\ln f_2^{-1}}(u) \overline{\chi^{-s} f_2^{-1}}(u) &= -\sum_{u \leq 0} \widehat{u \ln \bar{g}_2^{-1}}(u) \overline{\chi^{-s} f_2^{-1}}(u) \\
&= i \sum_{u \leq 0} (\widehat{\ln \bar{g}_2^{-1}})'(u) \overline{\chi^{-s} f_2^{-1}}(u) \\
&= i \langle (\ln \bar{g}_2^{-1})' | \chi^{-s} f_2^{-1} \rangle = i \langle \frac{(\bar{g}_2^{-1})'}{\bar{g}_2^{-1}} | \chi^{-s} f_2^{-1} \rangle \\
&= i \langle (\bar{g}_2^{-1})' | \chi^{-s} \bar{g}_2^{-1} \rangle = i \sum_{u \leq 0} (\bar{g}_2^{-1})'(u) \overline{\chi^{-s} \bar{g}_2^{-1}}(u) \\
&= -\sum_{u \leq 0} u \widehat{\bar{g}_2^{-1}}(u) \overline{\chi^s \bar{g}_2^{-1}}(-u) = -\sum_{u \leq -s} u \overline{\beta_{-u}^{(\alpha_2)}} \beta_{-u-s}^{(\alpha_2)}
\end{aligned}$$

Il est maintenant facile de se rendre compte que

$$-\sum_{u \leq -s} u \overline{\beta_{-u}^{(\alpha_2)}} \beta_{-u-s}^{(\alpha_2)} = \sum_{v \geq s} v \overline{\beta_v^{(\alpha_2)}} \beta_{v-s}^{(\alpha_2)} = \sum_{w \geq 0} (w+s) \overline{\beta_{w+s}^{(\alpha_2)}} \beta_w^{(\alpha_2)}$$

et puisque

$$s \sum_{w \geq 0} \overline{\beta_{w+s}^{(\alpha_2)}} \beta_w^{(\alpha_2)} = s \langle \bar{g}_2^{-1} | \chi^s \bar{g}_2^{-1} \rangle = s \langle 1 | \chi^s f_2^{-1} \rangle = s \widehat{f}_2(-s)$$

nous pouvons finalement conclure

$$2 \left(\langle \ln f_2^{-1} | \frac{f_1}{f_2} \rangle_{2,1/2} - \langle \ln f_2^{-1} | \frac{1}{f_2} \rangle_{2,1/2} \widehat{f}_1(0) \right) = 4\Re \left(\sum_{s \geq 1} (\widehat{f}_1)(s) \Sigma(s) \right) + 2 \langle f_1 | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2}. \quad (8)$$

Autrement dit

$$\Re \left(\sum_{s \geq 1} (\widehat{f}_1)(s) \Sigma(s) \right) = \frac{1}{2} \left(\langle \ln f_2^{-1} | \frac{f_1}{f_2} \rangle_{2,1/2} \widehat{f}_1(0) - \langle \ln f_2^{-1} | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} - \langle f_1 | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} \right) \quad (9)$$

Nous pouvons donc conclure que

$$2\Re \left(\sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \tau_2\left(\frac{s}{N}\right) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \right)$$

vaut

$$-2(\alpha_2 + 1) \left(\langle \ln f_2^{-1} | \frac{f_1}{f_2} \rangle_{2,1/2} - \langle \ln f_2^{-1} | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} \widehat{f}_1(0) - \langle f_1 | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} \right).$$

c) $-\frac{1}{2} > \alpha_2 - \alpha_1 > -1$ Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \alpha_2 \left(2 - \frac{s}{N}\right) = \\
& = 2\alpha_2 \left(\sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{s}{N} \right) + \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) - \right. \\
& - \frac{\alpha_2}{N} \sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f}_1(s) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \left. \right) \\
& - \frac{\alpha_2}{N} \left(\sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f}_1(s) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) + \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \left(\sum_{u \geq 0} u \beta_u^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{u+s}^{(\alpha_2)}} \right) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

et les résultats du points précédent s'appliquent immédiatement.

4.2.3 Calcul de $N^{2\alpha_2} \sum_{s=0}^{N'} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} F_1\left(\frac{s}{N}\right) \widehat{f}_1(s) N^{2\alpha_2}$

Ici seul le signe de α_1 est déterminant. (rappelons que α_2 est négatif)

a) $\alpha_1 < 0$

Nous avons alors aisément

$$\begin{aligned}
& N^{2\alpha_2} \sum_{s=0}^{N'} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} F_1\left(\frac{s}{N}\right) \widehat{F}_1(s) = \\
& = N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1} \frac{c_1(1)}{\Gamma^2(\alpha_1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_2} F_1(t) t^{-2\alpha_1 - 1} dt
\end{aligned}$$

b) $\alpha_1 > 0$

Nous utilisons alors la décomposition

$$\begin{aligned}
& N^{2\alpha_2} \sum_{s=0}^{N'} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} F_1\left(\frac{s}{N}\right) \widehat{f}_1(s) = \\
& = N^{2\alpha_2} \sum_{s=0}^{N'} \left(F_1\left(\frac{s}{N}\right) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} - F_1(0) \right) \widehat{f}_1(s) + N^{2\alpha_2} F_1(0) \sum_{s=0}^{N'} \widehat{f}_1(s)
\end{aligned}$$

qui donne l'égalité suivante, en se souvenant que $\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_1(s) = 0$

