



**HAL**  
open science

## Géométrie, mesurer la terre, mesurer la Terre ?

Michèle Audin

► **To cite this version:**

Michèle Audin. Géométrie, mesurer la terre, mesurer la Terre?. Images des Mathématiques, 2009, <http://images.math.cnrs.fr/Geometrie-mesurer-la-terre-mesurer.html>. hal-00598747

**HAL Id: hal-00598747**

**<https://hal.science/hal-00598747>**

Submitted on 7 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Géométrie, mesurer la terre, mesurer la Terre?

*Une conférence dans une librairie.*

Le 27 mars 2009, par **Michèle Audin**  
Professeur à l'Université de Strasbourg ([page](#)



[web](#))

*Le 16 février dernier, j'ai donné un cours dans une librairie. Les auditeurs étaient des étudiants de L3 de mathématiques, plus un public inconnu que nous avons baptisé, par avance, « le reste du monde ». Comme je ne savais pas qui serait ce « reste du monde », j'avais préparé un exposé très accessible. Comme ceci se passait dans une librairie, j'avais choisi d'utiliser de nombreux livres, de genres assez différents.*

*Pour conserver un peu de l'atmosphère exceptionnelle de ce « cours », certaines des figures qui illustrent cet article sont des photographies prises en direct. Un article « live », comme on dit en français.*

**G**ÉOMÉTRIE. Mesure de la Terre, ai-je toujours pensé, moi qui ne suis pas helléniste, « **la science de la mesure du terrain** », ai-je lu en préparant le cours.

---

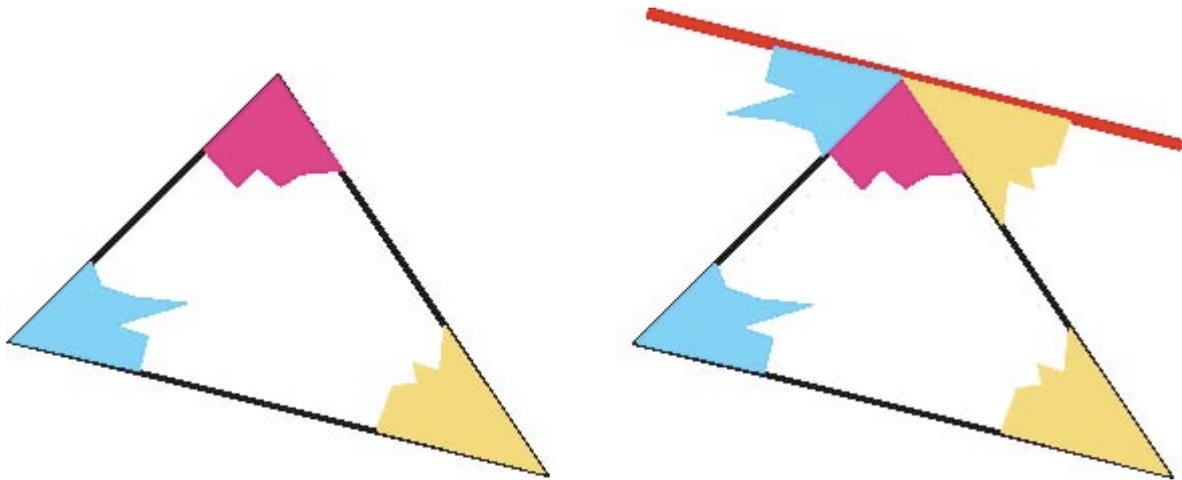
## Mesure du terrain

---

Une image de géomètres grecs, vieux messieurs barbus, vêtus de probité candide et de lin blanc [1], mesurant des champs, rectangulaires, triangulaires, circulaires... Sur la mesure des champs circulaires, il y aurait beaucoup à dire, mais pour aujourd'hui, nous choisissons de nous limiter aux triangles. Il y a d'ailleurs, aussi, de quoi faire !

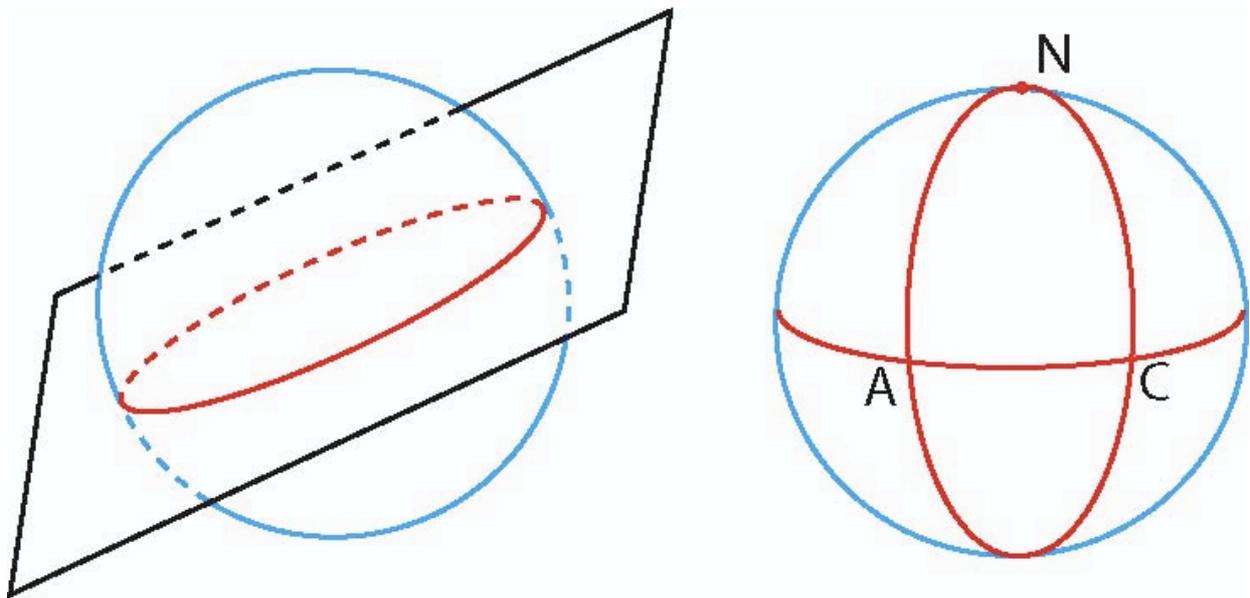
La somme des angles...

