



**HAL**  
open science

## Le h-principe de Misha Gromov

Michèle Audin, Pierre Pansu

► **To cite this version:**

Michèle Audin, Pierre Pansu. Le h-principe de Misha Gromov. Images des Mathématiques, 2009, <http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>. hal-00598756

**HAL Id: hal-00598756**

**<https://hal.science/hal-00598756v1>**

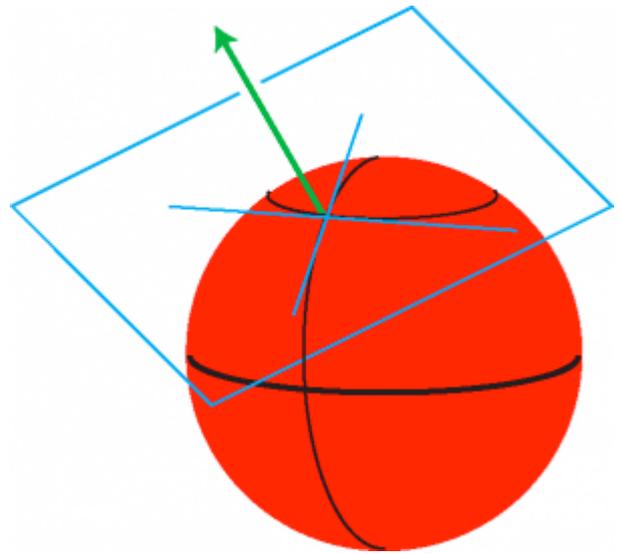
Submitted on 7 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le h-principe de Misha Gromov

Le 25 juin 2009, par **Michèle Audin** et **Pierre Pansu**



**D**ANS cet article, nous essayons d'illustrer et d'expliquer une des belles idées de Gromov, le **h-principe**. Le « h » est la première lettre [1] du mot *homotopie*, une version précise de ce que nous appellerons ici un peu vaguement « déformation ». Cet article s'inscrit dans la série de ceux qu'Images des Mathématiques a déjà consacrés à **Misha Gromov**, et fait suite en particulier au **billet sur les barbuis** de l'un des auteurs.

Il commence bleu (comme l'élastique), continue rouge (comme le ballon), devient noir sur le h-principe, et il est franchement hors-piste dans les notes de bas de page de cette partie.

---

## Enroulements plans

---

Pour présenter l'idée du h-principe, nous commençons par l'exemple le plus simple auquel il s'applique, celui des courbes dans le plan.

Prenez un élastique dans le tiroir, posez-le sur votre bureau. Il prend la forme de la lettre O. Étranglez-le pour lui donner la forme du chiffre 0, puis d'un haricot. Les deux bosses du haricot peuvent même se rejoindre et se traverser (comme sur la figure 1).

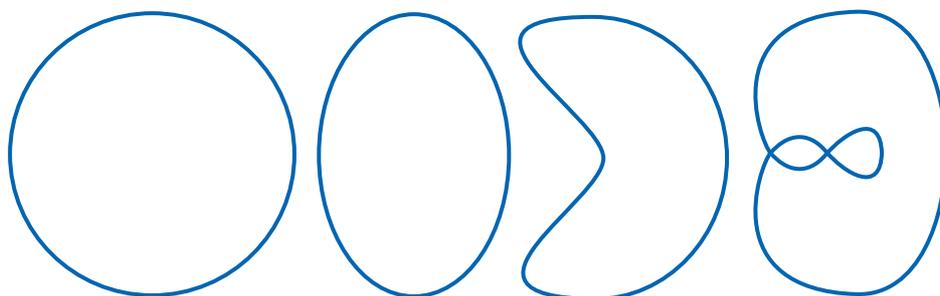


Figure 1

---

Cette déformation possède trois caractéristiques :

1. elle se déroule sans que l'élastique quitte la surface du bureau, en termes mathématiques, dans un plan (nous admettons que l'élastique est infiniment mince) ;

2. elle se déroule de façon continue (il n'y a pas besoin de sauter instantanément d'une position à une autre, on pourrait faire un film dont ces images sont extraites) ;

3. à chaque instant, c'est-à-dire pour chacune des images du film, une fourmi pourrait parcourir l'élastique sans avoir à s'arrêter.