$$\begin{aligned}
& N^{2\alpha_2} \sum_{s=0}^N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} F_1\left(\frac{s}{N}\right) \widehat{f}_1(s) = \\
& = N^{2\alpha_2 - 2\alpha_1} \frac{c_1(1)}{\Gamma^2(\alpha_1)} \left(\int_0^1 (F_1(t)(1-t)^{2\alpha_2} - F_1(0)) t^{-2\alpha_1 - 1} dt - F_1(0)K \right)
\end{aligned}$$

avec

$$K = \int_1^{+\infty} t^{-2\alpha_1-1} dt + \frac{\widehat{f}(0)}{2}.$$

4.3 Démonstration du théorème dans le cas où $\alpha_2 \in]0, \frac{1}{2}[$

4.3.1 Calcul de $N \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s)$

Rappelons que dans ce cas

$$\text{Tr}(T_N^{-1}(f_2)) = (N+1) \widehat{\left(\frac{1}{f_2}\right)}(0) + N^{2\alpha_2} \frac{2K_{\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} + o(N^{2\alpha_2})$$

avec

$$K_{\alpha_2} = \int_{1/2}^1 \int_0^x t^{2\alpha_2-2} ((1-t)^{2\alpha_2} - 1) - t^{2\alpha_2} (1-t)^{2\alpha_2-2} dt dx + \frac{1}{2\alpha_2(2\alpha_2-1)}.$$

Comme dans le cas négatif trois cas sont à distinguer.

a) $\frac{1}{2} < \alpha_2 - \alpha_1 < 1$.

Nous avons alors immédiatement l'égalité :

$$N \sum_{s=1}^N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) = N^{2\alpha_2-2\alpha_1} C_1 \int_0^1 (1-u)^{\alpha_2+1} u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} du + o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1}).$$

b) $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

Avec les mêmes idées que dans le cas négatif il vient

$$\begin{aligned} N \sum_{s=1}^N \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) &= N \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 \right) + N \sum_{s=1}^N \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \\ &= \text{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right) + N^{2\alpha_2-2\alpha_1} C_1 \left(\int_0^1 ((1-u)^{\alpha_2+1} - 1) u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} du - \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} du \right) \\ &+ o(N^{2\alpha_2-2\alpha_1}). \end{aligned}$$

c) $-\frac{1}{2} < \alpha_2 - \alpha_1 < 0$.

Nous obtenons avec les mêmes justifications que dans le cas où α_2 est négatif

$$\begin{aligned} N \sum_{s=1}^{N'} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) &= N \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} - 1 + (\alpha_2 + 1) \frac{s}{N} \right) + \\ &+ N \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) - (\alpha_2 + 1) \sum_{s=1}^{N'} s \widehat{f}_1(s) \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \end{aligned}$$

D'où $2\Re \left(N \sum_{s=1}^{N'} \widehat{f}_1(s) \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2+1} \widehat{\frac{1}{f_2}}(-s) \right) + \widehat{f}_1(0) \text{Tr} (T_N^{-1}(f_2))$ est égal à

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right) &= (\alpha_2 + 1) \langle f_1 | f_2^{-1} \rangle_{2,1/2} + N^{2\alpha_2} \frac{2K_{\alpha_2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} + \\ &+ N^{2\alpha_2-2\alpha_1} C_1 \left(\int_0^1 ((1-u)\alpha_2 + 1 - 1 + u(\alpha_2 + 1)) u^{2\alpha_1-2\alpha_1-2} du - \right. \\ &\left. - \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_2-2\alpha_1-2} du + (\alpha_2 + 1) \int_1^{+\infty} u^{2\alpha_1-2\alpha_1-1} du \right). \end{aligned}$$

4.3.2 Calcul de $N^{2\alpha_2} \sum_{s=0}^{N'} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2} F_2\left(\frac{s}{N}\right) \widehat{f}_1(s)$

Ce calcul se traite comme dans le cas précédent.

5 Démonstration du théorème (2)

La démonstration nécessite deux lemmes.

Lemme 5 *Avec les hypothèses du théorème (2) il existe une constante strictement positive $t K_0$ indépendante de s telle que pour tout entier s on ait*

$$\left| \text{Tr} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right| \leq K_0 s (2\|f_1\|_\infty \|f_2^{-1}\|_\infty)$$

Lemme 6 *Avec les hypothèses du théorème (2) négatif posons pour tout entier N et $t \in \Delta$*

$$R_{1,N}(t) = \text{Tr} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)) - T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) - \Psi_1(t).$$

Alors pour tout N la fonction $R_{1,N}$ est analytique sur un voisinage de zéro et pour tout entier naturel non nul p on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_{1,N}^{(p)}(0) = 0$.

5.1 Démonstration du lemme (5)

Remarque 8 *Dans la suite de la démonstration nous noterons $\| \cdot \|_1$ la norme $\|A\|_1 = (\text{Tr}({}^tAA))^{1/2}$. Si $\| \cdot \|$ désigne la norme classique des matrices, rappelons les propriétés bien connues*

$$|\text{Tr}A| \leq \|A\|_1, \quad \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|.$$

Remarque 9 *On rappelle également que si ρ est un endomorphisme symétrique réelle dans un espace de dimension n on a, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de ρ : $\|\rho\| = \max\{\lambda_i/1 \leq i \leq n\}$.*

Remarque 10 *Enfin on utilisera que si f est une fonction positive sur $]-\pi, \pi]$ qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points l'opérateur $T_N(f^{-1}) - T_N^{-1}(f)$ est un opérateur positif.*

Nous devons d'abord rappeler les résultats techniques suivants

Lemme 7 *Si h_1 et h_2 sont dans $A(\mathbb{T}, 1/2)$ on a*

$$\|T_N(h_1 h_2) - T_N(h_1)T_N(h_2)\|_1 \leq \|h_1\|_{2,1/2} \|h_2\|_{2,1/2}.$$

et également

Lemme 8 *Il existe une constante $C > 0$ telle que si h_1 et h_2 sont dans $A(\mathbb{T}, 1/2)$ on ait*

$$\|h_1 h_2\|_{2,1/2} \leq C(\|h_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,1/2})(\|h_2\|_\infty + \|h_2\|_{2,1/2}).$$

Ces deux résultats peuvent se trouver dans [32].