d'un triangle vaut 180 degrés. Nous l'avons tous appris au collège. C'est un résultat de la géométrie grecque (euclidienne !) et d'ailleurs une conséquence du célèbre « postulat des parallèles » d'Euclide : on trace la parallèle à un côté passant par le troisième sommet (la droite rouge). Comme les angles de même couleur sont égaux, la somme des trois angles est un angle plat.



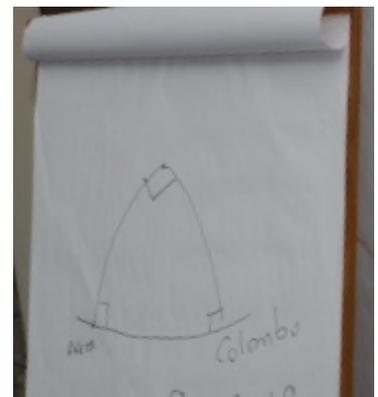
## Mais... la Terre est ronde !

Une expression du fait que c'est une sphère. Mézalor, mézalor, keskun triangle ? Un triangle a trois côtés. il nous suffit donc de comprendre ce qu'est un côté, une « ligne droite » sur une sphère : tout simplement le plus court chemin d'un point à un autre, donc ce que l'on appelle un « grand cercle », comme les méridiens d'un globe terrestre, ou l'équateur.



*Un grand cercle est l'intersection d'un plan passant par le centre avec la sphère*

Un exemple de triangle, sur la Terre, est représenté sur la figure. Les sommets sont le pôle nord (le point *N*), et les villes d'**Accra** (au Ghana) et de **Colombo** (au Sri Lanka) (les points *A* et *C*). Les côtés sont, approximativement, un morceau de l'équateur et deux méridiens, les angles sur l'équateur sont des angles droits (tous les méridiens sont perpendiculaires à l'équateur), l'angle au pôle nord est lui aussi à peu près de 90 degrés (c'est la différence entre les longitudes de Colombo et d'Accra, la longitude réapparaîtra plus bas).



Et voilà, catastrophe ! un triangle avec trois angles droits...

Sur une sphère, la somme des angles d'un triangle est, en effet, toujours, plus grande que 180 degrés [2]. Ce qui a des conséquences pratiques terribles, notamment le fait que l'on ne puisse pas dessiner de carte de la Terre, ni même d'une partie de la Terre, sur laquelle à la fois les distances et les angles sont justes [3].

Heureusement, dans les petits triangles, la somme des angles est très proche de 180 degrés [4]. C'est ce qui permet d'utiliser la géométrie euclidienne pour mesurer de la terre... mais aussi pour mesurer la Terre !

---

## Comment mesure-t-on la Terre ?

---

Précisons la question : comment mesure-t-on la Terre, en restant sur la Terre [5] ? On peut bien sûr utiliser des satellites artificiels et c'est ce que l'on fait aujourd'hui, mais reportons-nous, disons, au XVIIIème siècle. En ce temps-là, l'espèce humaine et ses instruments de mesure étaient collés à la surface de la planète. Et pourtant, ils mesuraient.

Admettons donc (mais c'est provisoire) que la Terre ait la forme d'une sphère. Supposons qu'on sache mesurer la longueur d'un méridien ; c'est un cercle dont le rayon est celui de la Terre ; si l'on connaît sa longueur, on connaît aussi son rayon [6] Nous souhaitons donc, ou du moins nos collègues anciens souhaitaient, connaître la longueur du méridien.

Il n'est évidemment pas question d'utiliser une chaîne d'arpenteur, ou une règle, que l'on promènerait du pôle nord au pôle sud, trop d'erreurs, il faudrait tenir compte du relief et, comment être sûr que l'on va vraiment droit ?