En termes mathématiques, cette dernière propriété est l'existence d'un *vecteur tangent*, en chaque point de la *courbe*, qui n'est jamais nul ; on parle de **courbe immergée** (et d'*immersion*, voir ci-dessous).

Posez maintenant l'élastique en lui donnant la forme du chiffre 8. Essayez de le ramener à la forme du chiffre 0 en préservant les trois propriétés précédentes. N'oubliez pas que vous avez le droit de faire se traverser des brins. Que penser de la méthode illustrée par la figure 2, où on passe par une sorte de chiffre 3 ?



Figure 2

---

Elle ne convient pas, car une fourmi qui circulerait le long d'un chiffre 3 devrait s'arrêter au passage pointu, pour repartir en marche arrière.

Nous allons montrer maintenant qu'en réalité, il n'est pas possible de passer de la position de l'élastique en forme de huit à celle en forme de O ou de zéro : aucune méthode ne peut permettre de le faire.

Fixons un sens de parcours sur l'élastique, à qui nous donnons maintenant le nom mathématique de *courbe*, et même de *courbe orientée* (par ce sens de parcours). Le sens de parcours est matérialisé par la grosse flèche verte sur les figures 3 et 4 ci-dessous.

S'il est possible d'imaginer une fourmi qui fait le tour de cette courbe dans le sens fixé sans jamais s'arrêter, on dit que la courbe est **immergée**. A un instant donné, la fourmi aurait une position, un point de la courbe, et une vitesse, que l'on peut considérer comme un *vecteur tangent* à la courbe, comme les vecteurs colorés sur la figure. On peut obtenir de la fourmi que sa vitesse soit constante, autrement dit, que ce vecteur vitesse soit de longueur constante, disons 1 (en choisissant bien les unités).

Si l'on oublie l'endroit où se trouve la fourmi, et que l'on ne considère que son vecteur vitesse, lorsqu'elle avance sur la courbe et que l'on place l'origine de ce vecteur au centre d'un cercle de rayon 1, l'extrémité de ce vecteur se meut sur la circonférence. Ainsi, sur la figure 3, on a représenté :

- dans la colonne de gauche, deux courbes que parcourt la fourmi (un O et un 8),

- dans la colonne de droite, le trajet des vecteurs vitesses correspondants sur le cercle de rayon 1.

Examinons ces deux exemples :