Ecrivons

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) &= \operatorname{Tr} \left((T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s - \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right)^s \right) + \\ + \operatorname{Tr} \left(\left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right)^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant

$$\operatorname{Tr}(A^s - B^s) = \operatorname{Tr}((A - B)(A^{s-1} + A^{s-2}B + \dots + B^{s-1}))$$

nous pouvons écrire

$$\left| \operatorname{Tr} \left((T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^s - \left(T_N \frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right| \leq S_1 S_2$$

En posant $S_1 = \|T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2) - T_N \frac{f_1}{f_2}\|_1$ et $S_2 = \left\| \sum_{k=1}^{s-1} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2))^k \left(T_N \frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1-k} \right\|$.

Il vient alors, en utilisant [28], plus le fait que $T_N(f_2^{-1}) - T_N^{-1}(f_2)$ est un opérateur positif et aussi le lemme 7

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \|T_N(f_1)\| \|T_N^{-1}(f_2) - T_N(f_2^{-1})\|_1 + \|T_N(f_1)T_N(f_2^{-1}) - T_N \frac{f_1}{f_2}\|_1 \\ &\leq O(N^{2\alpha_2}) + \|f_1\|_{2,1/2} \|f_2^{-1}\|_{2,1/2}. \end{aligned}$$

D'autre part nous obtenons facilement

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{p=1}^s \|f_1\|_\infty^p \|(T_N(f_2))^{-1}\|_\infty^p \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_\infty^{s-1-p} \leq \sum_{p=1}^s (\|f_1\|_\infty \|f_2^{-1}\|_\infty)^p \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_\infty^{s-1-p} \\ &\leq \sum_{p=1}^s (\|f_1\|_\infty \|f_2^{-1}\|_\infty)^{s-1} \leq (s-1) (\|f_1\|_\infty \|f_2^{-1}\|_\infty)^{s-1} \end{aligned}$$

Etudions maintenant $\operatorname{Tr} \left(\left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right)^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right)$. On a

$$\operatorname{Tr} \left(\left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right)^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right) \leq \left\| \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right)^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right\|_1$$

et on pose

$$G_s = \left\| \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right)^s - T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right\|_1$$

On a

$$\begin{aligned} G_s &\leq \left\| \left(T_N \frac{f_1}{f_2} T_N \frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1} - T_N \frac{f_1}{f_2} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1} \right) \right\|_1 \\ &\quad + \left\| T_N \frac{f_1}{f_2} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1} \right) - \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right\|_1. \end{aligned}$$

Et en utilisant le lemme (7) nous obtenons

$$\left\| T_N \frac{f_1}{f_2} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1} \right) - \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right\|_1 \leq \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{2,1/2} \left\| \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1} \right\|_{2,1/2}$$

ce qui d'après le lemme 8 s'écrit aussi

$$\left\| T_N \frac{f_1}{f_2} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s-1} \right) - \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) \right\|_1 \leq C \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{2,1/2} \left(\left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{2,1/2} + \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_\infty \right)^{s-1}.$$

En posant $M = \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{2,1/2} + \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_\infty$ nous avons l'inégalité

$$G_s \leq M G_{s-1} + C M^s.$$

Ce qui donne finalement

$$G_s \leq C s M^s.$$

D'où le lemme (5).

5.2 Démonstration du lemme (6)

Un développement en série entière permet d'écrire, pour tout $t \in \Delta$,

$$R_{1,N}(t) = \text{Tr} \left(T_N(f_1) (T_N f_{2,t})^{-1} - T_N \left(\frac{f_1}{f_{2,t}} \right) \right) - \Psi_1(t)$$

soit

$$R_{1,N}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} t^s (-1)^s \text{Tr} (T_N(f_1) T_N^{-1}(f_2))^{s+1} - \text{Tr} T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s+1} \right) - \sum_{s=0}^{\infty} t^s \frac{\Psi_1^{(s)}(0)}{s!}$$

Ce qui donne, pour tout entier naturel q (en dérivant)

$$\begin{aligned} \left| R_{1,N}^{(q)}(t) - R_{1,N}^{(q)}(0) \right| &= \sum_{s \geq q+1} (-1)^s s \cdots (s-q+1) t^{s-q} \text{Tr} (T_N(f_1) T_N^{-1}(f_2))^{s+1} - \text{Tr} T_N \left(\left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{s+1} \right) \\ &\quad - \sum_{s \geq q+1} t^{s-q} \frac{\Psi_1^{(s)}(0)}{(s-p)!}. \end{aligned}$$

nous obtenons alors, en utilisant le lemme (5)

$$\left| R_{1,N}^{(q)}(t) - R_{1,N}^{(q)}(0) \right| \leq |t| \left(\sum_{s \geq p+1} |t^{s-p+1}| K_0^s s \cdots (s-q+1) + \sum_{s \geq p+1} |t^{s-p+1}| \frac{|\Psi_1^{(s)}(0)|}{(s-q)!} \right)$$

et

$$\left| R_{1,N}^{(q)}(t) - R_{1,N}^{(q)}(0) \right| \leq |t| K_0^{p+1} \phi_q(t)$$

où la fonction ϕ_q est bornée sur un voisinage de zéro. Ce résultat peut encore s'écrire, si p est comme dans l'énoncé du lemme