Notons qu'il est, par contre, très facile de mesurer des angles, en hauteur, disons, l'angle entre la droite qui joint le sommet du Panthéon à Belle Assise et celle qui joint le même sommet à Brie. Au XVIIIème siècle on sait même faire ça avec énormément de précision et avec un instrument nommé **théodolite**. Alors, voilà la ruse de la triangulation du méridien [7].

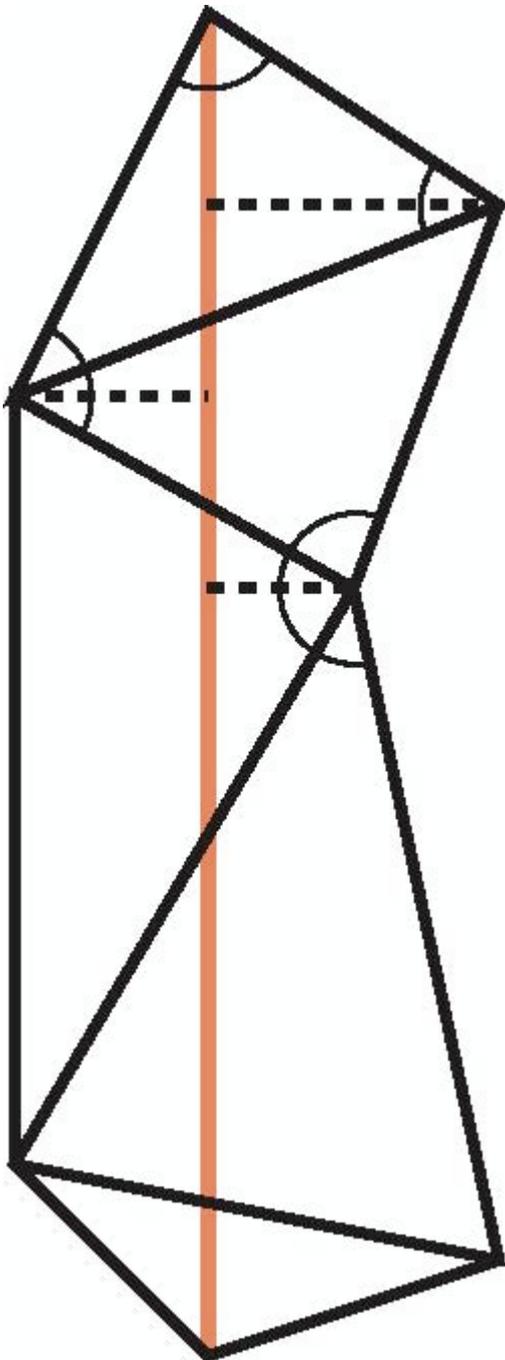
Un petit préliminaire, revenons aux triangles plans. Les plus anciens d'entre nous ont appris, dans leur enfance, les « **cas d'égalité des triangles** », des expressions assez poétiques mais pas toujours très claires, comme

Deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux

(je cite de mémoire). En termes moins poétiques mais plus simples : si vous connaissez un côté d'un triangle et les



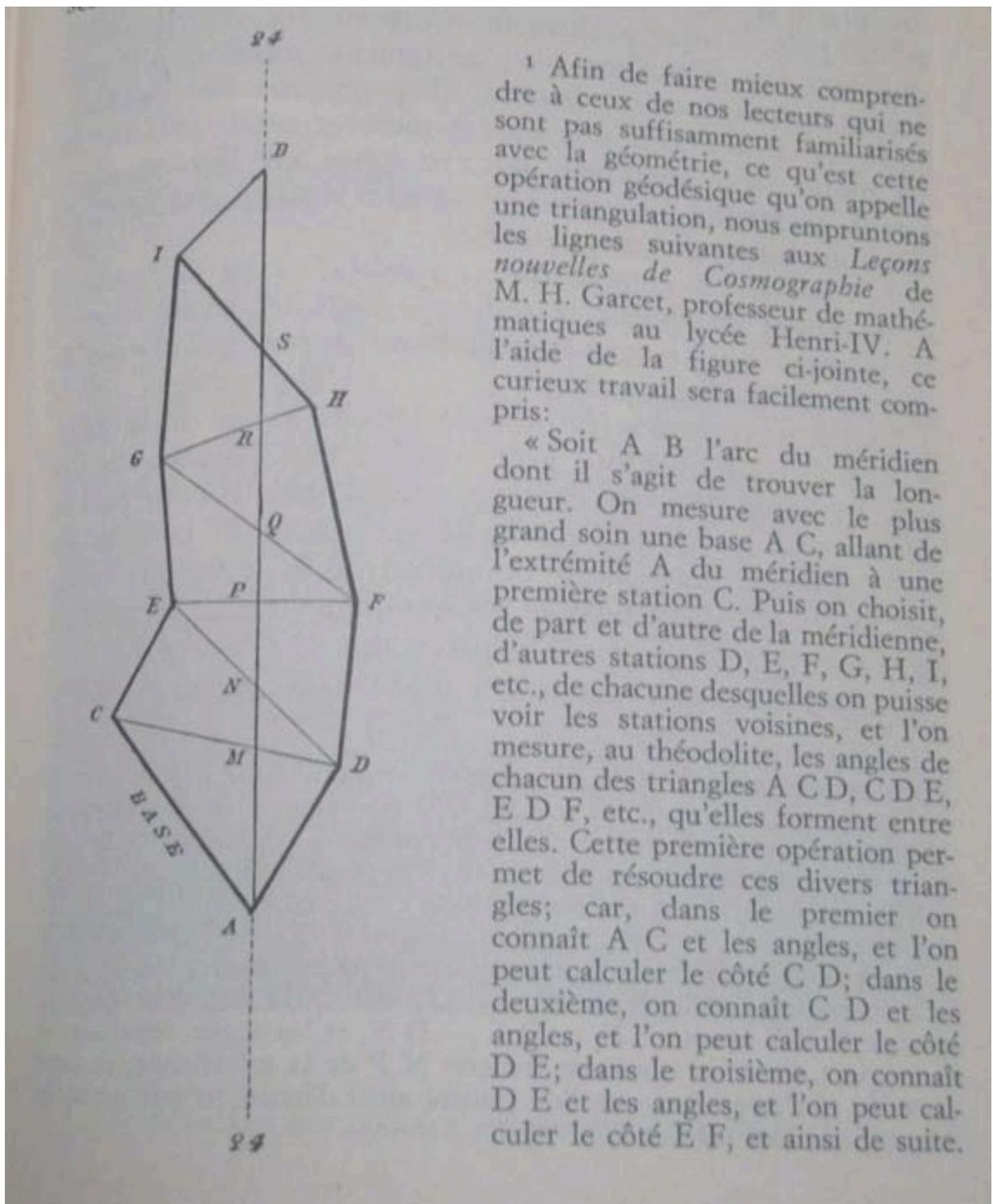
deux angles aux extrémités de ce côté, vous connaissez ce triangle. Ce qui est bien clair si l'on veut bien regarder la figure. On dessine le côté et les deux angles connus (en rouge), puis on prolonge (les deux droites noires) et on obtient le triangle. Si vous connaissez tout le triangle, vous connaissez en particulier les longueurs de ses trois côtés. Bien sûr, ça veut dire qu'il y a des formules pour ça [8], des formules dont nous nous contenterons pour cet article d'avoir la certitude théorique qu'elles existent.