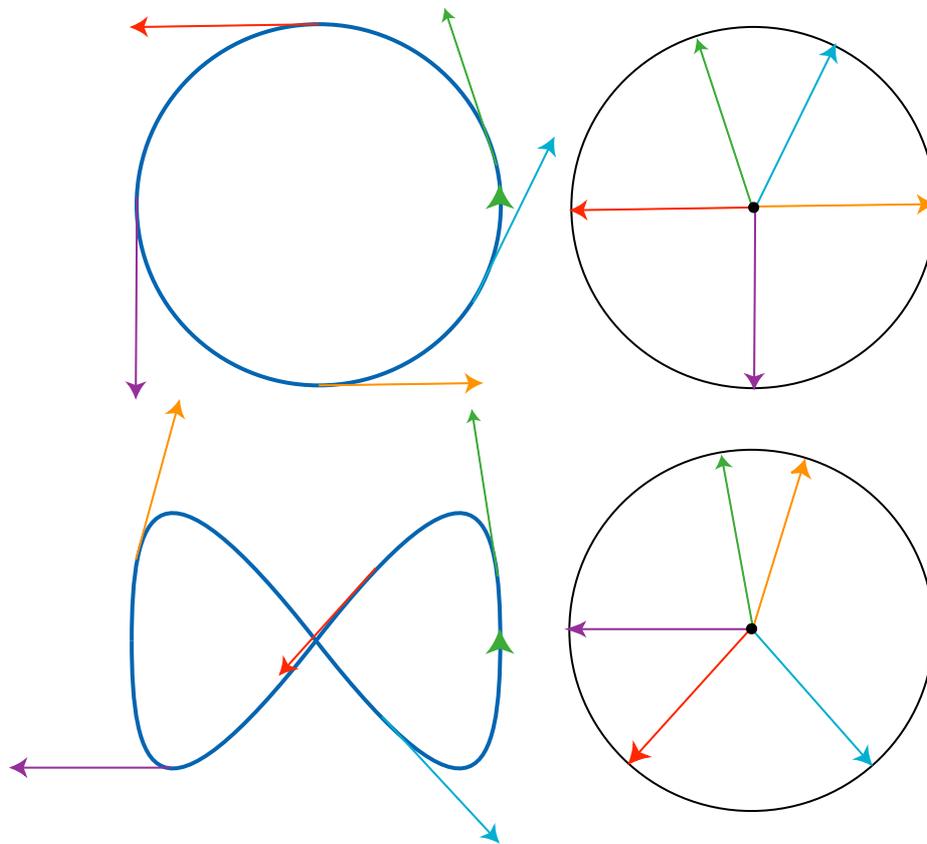


Figure 3

- Dans le cas de la courbe en forme de O, le vecteur tangent fait un tour complet du cercle, sans jamais revenir en arrière.
- Dans le cas de celle en forme de chiffre 8, il parcourt un peu plus d'un quart de cercle, puis revient à son point de départ, parcourt un peu plus d'un quart de cercle dans l'autre sens, puis revient, il ne parvient pas à faire un tour complet (il n'y a aucune flèche verticale pointant vers le bas, la partie inférieure du cercle entre les flèches turquoise et rouge n'est pas atteinte).

On peut « compter les tours » que fait le vecteur tangent pendant que la fourmi parcourt (une fois) la courbe. Ce nombre est 1 dans le cas de la courbe en forme de O, c'est 0 dans le cas de celle en forme de chiffre 8. On l'appelle le *nombre d'enroulement* de la courbe immergée. Il peut prendre des valeurs positives et négatives, comme le montre la figure 4.

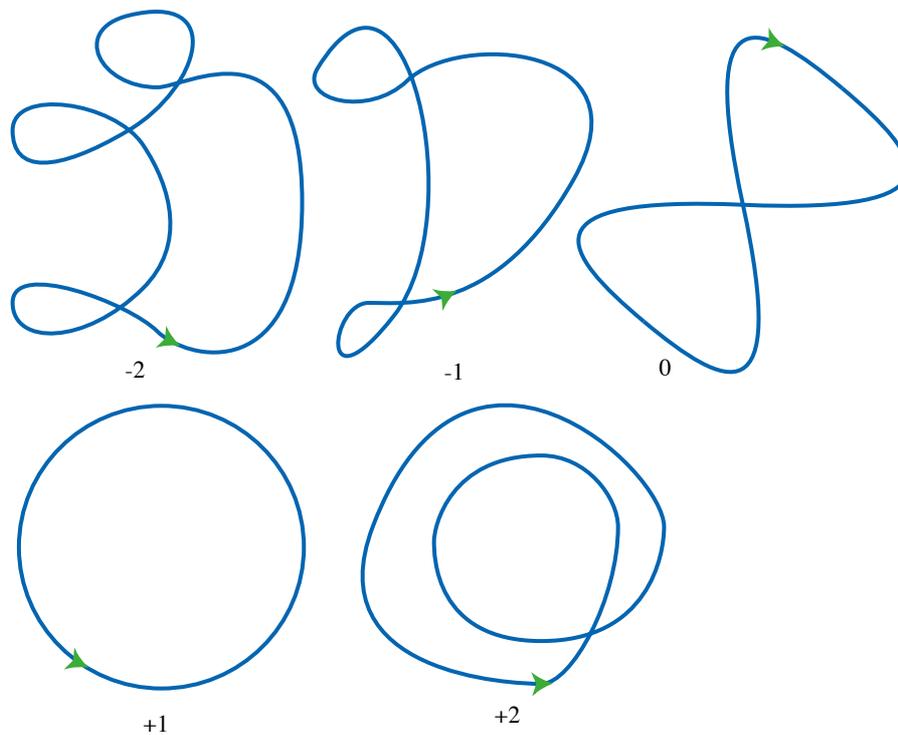


Figure 4

Si on déforme continûment la courbe comme expliqué plus haut, ce nombre, qui ne peut pas « sauter » au cours de la déformation, reste donc constant.