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \exists \delta_{\epsilon,q} \quad \text{t.q.} \quad \forall N \quad \left| R_{1,N}^{(q)}(t) - R_{1,N}^{(q)}(0) \right| \leq \epsilon. \quad (10)$$

Soit maintenant t fixé dans $] -\delta_{\epsilon,1}, \delta_{\epsilon,1}[$. Pour tout entier N il existe t_N compris entre 0 et t tel que $R_{1,N}(t) = R_{1,N}(0) + tR'_{1,N}(t_N)$. C'est une conséquence du théorème 1 que la limite des suites $R_N(0)$ et $R_{1,N}(t)$ est nulle. On a donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} tR'_{1,N}(t_N) = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} R'_{1,N}(t_N) = 0$.

Puisque $t_N \in] -\delta_{\epsilon,1}, \delta_{\epsilon,1}[$ l'inégalité (10) permet de conclure $\lim_{N \rightarrow +\infty} R'_{1,N}(t) = 0$.

Supposons maintenant la propriété obtenue pour tout entier q strictement inférieur à p . Soit cette fois t dans $] -\delta_{\epsilon,p}, \delta_{\epsilon,p}[$. Pour tout entier N la formule de Taylor-Lagrange nous donne l'existence d'au moins un réel t_N tel que

$$R_{1,N} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} R_{1,N}^{(j)}(0) + \frac{t^p}{p!} R_{1,N}^{(p)}(t_N).$$

Le théorème 1 et l'hypothèse de récurrence donnent de la même manière que ci-dessus $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_{1,N}^{(p)}(t_N) = 0$ et, avec $t_N \in] -\delta_{\epsilon,p}, \delta_{\epsilon,p}[$ l'inégalité (10) donne $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_{1,N}^{(p)}(0) = 0$.

5.3 Fin de la démonstration du théorème 2

Le théorème s'obtient alors facilement pour $\alpha_2 < 0$ à partir du lemme 6 et en dérivant suffisamment de fois en zéro la formule

$$\text{Tr} (T_N(f_1)T_N^{-1}(f_{2,t})) - \text{Tr} \left(T_N \frac{f_1}{f_{2,t}} \right) = \Psi_1(t) + R_{1,N}(t).$$

5.4 Démonstration du corollaire 1

Posons $\tilde{h}_2 = h_2^{-1}$. Posons

$$T_N h_1 T_N^{-1} \tilde{h}_2 = A \quad T_N (h_1) T_N \frac{1}{h_2} = B.$$

Pour tout entier naturel s nous avons

$$\text{Tr}(A^s - B^s) = \text{Tr} \left((A - B) \left(\sum_{j=0}^{s-1} A^j B^{s-1-j} \right) \right)$$

ce qui permet d'écrire

$$|\mathrm{Tr}(A^s - B^s)| \leq \|M - N\|_1 \left\| \sum_{j=0}^{s-1} A^j B^{s-1-j} \right\|.$$

Or puisque $T_N(\frac{1}{h_2}) - T_N^{-1}\tilde{h}_2$ est un opérateur positif nous avons

$$\|A - B\|_1 \leq \|T_N(h_1)\| \mathrm{Tr} \left(T_N^{-1}\tilde{h}_2 - T_N\left(\frac{1}{\tilde{h}_2}\right) \right) = o(N)$$

d'après [29]. D'autre part, toujours avec les mêmes notations,

$$\|A^j B^{s-1-j}\| \leq \left(\|h_1\|_\infty \left\| \frac{1}{\tilde{h}_2} \right\|_\infty \right)^s$$

D'où finalement

$$\mathrm{Tr} \left(T_N h_1 T_N^{-1} \tilde{h}_2 \right)^s - \mathrm{Tr} \left(T_N h_1 T_N \left(\frac{1}{\tilde{h}_2} \right) \right)^s = o(N)$$

ce qui permet d'obtenir le résultat avec le théorème 2 et en remplaçant \tilde{h}_2 par sa valeur.

6 Démonstration des théorèmes de grandes déviations et de valeurs propres.

6.1 démonstration du lemme 1

Dans la suite nous poserons $\Delta_0 =] - \delta_0^{-1}, \delta_0^{-1}[$ avec $\delta_0 = 2K_0 \left\| f_1 \right\|_\infty \left\| f_2^{-1} \right\|_\infty$ la constante K_0 étant celle qui intervient dans l'énoncé du lemme 7. Dans la suite nous noterons $\lambda_i^{(N)}$, $1 \leq i \leq N$ les valeurs propres de $T_N(\frac{f_1}{f_2})$ et $\mu_i^{(N)}$, $1 \leq i \leq N$ les valeurs propres de $T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2)$. Nous pouvons alors énoncer le lemme

Lemme 9 *Pour tout $u \in \Delta_0$ $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} u^l \mathrm{Tr} \left(T_N f_1 T_N^{-1} f_2 \right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} u^l \mathrm{Tr} T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^l - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} u^l \frac{\Psi_1^{(l)}(0)}{l!} + o(1),$$

Démontrons ce lemme .