Conclusion : eh bien voici comment on mesure un arc de méridien (en rouge sur la figure). On mesure un seul côté d'un seul triangle (on appelle ce côté la *base*), tous les angles, et on peut calculer toutes les longueurs souhaitées [9].

Dans la librairie, j'ai lu un passage d'un livre écrit par un historien, Ken Alder [10] et consacré à la mesure du méridien de Paris, de Dunkerque à Barcelone, par des équipes dirigées par les astronomes Delambre et Méchain, en 1792 et après.

Je montre ici un passage du roman *Aventures de trois Russes et de trois Anglais dans l'Afrique australe*, de Jules Verne [11] :



<sup>1</sup> Afin de faire mieux comprendre à ceux de nos lecteurs qui ne sont pas suffisamment familiarisés avec la géométrie, ce qu'est cette opération géodésique qu'on appelle une triangulation, nous empruntons les lignes suivantes aux *Leçons nouvelles de Cosmographie* de M. H. Garcet, professeur de mathématiques au lycée Henri-IV. A l'aide de la figure ci-jointe, ce curieux travail sera facilement compris:

« Soit A B l'arc du méridien dont il s'agit de trouver la longueur. On mesure avec le plus grand soin une base A C, allant de l'extrémité A du méridien à une première station C. Puis on choisit, de part et d'autre de la méridienne, d'autres stations D, E, F, G, H, I, etc., de chacune desquelles on puisse voir les stations voisines, et l'on mesure, au théodolite, les angles de chacun des triangles A C D, C D E, E D F, etc., qu'elles forment entre elles. Cette première opération permet de résoudre ces divers triangles; car, dans le premier on connaît A C et les angles, et l'on peut calculer le côté C D; dans le deuxième, on connaît C D et les angles, et l'on peut calculer le côté D E; dans le troisième, on connaît D E et les angles, et l'on peut calculer le côté E F, et ainsi de suite.

Mesurer une base se fait avec des règles et pas mal de précautions, de préférence dans un endroit très plat. Le désert du Kalahari était sans doute bien adapté. Dans le cas, revenons à eux, de la mesure du méridien de Paris par **Delambre** et **Méchain**, la base a été choisie dans une partie de plaine de la Brie, de Belle-Assise à Brie.

Remarquez que l'on utilise de la géométrie plane, avec des triangles dont la somme des angles vaut 180 degrés (ce sont des petits triangles), pour mesurer un arc de grand cercle.

Ce qui pose plusieurs questions

- Pourquoi Delambre et Méchain mesureraient-ils le méridien de Paris ? Pourquoi mesure-t-on un

méridien ?

- Suffit-il de mesurer un arc (un morceau) du méridien, ici de Dunkerque à Barcelone, pour connaître sa longueur ?
- Quel méridien mesure-t-on ?
- Et d'ailleurs, qu'est-ce que le méridien de Paris (question posée par un auditeur pendant le cours) ?

(et sans doute d'autres aussi [12], mais je vais me contenter de celles-ci).