Voilà pourquoi on ne peut pas déformer continûment la courbe en forme de chiffre 8 en celle en forme de chiffre 0 (ou de lettre O) parmi les courbes immergées. La méthode proposée sur la figure 2 ne contredit pas cette assertion : le vecteur tangent de la courbe en forme de chiffre 3 saute de  $180^\circ$  au passage pointu. Bien entendu, on a pu « tordre » l'élastique avant de le poser sur le bureau en forme de 8, mais cette déformation a eu lieu dans l'espace, sans rester à la surface du bureau.

On peut se demander, inversement, si tout itinéraire le long du cercle de rayon 1 provient d'une courbe immergée ? La réponse est oui, et ce n'est pas un théorème très difficile [2]. De même, une déformation continue d'itinéraires sur le cercle provient d'une déformation continue de courbes immergées. Donc déformer des élastiques revient à déformer des itinéraires sur le cercle. On démontre que deux itinéraires sur le cercle se déforment l'un dans l'autre si et seulement si ils effectuent le même nombre de tours. Toutes ces propriétés sont résumées dans le théorème suivant de Hassler Whitney (1937) :

*Deux courbes immergées dans le plan peuvent être déformées continûment l'une dans l'autre si et seulement si elles ont le même nombre d'enroulement [3].*

Avant de passer en dimension plus grande, c'est-à-dire aux surfaces dans l'espace, remplaçons les courbes planes immergées par les **immersions du cercle dans le plan** : il suffit de penser à l'élastique que nous avons sorti du tiroir du bureau au début de l'article comme à une sorte de « cercle » abstrait, et à la façon dont nous l'avons déposé sur le plan de travail comme à une *application* de ce cercle dans le plan. Si le résultat est une courbe immergée, on dira que l'application est une *immersion*.

---

## Immersion dans l'espace

---

Changeons donc de dimension. Nous remplaçons le « cercle » abstrait (l'élastique dans le tiroir) par une sphère (un ballon rouge). Imaginons que nous sortions cette sphère d'une espèce de tiroir d'un autre monde, de grande dimension, comme notre tiroir était de plus grande dimension que le plan du bureau. Imaginons que nous *appliquions* (le sens du verbe 'appliquer' est expliqué au dernier paragraphe de la partie « Enroulements plans ») cette sphère abstraite dans l'espace de dimension 3 (c'est-à-dire l'espace ordinaire). L'objet obtenu peut avoir des formes variées, la sphère habituelle, comme le ballon rouge de la figure 6, ou comme les objets rouges, puis rouges et bleus du film ci-dessous.

Pour définir une *courbe immergée*, puis une **immersion** dans le plan, nous avons demandé qu'il existe, en chaque point, un vecteur tangent. Nous aurons besoin d'un analogue dans cette dimension. En attendant, pensons que l'image de notre sphère idéale est une surface sans arête, sans coin. Comme notre élastique appliqué en forme de chiffre 8, elle peut se recouper, comme le fait la « sphère » rouge et bleue du film.

Le film, réalisé pour cet article par **Jos Leys** [4], montre à la fois des exemples de sphères immergées dans l'espace et une déformation entre ces immersions. Le ballon rouge a deux « côtés », disons intérieur et extérieur, l'extérieur est rouge, l'intérieur est bleu.



Un théorème, démontré par **Stephen Smale** en 1958, affirme la chose étonnante suivante [5] :

**On peut déformer continûment n'importe quelle immersion de la sphère en n'importe quelle autre.**

Par exemple, on peut déformer le ballon face-rouge-à-l'extérieur en le ballon face-bleue-à-l'extérieur. C'est ce qu'on appelle un « retournement de la sphère ». Attention, ce n'est pas facile ! Par exemple, ce que le film semble suggérer :

- pousser le pôle nord et vers le bas et le pôle sud vers le haut

- les faire se croiser
- continuer en rétrécissant le « bourrelet » rouge jusqu'à ce que tout le bleu soit à l'extérieur

ne marche pas : on passerait par une « sphère » avec une arête pointue (en rouge sur la figure 5).