Soit $\epsilon > 0$ t grâce au lemme 5 et puisque le rayon de convergence de la fonction Ψ est supérieur à δ_0 , nous savons qu'il existe l_0 tel que $t \in \Delta_0$ et pour tout entier naturel N nous avons les majorations

$$\left| \sum_{l=l_0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} u^l \left(\mathrm{Tr} \left(T_N f_1 T_N^{-1} f_2 \right)^l - \mathrm{Tr} T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^l \right) \right| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \sum_{l=l_0}^{\infty} \frac{1}{l} u^l \frac{\Psi_1^{(l)}(0)}{l!} \leq \epsilon.$$

D'autre part après le théorème 2 il existe un N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ et $s \leq l_0$ on ait,

$$\left| \mathrm{Tr} \left(T_N(f_1)T_N^{-1}(f_2) \right)^s - \mathrm{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^s \right) - (-1)^{s+1} \frac{\Psi_1^{(s)}(0)}{s!} \right| \leq \frac{\epsilon}{l_0}.$$

L'inégalité triangulaire permet alors de conclure.

D'autre part pour tout $u \in \Delta_0$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} u^l \operatorname{Tr} \left(T_N \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^l \right) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-1^l l^l}{u} \sum_{i=1}^N (\lambda_i^{(N)})^l \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{-1^l}{l} u^l (\lambda_i^{(N)})^l = \sum_{i=1}^N \ln(1 + u \lambda_i^{(N)}). \end{aligned}$$

De même nous obtenons

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{-1^l}{l} u^l \operatorname{Tr} \left(T_N(f_1) T_N^{-1}(f_2) \right)^l = \sum_{i=1}^N \ln(1 + \mu_i^{(N)}).$$

Nous avons donc obtenu

$$\forall u \in \Delta_0 \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \frac{\ln(1 + u \lambda_i^{(N)}) - \ln(1 + u \mu_i^{(N)})}{N} = 0 \quad (11)$$

En reprenant [21] pp 62-63 nous pouvons conclure que pour tout fonction continue F dans $\Delta_1 = [-\delta_0, \delta_0]$

$$\forall u \in \Delta_1 \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \frac{F(u \lambda_i^{(N)}) - F(u \mu_i^{(N)})}{N} = 0 \quad (12)$$

Ce qui traduit la convergence faible (ou en loi) de la suite de mesure $\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}}$ vers la mesure image de la mesure de Lebesgue sur le tore par la fonction $\frac{f_1}{f_2}$ (voir toujours [21] p65). Nous pouvons alors appliquer la Proposition 3 pp79 de [3] qui nous permet d'écrire le théorème 4

6.2 Démonstration du théorème 3

Pour tout entier N on suppose les valeurs propres $(\mu_i^{(N)})_{1 \leq i \leq N}$ classées par ordre croissante. L'équation 12 peut encore s'écrire

$$\forall u \in \Delta_1 \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \frac{F(u \mu_i^{(N)})}{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(x)) dx \quad (13)$$

Ce qui implique

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_1^{(N)} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^{(N)} = \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{\infty}.$$

Démontrons cette propriété. Posons $M = \left\| \frac{f_1}{f_2} \right\|_{\infty}$. On sait que les valeurs propres de $T_N(f_1) T_N^{-1}(f_2)$ sont dans $[0, M]$ pour cela on peut voir [3] lemme 10 p 87 ou considérer l'opérateur $M T_N(f_2) - T_N(f_1)$ qui est positif. Il en est de même pour l'opérateur $M - T_N(f_2)^{-1/2} T_N(f_1) T_N(f_2)^{-1/2}$. Ses valeurs propres sont donc positives et on conclut en remarquant que

si $T_N(f_2)^{-1/2} T_N(f_1) T_N(f_2)^{-1/2}(x) = \mu x$ alors $T_N(f_1) T_N(f_2)^{-1}(y) = \mu y$ avec $x = T_N(f_2)^{-1/2}(y)$.

Supposons maintenant que $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^{(N)} \neq M$. Cela signifie qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et un entier N_0 tels qu'il existe une sous-suite ϕ vérifiant ou

$$\forall N \geq N_0 \quad \mu_{\phi(N)}^{(\phi(N))} - M < \epsilon.$$

Une fonction F continue, strictement positive, de support contenu dans $[M - \epsilon, M]$ nous donne alors une contradiction. On démontre de même que $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_1^{(N)} = 0$.

6.3 Démonstration du théorème 4

Nous considérons donc la fonction $NL_N(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(1 - 2\mu_i^N t)$ où les (μ_i^N) , $1 \leq N$ sont les valeurs propres de $A_N = \left(T_N^{1/2} f_1 T_N^{-1} f_2 T_N^{1/2} f_1\right)$ qui sont aussi celles de $T_N f_1 T_N^{-1} f_2$. On écrit, pour $|2t| < \frac{1}{\max |\mu_i^N|} = \frac{1}{\delta}$

$$\begin{aligned} NL_N(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln(1 - 2\mu_i^N t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2t)^p (\mu_i^N)^p}{p} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2t)^p}{p} \text{Tr} (T_N f_1 T_N^{-1} f_2)^p \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le lemme 9 il vient que pour tout $t \in \Delta_0$ nous obtenons finalement

$$NL_N(t) = -\frac{1}{2} \text{Tr} T_N \ln \left(1 - 2t \frac{f_1}{f_2} \right) - \Psi(2t) + o(1).$$

Soit par analyticité pour tout $t \in \Delta$

$$L(t) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left((1-t) - t \frac{f_1}{f_2}(\theta) \right) d\theta,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(NL_N(t) + \frac{N}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(1 - 2t \frac{f_1}{f_2}(\theta) \right) d\theta \right) = \frac{\Psi(2t)}{2}$$

7 Appendice

7.1 Uniformité des restes dans la démonstration du lemme 4

L'outil principal est l'évaluation du reste de la formule d'Euler et Mac-Laurin que nous rappelons ici, pour deux entiers naturels m et n et une fonction f

$$\begin{aligned} f(m) + f(m+1) + \dots + f(n) &= \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} (f(m) + f(n)) \\ &\quad + \sum_{h=1}^r (-1)^{h-1} \frac{B_h}{(2h)!} \left(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(m) \right) + R_r \end{aligned}$$

avec

$$|R_r| \leq \frac{2}{(2\pi)^2} \int_m^n |f^{(r+1)}(t)| dt$$

et où les B_h sont les nombres de Bernouilli.