---

## Pourquoi Delambre et Méchain mesuraient-ils ?

---

Je ne discuterai pas ici la question : pourquoi les trois Russes et les trois Anglais de Jules Verne mesurent le méridien ? Lisez le livre.

Delambre et Méchain, deux astronomes, sommités et savants respectés, avaient été envoyés, par le pouvoir politique [13] de 1792, mesurer le méridien de façon assez précise pour pouvoir en déduire un mètre-étalon appelé à devenir l'unité de longueur universelle. Je renvoie au livre cité [14] pour des informations passionnantes sur les tenants et aboutissants de cette volonté, ainsi que sur les aventures vécues par nos astronomes : des inconnus, armés de théodolites et arpentant, c'est le cas de le dire, les campagnes françaises pendant cette période agitée, ont forcément vécu des expériences que ceux et celles qui voient les scientifiques comme de calmes et paisibles fonctionnaires ont du mal à imaginer. Barcelone leur réservait, elle aussi, quelques surprises.

---

## Qu'est-ce que le méridien de Paris ? Quel méridien mesure-t-on ?

---

Une réponse possible est : l'avenue de l'Observatoire.



Pour définir le « méridien de Paris », il suffisait de choisir un point dans Paris, et ainsi l'unique méridien passant par ce point. Ce point choisi, le 21 juin 1667, on a construit l'Observatoire de Paris. Le **méridien** est (était) matérialisé dans Paris par différents repères, du parc Montsouris à la Porte Montmartre. L'avenue de l'Observatoire, avec sa belle perspective, est un morceau de ce méridien.

Si la Terre est ronde, tous ses méridiens ont la même longueur et on peut mesurer n'importe lequel d'entre eux. Les astronomes qui mesurent le méridien pour définir le mètre, une unité à vocation aussi universelle que les idéaux de la Révolution française, mesurent, bien sûr, le méridien de Paris : ce qu'ils mesurent, c'est le monde... pas 9 degrés d'un arc de méridien !

Une parenthèse s'impose ici sur le choix (géopolitique) d'un méridien.

---

## Latitude, et surtout longitude

---

La Terre tourne, c'est un fait — sur lequel nous reviendrons. Autour d'un axe. Et cet axe « perce » la Terre en deux points, les deux pôles, qui nous sont donc « donnés par la nature », ainsi par conséquent que l'équateur. La *latitude* repère notre position, entre l'équateur et le pôle le plus proche, 0 degré à Accra, 48 degrés 35 minutes et 4 secondes nord à Strasbourg, 90 degrés sud au pôle sud. On détermine sa latitude à l'aide de la hauteur du soleil et d'un **sexant**.

La *longitude*, c'est une autre affaire ! Essayez donc de repérer un point sur l'équateur par exemple, sans avoir choisi une origine. Appelons ici à la rescousse *Tintin*, dans **le Trésor de Rackham le Rouge**, dont il est malheureusement exclu de recopier ici les **phylactères** les plus savoureux

- ceux, page 21, où le capitaine Hadock annonce

— Voyez. Nous sommes au point indiqué par les parchemins. Nous devrions bientôt apercevoir l'île près de laquelle a coulé la Licorne

après quoi, tout le monde scrute, personne ne voit rien, en tout cas, personne ne voit d'île,

- et ceux, page 23,

— Capitaine, nous sommes des ânes !...  
— Que voulez-vous dire ?  
— Voyons, capitaine, le méridien par rapport auquel vous avez compté les degrés de longitude, c'est naturellement le méridien de Greenwich ?...  
— Evidemment, ce n'est pas celui de Tombouctou !  
— Attendez ! Le chevalier de Hadoque, lui, a certainement compté en prenant comme origine le méridien de Paris, qui est situé à plus de deux degrés à l'est du méridien de Greenwich !..  
— Mille sabords !

Jules Verne (encore lui !) avait pourtant, par avance, averti Tintin et ses amis, dans *l'Île mystérieuse* (au chapitre 14), la longitude, c'est relatif à un méridien. Concrètement, pour déterminer sa longitude, il faut une montre :

Lorsqu'il pensa que le moment était arrivé, Cyrus Smith s'agenouilla sur le sable, et, au moyen de petits jalons de bois qu'il fichait dans le sable, il commença à pointer les décroissances successives de l'ombre de la baguette. [...]

Le reporter tenait son chronomètre à la main, prêt à relever l'heure qu'il marquerait, quand l'ombre serait à son plus court.

Les naufragés, qui n'avaient plus rien à leur arrivée sur l'île [15], avaient heureusement une montre, nous a dit Jules Verne au chapitre 6 :

Ils n'avaient rien, sauf les habits qu'ils portaient au moment de la catastrophe. Il faut cependant mentionner un carnet et une montre que Gédéon Spilett avait conservée [...]

Montre soigneusement gardée à l'heure (de Washington) et grâce à laquelle ils ont su quelle heure il était à Washington lorsqu'il était midi sur leur île. Vingt-quatre heures pour 360 degrés... ils ont ainsi pu déterminer leur différence de longitude avec Washington, puis leur longitude... par rapport au

méridien de Paris, qui était encore le méridien de référence en 1874 lorsque le livre est paru et qui l'est resté jusqu'en 1884 où celui de Greenwich l'a détrôné (un choix géopolitique, à un moment où la France était politiquement affaiblie).