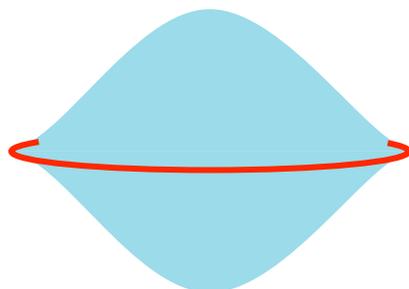


Figure 5

---

Et ça ne marche pas non plus si on n'autorise pas la sphère à se recouper : on ne peut pas « retourner » un ballon de baudruche sans le crever !

Même s'il semble intuitivement déraisonnable, le théorème de Smale est vrai. Smale l'avait démontré de façon abstraite, non constructive, mais de nombreux mathématiciens ont eu à cœur de donner une démonstration constructive, c'est-à-dire de construire une déformation de la sphère rouge à la sphère bleue, un *retournement de la sphère* [6].

---

### Pourquoi la sphère et pas le cercle ?

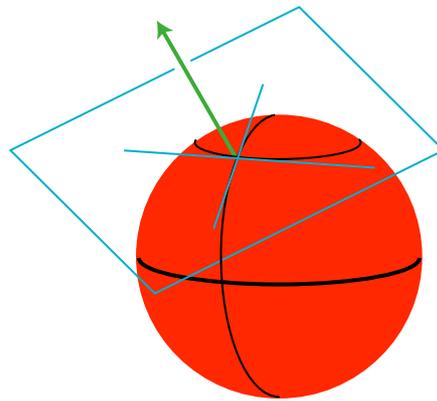
---

Repensons à notre élastique : l'élastique en forme de O que la fourmi parcourt dans un sens a un nombre d'enroulement  $+1$ , parcouru dans l'autre sens, il a un nombre d'enroulement  $-1$ . Le théorème de Whitney que nous avons évoqué dans la première partie de cet article interdit donc de déformer l'un en l'autre : *il est impossible de retourner un cercle dans le plan*.

Pourquoi donc est-ce possible pour la sphère dans l'espace ?

Nous avons besoin maintenant d'un analogue du « nombre d'enroulement ». Il nous faut donc un analogue du vecteur vitesse-de-la-fourmi. Le fait que notre sphère n'ait ni arête ni coin se dit, en termes mathématiques plus précis, comme le fait qu'elle a, en chaque point, un plan tangent. Nous ne définissons pas cette notion ici, laissant aux lecteurs s'en faire une idée en contemplant les figures.

---



**Figure 6: Plan tangent et vecteur normal**

---

Plus simple que le plan tangent, il y a, en chaque point, un *vecteur normal*, c'est-à-dire un vecteur perpendiculaire au plan tangent, qui pointe du côté rouge (par exemple) et que nous choisissons de longueur 1 (voir la figure 6).

Si, à chaque point de notre sphère immergée, nous associons ce vecteur normal, nous avons défini une application de notre sphère immergée dans, non plus le cercle de rayon 1, mais la sphère standard de rayon 1.

Il y a un analogue, dans cette dimension, du nombre de tours, que l'on appelle *degré*. On pourrait appeler ce degré le *nombre d'enroulement d'une immersion de la sphère*.

Mais ce nombre est inutile pour étudier les immersions de la sphère dans l'espace, puisqu'il vaut toujours 1. C'est pourquoi il n'y a pas de nombre d'enroulement dans l'énoncé de Smale. C'est cet accident, spécifique à la sphère et à l'espace de dimension 3, qui rend possible le retournement.

---

## Le h-principe ? Un h-principe ?

---

Dans les deux situations, celle des courbes planes et celle des sphères immergées dans l'espace, nous avons considéré des déformations, ce qui est plutôt compliqué, puisqu'il y a des tas de façon de déformer ces objets. Nous avons alors remarqué que l'on pouvait associer à chaque objet (courbe ou sphère immergée) un nombre entier *qui ne change pas pendant la déformation*, ce qui est beaucoup plus simple.

Ensuite, nous avons démontré (plus exactement ici, cité) un théorème qui affirme que le nombre entier en question détermine complètement l'immersion à déformation près.

Il n'y avait « plus qu'à » déterminer les nombres entiers possibles : tous les nombres entiers dans le cas des courbes, seulement le nombre 1 pour les immersions de la sphère.

Ce sont deux exemples d'application du h-principe.

On aura remarqué que les théorèmes de Whitney (1937) et Smale (1958) cités ici sont très antérieurs aux travaux de Gromov : « le » h-principe est un principe général qui unifie ces théorèmes ainsi que beaucoup d'autres.