7.1.1 Calcul de A'_1

De part la nature des termes à considérer le reste de la somme A'_1 est rapidement traitée grâce à la formule d'Euler et Mac-Laurin. Nous remarquons que pour avoir un reste en $o(N^{2\alpha_2-1})$ nous avons besoin de la condition

$$\delta > \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}. \quad (14)$$

7.1.2 Reste du coefficient A'_2

Pour appliquer la formule d'Euler Mac-Laurin au reste de la quantité A'_2 on écrit

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \beta_{l+s}^{(\alpha_2)} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{l}{N} \right) &= \frac{N^{2\alpha_2-1}}{\Gamma^2(\alpha_2)c_2(1)} \int_0^{m_0/N} t^{\alpha_2-1} (t+s)^{\alpha_2-1} \left((1-t)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 t \right) dt \\ - \sum_{l=0}^{m_0} \beta_l^{(\alpha_2)} \beta_{l+s}^{(\alpha_2)} \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{l}{N} \right) &+ \frac{N^{2\alpha_2-1}}{\Gamma^2(\alpha_2)c_2(1)} \int_0^{1-\frac{s'}{N}} t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left((1-t)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 t \right) dt \\ + m_0^{\alpha_2-1} (m_0 + s)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - \frac{m_0}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{m_0}{N} \right) \\ + (N - s')^{\alpha_2-1} ((N - s') + s)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - \frac{N - s'}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 + \alpha_2 \frac{N - s'}{N} \right) &+ R_0 \end{aligned}$$

où R_0 est le reste d'Euler et Mac-Laurin, défini comme ci-dessus. Pour rendre les encadrements des différentes quantités plus aisés on divise l'ensemble des indices s en deux intervalles $[0, N\delta_1]$ et $[N\delta_1, N - N^\delta]$ avec $0 < \delta < 1$ et $0 < \delta_1 < 1$. La quantité N^δ correspond à l'entier n_0 de la démonstration. Nous ferons également intervenir le réel $m_0 = N^{\delta_0}$ ($0 < \delta_1 < 1$) qui soit tel que pour $m \geq m_0$ l'usage de l'asymptotique de $\beta_m^{(\alpha)}$ soit pertinent. Nous avons bien sûr $0 < \delta_0 < 1$, $0 < \delta_1 < 1$, $N^{\delta_0} < N\delta_1 < N - N^\delta$. La quantité δ est commune aux quatre calculs des restes relatifs aux termes A'_2 , A'_3 , A'_4 . Par contre les quantités δ_0 et δ_1 peuvent être choisies indépendamment dans chacun des quatre calculs. Les majorations des différents termes intervenants dans la somme sont classiques et on obtient l'approximation annoncé avec un reste d'ordre $o(N^{2\alpha_2-1})$ uniformément par rapport à s . Pour terminer l'étude du reste coefficient A'_2 il nous faut encore considérer pour $s \in [0, N - N^\delta]$ le reste de l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{N-s'+1}^{+\infty} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} &= \frac{1}{N} \int_{N-s'+1}^{+\infty} \frac{t^{\alpha_2} (t+s)^{\alpha_2-1}}{\Gamma^2(\alpha_2)c_2(1)} dt \\ &+ \frac{1}{2N} \frac{(N-s')^{\alpha_2} (N+s-s')^{\alpha_2-1}}{\Gamma^2(\alpha_2)c_2(1)} + R_2. \end{aligned}$$

Nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \frac{(N-s')^{\alpha_2} (N+s-s')^{\alpha_2-1}}{\Gamma^2(\alpha_2)c_2(1)} &= O\left(N^{\delta_0\alpha_2} N^{\alpha_2-2}\right) = o(N^{2\alpha_2-1}) \text{ si } \alpha_2 < 0 \\ &= O(N^{2\alpha_2-2}) = o(N^{2\alpha_2-1}) \text{ si } \alpha_2 > 0. \end{aligned}$$

et d'autre part

$$|R_2| \leq \frac{1}{N} \int_{N-s'+1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma^2(\alpha_2)c_2(1)} \left(\alpha_2 t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} + (\alpha_2 - 1) t^{\alpha_2} (t+s)^{\alpha_2-2} \right) dt. \quad (15)$$

La dérivée intervenant dans l'équation 15 étant de signe constant nous avons

$$\begin{aligned}
|R_2| &\leq \frac{1}{2N} \frac{(N-s')^{\alpha_2} (N+s-s')^{\alpha_2-1}}{\Gamma_{\alpha_2}^2 c_2(1)} \\
&= O\left(N^{\delta_0 \alpha_2} N^{\alpha_2-2}\right) = o(N^{2\alpha_2-1}) \text{ si } \alpha_2 < 0 \\
&= O(N^{2\alpha_2-2}) = o(N^{2\alpha_2-1}) \text{ si } \alpha_2 > 0.
\end{aligned}$$

7.1.3 Reste du coefficient A'_3

Ici aussi pour faciliter nos calculs nous sommes obligé de diviser l'intervalle auquel appartient le paramètre s en $[0, N\delta_1]$, et en $[N\delta_1, N - N^\delta]$. Nous cherchons tout d'abord à majorer uniformément le reste Q dans la formule