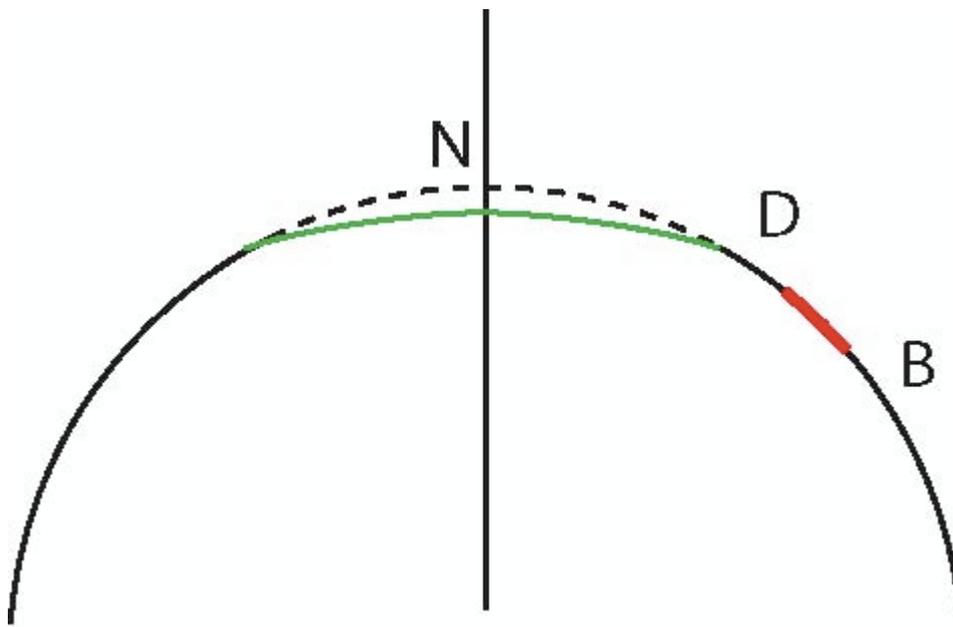
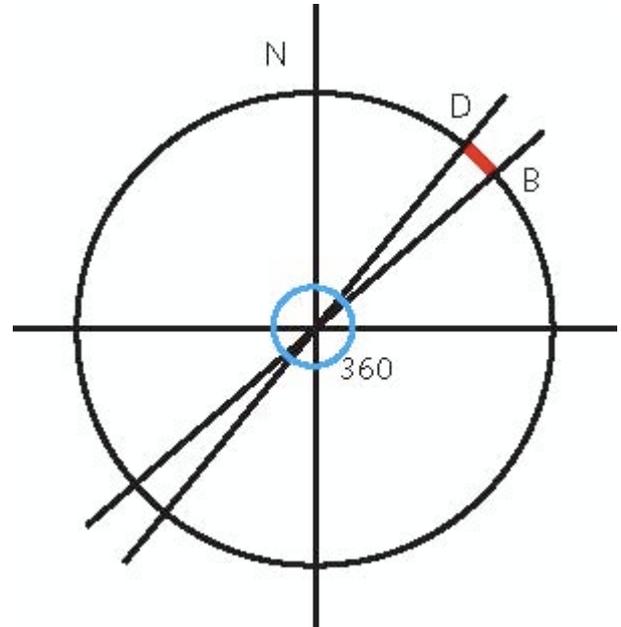
---

### Suffit-il de mesurer un arc de méridien, ou : la Terre est-elle vraiment ronde ?

---

Admettons, encore une fois, que la Terre est ronde. Si vous connaissez la longueur  $L$  de l'arc de Dunkerque à Barcelone (en rouge) et la différence de latitude entre ces deux villes (c'est-à-dire 9 degrés 39 minutes et 19 secondes [16]), vous connaissez la longueur du méridien tout entier (le cercle noir), qui est  $\ell = L \times 360 / 9^{\circ} 39' 19''$ .

Et pourtant, déjà dans les années 1730, l'Académie des sciences avait envoyé deux équipes mesurer des arcs de méridien, l'une au Pérou, près de l'équateur, l'autre en Laponie, près du pôle nord. Les « astronomes » **Maupertuis** et **Clairaut** avaient passé plus d'un an dans le grand nord, à trianguler et mesurer.