Mais de quoi s'agit-il ? La situation générale est celle d'un système d'équations ou d'inéquations

portant sur les dérivées, ce qu'on appelle des **relations (équations, inéquations) différentielles**. Par exemple, dire qu'une application du cercle dans le plan est une *immersion*, c'est dire que la vitesse ne s'annule pas (la fourmi peut parcourir l'élastique sans jamais s'arrêter) ; la vitesse est une *dérivée*, cette condition est donc une « inéquation différentielle ».

De même que nous avons associé à une immersion son nombre d'enroulement, Gromov associe, à un tel système, son *reflet homotopique*. Ce n'est pas toujours aussi simple qu'un nombre entier, mais c'est toujours plus simple que le problème initial !

Nous avons ainsi deux problèmes :

- celui de comprendre les immersions et les déformations possibles
- et celui de comprendre leurs reflets homotopiques.

Gromov dit (et nous disons à sa suite) que **le système différentiel considéré satisfait au h-principe si les deux problèmes sont équivalents**.

Par exemple, les théorèmes de Whitney (sur les courbes planes) et de Smale (sur la sphère) sont des conséquences de l'assertion :

*Les immersions satisfont au h-principe.*

Mais, bien sûr, chaque nouvelle manifestation du h-principe est un théorème nouveau. Gromov lui-même a établi le h-principe pour de nombreux systèmes différentiels. Bien d'autres l'ont suivi.

Souvent, la démonstration se déroule comme suit :

- on montre qu'au voisinage d'un point, il y a toujours des solutions, et qu'on peut les déformer de façon assez libre ;
- pour construire des solutions qui s'étendent à tout l'espace, on utilise une démarche courante en théorie de l'homotopie, qui consiste à partir d'une solution définie au voisinage d'un point, l'étendre en une solution définie au voisinage d'un arc, puis d'un triangle, etc. [7].

Gromov a aussi donné un cadre général dans lequel le h-principe s'applique. Il a en effet remarqué que la méthode s'applique aux systèmes d'équations différentielles qui sont *sous-déterminés*, c'est-à-dire comportent davantage d'inconnues que d'équations. Elle est donc d'une portée et d'une généralité inattendues.

La deuxième étape de ce schéma de démonstration est due, elle aussi, à Gromov. Il s'est inspiré de la démonstration du théorème sur les immersions, due à Hirsch et Smale : ce théorème généralisait ceux sur les courbes immergées et sur la sphère que nous avons décrits ci-dessus, c'est celui que nous avons énoncé en disant que les immersions satisfont au h-principe.

La démarche que nous avons indiquée n'est que l'une des façons connues d'établir le h-principe. Le livre *Partial Differential Relations* [8], en contient bien d'autres.

---

## Un autre exemple, celui des immersions isométriques

---

Définissons maintenant ce qu'est une immersion *isométrique* de la sphère. C'est une immersion qui

préserve les longueurs au sens suivant : si une courbe est dessinée sur la sphère, on peut mesurer sa longueur. Une fois la sphère immergée, on peut mesurer l'image de la courbe. Si les longueurs des courbes images sont les mêmes que celles des courbes sur la sphère de référence, on dit que l'immersion est *isométrique* [9].

Les immersions isométriques satisfont elles aussi, au h-principe.

Bien sûr, nos sphères rondes (rouge ou bleue) sont des images d'immersions isométriques. Leurs images par n'importe quelle transformation de l'espace qui préserve les longueurs (rotations, symétries, translations) le sont aussi. Y en a-t-il d'autres ?

Un théorème ancien [10] affirme que, près de la sphère standard, toutes les immersions isométriques sont des transformations isométriques de l'espace tout entier : il n'y en a pas d'autre !

Cela explique qu'il soit impossible de déformer une coquille sphérique (c'est vrai aussi pour une coquille d'œuf) de façon isométrique. Même si elle est mince et souple, on ne la déformera pas sans la briser.