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \beta_{l+s}^{(\alpha_2)} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 \frac{l}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) = \\
&= \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^{1-\frac{s'}{N}} t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_2 t \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) dt + Q.
\end{aligned}$$

Pour ce faire nous utilisons le même type de décomposition que dans le cas du reste de A'_2 avec $m_0 = N^{\delta_0}$ un entier fixé comme ci-dessus. Comme précédemment nous sommes conduits à utiliser la formule d'Euler et Mac-Laurin et nous écrivons

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{m_0^{\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} (m_0 + s)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - \frac{m_0 + s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \frac{\alpha m_0}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) \\
&\quad + \frac{(N-s')^{\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} (N-s'+s)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - \frac{N-s'+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \frac{\alpha N-s'}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n_0} \beta_l^{(\alpha_2)} \beta_{l+s}^{(\alpha_2)} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 \frac{l}{N} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) ds \\
&\quad - \frac{N^{2\alpha_2-1}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_0^{n_0/N} t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 t \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) dt \\
&\quad + R'_0
\end{aligned}$$

avec R'_0 qui correspond au reste de la formule d'Euler et Mac-Laurin.

$$\begin{aligned}
R'_0 &\leq \frac{N^{2\alpha_2-2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)} \int_{m_0/N}^{1-s'/N} \left| \left((\alpha_2 - 1) t^{\alpha_2-2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left(2t + \frac{s}{N}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 t \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) dt \right| \\
&\quad + \int_{m_0/N}^{1-s'/N} \left| \left(\alpha_2 t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(-\alpha_2 \left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} + \alpha_2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) dt \right|
\end{aligned}$$

La majoration de la quantité $|R'_0 - Q$ est classique et nous donne les conditions

$$\delta > \frac{2\alpha_2}{\alpha_2 - 2} \quad \delta > \frac{2\alpha_2}{\alpha_2 - 1} \quad (16)$$

qui sont compatibles entre elles et avec la condition 14. Toutes ces conditions nous donnent une valeur plus précise de N^δ la définition de N^δ . Pour majorer uniformément le reste de la formule d'Euler et Mac-Laurin pour $s \in [N\delta_1, N^\delta]$ on écrit $R'_0 \leq \frac{N^{2\alpha_2-2}}{c_2(1)\Gamma^2(\alpha_2)}(|I_1 + I_2|)$. avec

$$I_1 = \int_{m_0/N}^{1-s'/N} \left| \left((\alpha_2 - 1)t^{\alpha_2-2} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \left(2t + \frac{s}{N}\right) \right) \left(\left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 t \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) \right| dt$$

et

$$I_2 = \int_{m_0/N}^{1-s'/N} \left| \left(\alpha_2 t^{\alpha_2-1} \left(t + \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) \left(-\alpha_2 \left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} + \alpha_2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} \right) \right| dt$$

Si δ_u désigne le coefficient d'indice u du développement en série entière de $(1-v)^{\alpha_2}$ nous pouvons écrire

$$\left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} + \alpha_2 t \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} = \sum_{n \geq 0} \delta_{n+2} t^{n+2} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-n}$$

et d'autre part si $t \in [\frac{m_0}{N}, 1 - \frac{s'}{N}]$ nous avons la majoration

$$I_1 \leq O \left(\int_{m_0/N}^{1-s'/N} \sum_{n \geq 0} \delta_n t^{\alpha_2+n} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-n} dt \right)$$

ou encore

$$I_1 = O \left(\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{2\alpha_2+1} \right) + O \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{m_0}{N}\right)^{\alpha_2+n+1} \left(\frac{N^\delta}{N}\right)^{\alpha_2-n} \right) = o(1)$$

si l'on choisit δ tel que $N^\delta > m_0$. Nous avons de même

$$-\alpha_2 \left(1 - t - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} + \alpha_2 \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-1} = - \left(\sum_{n \geq 0} \delta_{n+1} t^{n+1} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-n-1} \right)$$

ce qui donne

$$I_2 = O \left(\int_{m_0/N}^{1-s'/N} \sum_{n \geq 0} \delta_n t^{\alpha_2+n} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2-n-1} dt \right) = o(1)$$

comme pour I_1 .

7.1.4 Calcul de A'_4

Nous devons utiliser la décomposition

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{N-s'} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) = \\
& = \sum_{l=0}^{m_0} \beta_l^{(\alpha_2)} \overline{\beta_{l+s}^{(\alpha_2)}} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) \\
& - \int_0^{m_0} l^{\alpha_2-1} (l+s)^{\alpha_2-1} \left(\left(1 - \frac{l+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \left(\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) dl \\
& + m_0^{\alpha_2} (m_0+s)^{\alpha_2} \left(\left(1 - \frac{m_0+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \left(\left(1 - \frac{m_0}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) \\
& + (N-s')^{\alpha_2} (N-s'+s)^{\alpha_2} \left(\left(1 - \frac{N-s'+s}{N}\right)^{\alpha_2} - \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{\alpha_2} \right) \left(\left(1 - \frac{N-s'}{N}\right)^{\alpha_2} - 1 \right) \\
& + R
\end{aligned}$$

où R est le reste d'Euler et Mac-Laurin.