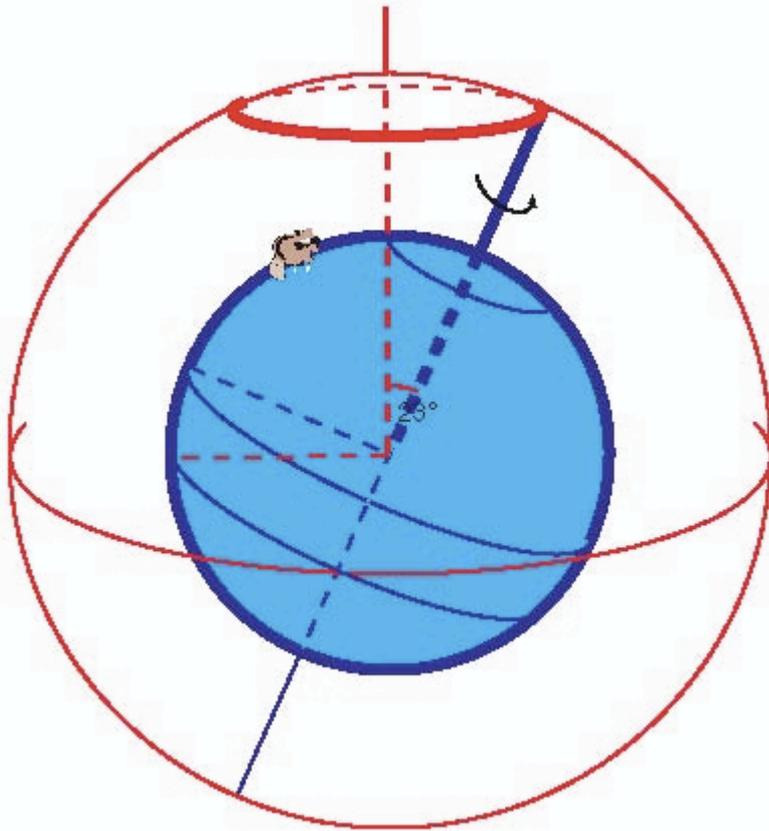
Parce que Maupertuis pensait que la Terre était aplatie au pôle. L'arc de méridien devait donc être plus court près du pôle (l'arc vert est plus court que l'arc de cercle pointillé). Maupertuis défendait la théorie de la gravitation de **Newton**, dont l'aplatissement de la Terre aux pôles était une conséquence. Rappelons que les *Principia* de Newton sont parus en 1686.

D'autres scientifiques pensaient, eux, que la Terre était allongée aux pôles [17]. Il s'agissait de trancher. Et l'expédition en Laponie avait confirmé, à la fois la platitude de la Terre et la pertinence de la théorie newtonnienne.

---

**Elle est ronde, elle est aplatie, et elle tourne.**

---



Aplatie, oui, mais de combien ? De  $1/178$  ème, calcule Maupertuis après l'expédition de Laponie — ce qui veut dire que le « rayon » de la Terre au pôle est  $(1-1/178)$  fois le « rayon » de la terre à l'équateur. Et ceci est assez précis pour expliquer, numériquement, un phénomène lié à la rotation de la Terre, la *nutation*.

Il est temps de revenir à ce fait : la Terre tourne. Autour de son axe. Mais le mouvement est plus compliqué qu'on ne l'imagine. Parce que l'axe de la Terre lui-même tourne. Il décrit un cône, comme indiqué sur la figure. C'est ce que l'on appelle la *précession des équinoxes*, un phénomène lent mais bien réel, qui ferait, si l'on n'y prenait



---

## Dans la librairie...

---

Pendant la conférence « **hors les murs** » dans la **librairie**, j'ai expliqué précession et nutation en faisant tourner une toupie : la rotation de la toupie autour de son axe s'accompagne elle aussi d'une précession et d'une nutation de cet axe. J'ai aussi évoqué le fait que les méridiens n'ont pas vraiment tous la même longueur, comme si la Terre était un peu aplatie, pas seulement aux pôles — au XIX<sup>ème</sup> siècle, on parlait d'un ellipsoïde (encore une approximation, la forme de la Terre [21] est bien plus irrégulière que ça). J'ai mentionné le général russe Schubert [22] cité par **Weierstrass** dans un article sur les géodésiques d'un ellipsoïde en 1861 [23], et qui donne les mesures suivantes pour les trois axes de la Terre, considérée comme un ellipsoïde :

Grösseste Axe der Erde 3 272 671,5 Toisen

Mittlere 3 272 303,2 Toisen

Kleinste 3 261 467,8 Toisen [24]



---

## ... et la recherche ? et aujourd'hui ?

---

... et je n'ai pas su résister au plaisir de mentionner **Sophie Kowalevski**, petite-fille du général Schubert et élève de Weierstrass, qui avait si bien compris que mouvement d'une toupie et géodésiques de l'ellipsoïde étaient deux « systèmes » de la même nature.

Car c'est ainsi, ai-je expliqué dans la librairie, que fonctionne la recherche en mathématiques, c'est ainsi qu'elle fonctionnait déjà au XIX<sup>ème</sup> siècle : on découvre des ressemblances, des similitudes entre des phénomènes apparemment très différents, on en fait une nouvelle théorie, un peu plus générale, qui permet de résoudre de nouveaux problèmes.

Et aujourd'hui ? Car après tout, nous sommes sur un site du **CNRS** et j'ai mission de parler ici de la recherche contemporaine. Eh bien, certains mathématiciens travaillent encore à comprendre ce qui fait la spécificité de systèmes tels que le mouvement d'une toupie, les géodésiques de l'ellipsoïde, qui ont un comportement très régulier et que l'on appelle des *systèmes intégrables*, ou au contraire s'intéressent à des systèmes au comportement plus chaotiques (comme on en trouve beaucoup sur ce site).