Mais... si on s'autorise à passer dans la quatrième ou la cinquième dimension, pour y immerger notre brave sphère *abstraite* (toujours la même, toujours de dimension 2), ce n'est plus vrai : on peut déformer continûment la coquille. Les petites sphères, considérées dans les grandes dimension, sont moins rigides. Quant au h-principe, on peut énoncer son applicabilité sous la forme d'un théorème de **Nash** (1954) et Gromov (1972) :

**La classification des immersions isométriques des sphères (de dimension 2) dans un espace euclidien de dimension au moins 5 est équivalente à son reflet homotopique.**

Ce théorème reste vrai si on y remplace la sphère par n'importe quelle surface [11].

Bien d'autres situations géométriques satisfont au h-principe. Hélas, certaines n'y satisfont pas ! Par exemple, en géométrie symplectique, les immersions lagrangiennes y satisfont mais pas les *plongements* (qui sont des immersions dans lesquelles on n'autorise pas les objets à se recouper) lagrangiens. Ce serait le sujet d'un autre article.

---

**P.S. :**

*Un chaleureux merci à tous les relecteurs pour leur aide.*

## Notes

[▲1] L'abréviation *h-principe* appartient à une sorte de **novlangue** fort appréciée de beaucoup de mathématiciens (et qui fourmille de **paroles excluantes**) : anglais *homotopy principle* (traduction en français : principe d'homotopie), paresse anglo-saxonne *h-principle*, paresse francophone *h-principe*.

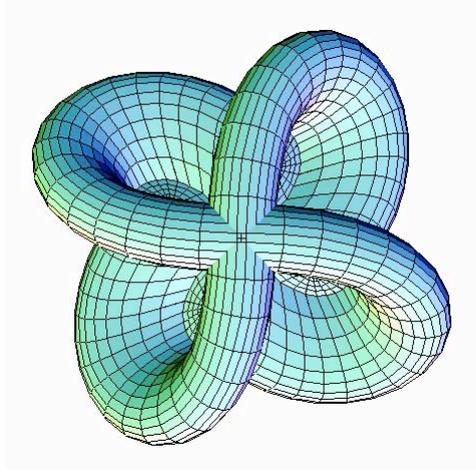
[▲2] C'est la direction de la vitesse, c'est-à-dire une dérivée, que l'on voit sur le cercle. Il suffit en quelque sorte de l'intégrer et de s'assurer que l'itinéraire plan obtenu revient à son point de départ.

[▲3] **Whitney, Hassler** ; *On regular closed curves in the plane*. *Compositio Math.* 4 (1937), 276—284.

[▲4] que nous remercions...

[▲5] **Stephen Smale**, *A classification of immersions of the two-sphere*. Trans. Amer. Math. Soc. 90 1958 281—290.

[▲6]



On peut trouver sur internet des références à des **films**, et même les **logiciels** qui produisent ces films, montrant des retournements. Il s'agit bien sûr d'images de synthèse. On voit ici une image, copiée **là**, d'une immersion de la sphère, la *surface de Morin* qui apparaît « au milieu » d'une de ces déformations.

[▲7] La première étape est banale pour les systèmes d'inéquations. En revanche, pour les systèmes d'équations différentielles, elle est déjà remarquable (bien des systèmes différentiels n'ont aucune solution, même locale). Voici une façon de procéder. On voit l'équation étudiée comme une perturbation d'une équation linéaire. On suppose que l'équation linéaire possède une solution obtenue en

fonction des données (coefficients, second membre) par une formule différentielle. L'idée en remonte à Nash, qui a remarqué que le système des immersions isométriques possédait cette propriété, et a su en déduire l'existence de solutions. La méthode de Nash, perfectionnée ultérieurement par Jürgen Moser, a eu une grande influence sur la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires (voir le livre *Serge Alinhac et Patrick Gérard, Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris ; Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 1991.*

[▲8] **Gromov, Mikhael** *Partial differential relations. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (3), 9. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[▲9] On aura reconnu la racine, « même longueur ».

[▲10] Si ancien que l'on peut le faire remonter à Cauchy, au dix-neuvième siècle.

[▲11] ... avec n'importe quelle géométrie, ce qui fait que le théorème donne, en particulier, le fait, évident dans le cas de la sphère mais pas en général, qu'il **existe** des immersions isométriques.

---

Pour citer cet article : **Michèle Audin** et **Pierre Pansu**, « **Le h-principe de Misha Gromov** » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>