Comme d'habitude nous distinguons le cas $s \in [0, N\delta_1]$ et $s \in [N\delta_1, N - N^\delta]$. Nous obtenons la condition

$$\delta > \frac{2\alpha_2}{2\alpha_2 - 1}. \quad (17)$$

Références

- [1] F. Avram. On biliner forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices. *Prob. Theory Related Fields.*, 79 :37–45, 1988.
- [2] P. Barone and A. Piccioni A. Gigli. Optimal importance sampling for some quadratic forms of A.R.M.Aprocess. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 41 :1834–1844, 1995.
- [3] B. Bercu and A. Rouault F. Gamboa. Large deviations for quadratic forms of stationary gaussian process. *Stochastic process and their applications*, 71 :75–90, 1997.
- [4] B. Bercu and M.Lavielle F. Gamboa. Sharp large deviations for gaussian quadratic forms with applications. *ESAIM : Probability and Statistics*, 4 :1–24, 2000.
- [5] A. Böttcher and B. Silbermann. *Introduction to large Toeplitz truncated matrices*. Springer Verlag, 1999.
- [6] M. Bouaziz. Testing Gaussian sequences and asymptotic inversion of Toeplitz operators. *Probab. Math. Statist*, 14 :207–222, 1993.
- [7] J. Coursol and D. Dacunha-Castelle. Sur la formule de chernoff pour deux processus gaussiens stationnaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 288(1) :169–770, 1979.
- [8] J. Coursol and D. Dacunha-Castelle. Remarques sur l'approximation de la vraisemblance d'un processus gaussien stationnaire. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 27(1) :155–160, 1982.
- [9] D. Dacunha-Castelle. Remarque sur l'étude asymptotique du rapport de vraisemblance de deux processus gaussiens stationnaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 288(1) :225–228, 1979.

- [10] R. Dalhaus. Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Annals of Statistics*, 17 :1749–1766, 1989.
- [11] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*. Jones and Bartlett publishers, 1993.
- [12] R. Fox and M.S.Taqqu. Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependents stationary Gaussian time series. *The Annals of Statistics*, 14(2) :517–532, 1986.
- [13] R. Fox and M.S.Taqqu. Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Probability Theory*, 74 :213–240, 1987.
- [14] M.S. Ginovyan. Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals on spectral density of stationary gaussian process. *Theory Probab. Appl*, 33 :315–322, 1988.
- [15] M.S. Ginovyan and A.A. Sahakyan. On the central limit theorem for Toeplitz quadratic forms of stationnary sequence. *Theory Probab. and Appl.*, 49 :612–628, 2004.
- [16] M.S. Ginovyan and A.A. Sahakyan. Limits theorems for Toeplitz quadratic functionals of continuous-time stationnary process. *Probab. Theory Relat. Fields*, 138 :551–579, 2007.
- [17] M.S. Ginovyan and A.A. Sahakyan. Error bounds for approximations of traces of products of truncated Toeplitz operators. *Journal of Contemporary Mathematical Anal.*, 43 :195–205, 2008.
- [18] M.S. Ginovyan and A.A. Sahakyan. A note on approximations of traces of products of truncated Toeplitz matrices. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 44(4) :262–269, 2009.
- [19] L. Giraitis and D. Surgalis. A central limit theorem theorem for quadratic forms in strongly dependent linear varaibles and its applications to asymptotical normalityof Whittle’s estimate. *Probab. Th. Rel. Fields*, 86 :87–104, 1990.
- [20] I. Gohberg and A. A. Semencul. The inversion of finite Toeplitz matrices and their continual analogues. *Matem. Issled.*, 7 :201–233, 1972.
- [21] U. Grenander and G. Szegö. *Toeplitz forms and their applications*. Chelsea, New York, 2nd ed. edition, 1984.
- [22] I. Ibrahimov. On estimation of the spectral function of a stationary gaussian process. *Theory Probab and Appl.*, 8 :391–430, 1963.
- [23] A. Inoue. Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process. *J. Anal. Mat*, 81 :65–109, 2000.
- [24] A. Inoue. Asymptotics for the partial autocorrelation function of a fractionnal ARIMA process. *Ann. Appl. Prob*, 12 :1471–1491, 2002.
- [25] H.J. Landau. Maximum entropy and the moment problem. *Bulletin (New Series) of the american mathematical society*, 16(1) :47–77, 1987.
- [26] O. Lieberman and A. Philips. On the central limit theorem for Toeplitz quadratic forms of stationnary sequences. *Theory Probab. and Appl.*, 49 :612–629, 2004.
- [27] P. Rambour and A. Seghier. Formulas for inverses of Toeplitz matrices with polynomially singular symbols. *Integr. equ. oper. theory*, 99 :83–114, 2004.
- [28] P. Rambour and A. Seghier. Théorèmes de trace de type Szegö dans le cas singulier. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 129 :149–174, 2005.

- [29] P. Rambour and A. Seghier. Inverse asymptotique des matrices de Toeplitz de symbole $(1 - \cos \theta)^\alpha f_1$, $\frac{-1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, et noyaux intégraux. *Bull. des Sci math.*, 134 :155–188, 2008.
- [30] M. Rosenblatt. Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz forms. *Journal of Math. and Mech.*, 11 :941–950, 1962.
- [31] T. Sato and M. Taniguchi Y. Kakizawa. Large deviation results for statistics of short and long-memory Gaussian process. *Australian and New Zeland J. Statist*, 40(1) :17–29, 1998.
- [32] A. Seghier. Thèse de doctorat d'état. Université de Paris sud, 1988.
- [33] G. Szegö. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, colloquium publication, Providence, Rhodes Island, 3rd edition, 1967.
- [34] M. Taniguchi. On the second order asymptotic efficiency of estimators of Gaussian ARMA processes. *Annals of Statistics*, 11 :157–169, 1983.
- [35] M. Taniguchi and Y. Kakizawa. *Asymptotic theory of statistical inference for time series*. Academic Press, New York, 2000.
- [36] A. Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1957.