Pour en revenir à un objet évoqué ci-dessus à propos de la mesure de la Terre, le satellite, mentionnons par exemple que **l'on a pu montrer** assez récemment (au XXI<sup>ème</sup> siècle) que le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité n'était *pas* complètement intégrable. Mais ceci nous entraînerait trop loin (par exemple, sur une vraie **piste noire** bien verglacée).

---

J'avais apporté des objets :

- un globe terrestre
- une toupie,

des livres que j'ai ouverts, feuilletés, dont j'ai lu des passages :

- *Géométrie*
- *Mesurer le monde. 1792-1799 : l'incroyable histoire de l'invention du mètre*, de Ken Alder
- *Le trésor de Rackham le Rouge*, d'Hergé
- *L'île mystérieuse*, de Jules Verne
- *Précession et nutation*, un volume des Œuvres complètes de d'Alembert
- *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*,

et une bonne partie du public [25].

---

## Notes

[▲1] On trouvera les candides vieux messieurs barbus ainsi vêtus, notablement, dans le toujours excellent *Géométricon* (Jean-Pierre Petit). Le **zeugme**, lui, est tiré de Booz endormi, dans *la Légende des siècles* (Victor Hugo).

[▲2] Remarquons aussi que, sur la sphère, il n'y a pas de « parallèles » : deux grands cercles se coupent toujours, par exemple, deux méridiens se coupent aux deux pôles.

[▲3] La **projection stéréographique** est un exemple de « carte » dans laquelle les angles sont bons mais les distances dramatiquement mauvaises, ce qui ne l'empêche pas de donner de **très jolies images**.

[▲4] Une version précise de cette assertion est la *formule de Girard*, qui dit que la somme des angles d'un triangle sphérique est 180 degrés plus l'aire du triangle (sur une sphère de rayon 1). Plus l'aire est petite, plus la somme des angles est proche de 180 degrés. Voir, par exemple, le chapitre *ad hoc* de *Géométrie*.

[▲5] ... qui est, quelquefois, si jolie, comme disait Prévert (Pater Noster, dans *Paroles*).

[▲6] Si le rayon s'appelle  $R$ , la longueur du méridien est  $2\pi R$ . Si la longueur du méridien s'appelle  $\ell$ , le rayon est  $\ell/2\pi$  ...

[▲7] Un exemple de triangulation qui a déjà fait l'objet du début d'un **article** (éponyme) de Julien Marché sur ce site.

[▲8] Des formules « trigonométriques », encore un mot grec, bien adapté puisque *trigonométrie* signifie mesure des triangles ; des raffinements du théorème de Pythagore.

[▲9] La figure schématisée de la triangulation du méridien que l'on voit ici est extraite de *Souvenirs*

*sur Sofia Kovalevskaya.*

[▲10] *Mesurer le monde.*

[▲11] Ce livre, consacré à la mesure d'un arc de méridien dans le **Kalahari**, au sud de l'Afrique, semble malheureusement indisponible aujourd'hui. La photographie est celle de mon exemplaire, que je n'ai pas voulu détruire pour le scanner.

[▲12] Par exemple, comment sait-on que deux points sont sur le même méridien ?

[▲13] En ce temps-là, le pouvoir politique respectait ses scientifiques (un commentaire irrésistible)...

[▲14] Parfois irritant, toujours passionnant.

[▲15] Ce serait un bon endroit pour signaler, dans une nouvelle digression, la belle application du théorème de Thalès grâce à laquelle nos héros ont calculé la hauteur d'une falaise, quelques pages auparavant, mais ceci a déjà été fait dans un **billet** publié sur ce site.

[▲16] Différence entre  $51^{\circ} 02' 18''$  (la latitude de Dunkerque) et  $41^{\circ} 22' 59''$  (celle de Barcelone), si je ne me suis pas trompée.

[▲17] Ceci n'est pas sans évoquer la guerre des gros-boutiens et des petits-boutiens, dans *les Voyages de Gulliver*, paru en 1721...

[▲18] Dans cet article, dès qu'on a accepté quelque chose, il faut le modifier...

[▲19] **Œuvres de d'Alembert**, introduction au volume 7, Précession et nutation, page xxix.

[▲20] Œuvres de d'Alembert, volume 7, Précession et nutation, page 24.

[▲21] Dire que la Terre a la forme d'un **géoïde** est, bien entendu, commettre un **pléonasme**.

[▲22] Dans *Essai d'une détermination de la véritable figure de la Terre*, publié à Saint-Pétersbourg en 1859.

[▲23] Une très belle figure, sur ce site, montre une **Terre ellipsoïdale**.

[▲24] Il s'agit des grand, moyen et petit axes de la Terre... et il s'agit bien de *Toises*. L'unité de mesure universelle, le mètre, n'était pas encore adoptée en Russie, semble-t-il.

[▲25] Merci à tous les étudiants qui m'ont accompagnée... et à **Christine Huyghe** pour l'idée, les questions mathématiques, la logistique et les photos de la conférence.

---

Pour citer cet article : **Michèle Audin**, « Géométrie, mesurer la terre, mesurer la Terre? » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Geometrie-mesurer-la-terre-mesurer.html>