HAL
open science

# La prévention peut-elle éradiquer le SIDA ?

Jacques Istas

## To cite this version:

Jacques Istas. La prévention peut-elle éradiquer le SIDA ?. Images des Mathématiques, 2009, http://images.math.cnrs.fr/La-prevention-peut-elle-eradiquer.html. hal-00598520

**HAL Id: hal-00598520**

**https://hal.science/hal-00598520v1**

Submitted on 6 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La prévention peut-elle éradiquer le SIDA?

Le 20 mars 2009, par **Jacques Istas**
Professeur, Université de Grenoble (**page web**)

LE syndrome d'immunodéficience acquise, plus connu sous le nom de **SIDA**, correspond à un déficit immunitaire chronique induit par le virus **VIH** (Virus de l'Immunodéficience Humaine), c'est en pratique une maladie qui entraîne une chute des défenses naturelles et induit la mort de la personne contaminée. Le SIDA a, semble-t-il, été observé depuis longtemps, mais ne s'est réellement développé en tant que pandémie [1] qu'à partir de la fin des années 1970. On estime qu'il y avait environ 33 millions de porteurs du virus en 2007 dans le monde.

Trois modes de transmission ont été observés :

- par voie sexuelle,
- par voie sanguine,
- de la mère à l'enfant.

La transmission sexuelle de l'infection par le VIH est le mode principal de dissémination du virus et nous ne retiendrons ici que ce mode. En l'absence de vaccin, la seule protection réside dans l'utilisation de préservatifs. On parle dans ce cas de relations protégées. La prévention (c'est-à-dire l'utilisation de préservatifs) supprime quasiment [2] le risque individuel de transmettre ou de recevoir le SIDA. Collectivement, la prévention ne peut donc que diminuer la pandémie.

Mais la prévention peut-elle être suffisante pour **éradiquer** à elle seule la pandémie ?

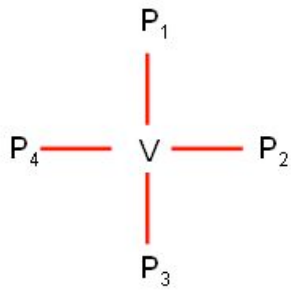
## Modèles mathématiques ?

Nous allons voir que des modèles mathématiques très simples répondent « oui » à cette question. Pouvons-nous pour autant affirmer que, dans la réalité, les choses se passeront comme dans les modèles étudiés ? Il s'agit là d'une question classique en modélisation, qui dépasse le cadre de cet article. Regardons rapidement ce problème. Il nous faut d'abord écarter une idée naïve. Ce n'est pas en compliquant le modèle que nous obtiendrons une réponse [3]. Deux attitudes sont alors envisageables. Soit on refuse systématiquement l'idée que l'étude du modèle aboutisse à une conclusion [4] ; c'est une position extrême, mais recevable. Soit on accepte la conclusion du ou des modèles étudiés tant qu'un autre modèle n'est pas venu contredire cette conclusion [5]. La « vérité » d'un modèle n'est pas absolue, elle est réfutable, pour reprendre un vocabulaire **poppérien**.

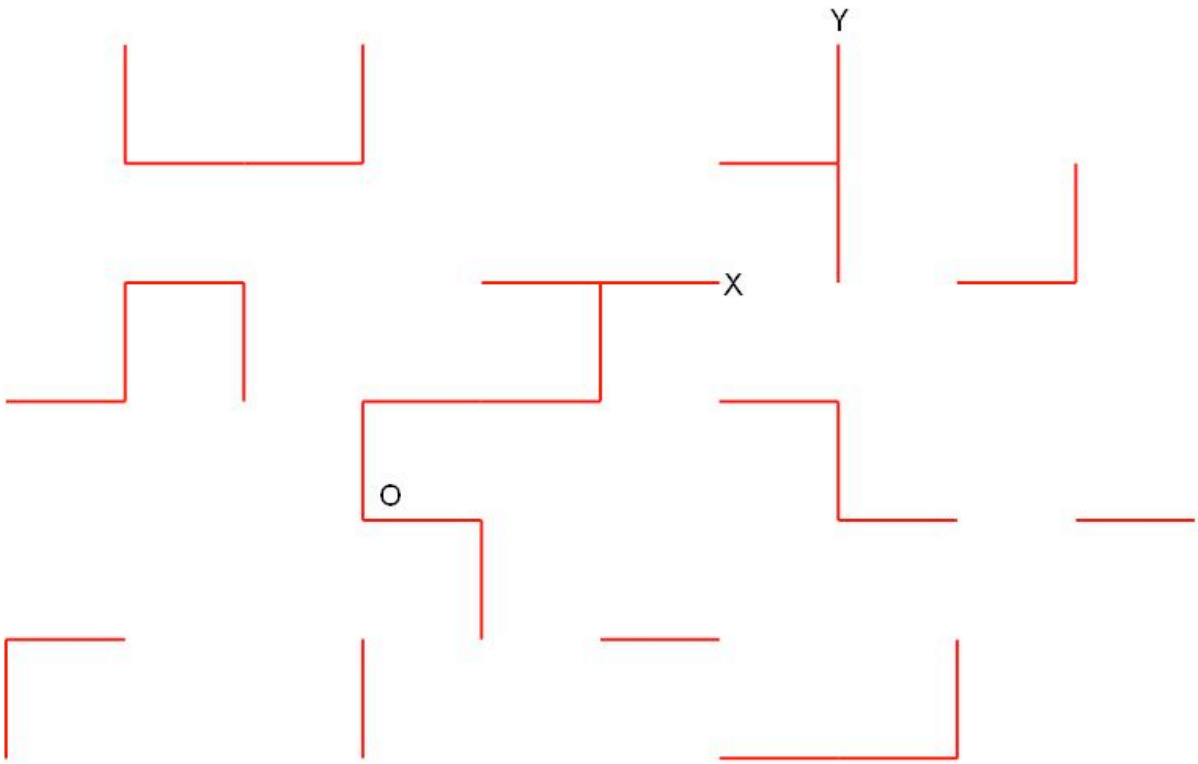
## Modélisation

Revenons au SIDA. Nous allons modéliser mathématiquement, non pas la maladie elle-même, mais sa transmission. Nous n'allons pas chercher à décrire fidèlement la réalité, mais seulement éclairer qualitativement des situations réelles complexes.

Commençons par écarter de notre modélisation les célibataires chastes et les couples fidèles, qui ne nous intéressent pas ici, et concentrons nous sur les autres. La variété des comportements sexuels humains est quasi infinie. Il nous faudrait modéliser des relations qui vont de l'aventure d'une nuit à la relation de longue durée, tenir compte de l'orientation sexuelle des partenaires, du type de relations... L'utilisation de préservatifs dépend du type de la relation, de sa durée, des partenaires (âge, milieu socio-culturel, pays...). Nous allons faire simple et mettre tous les partenaires sur un pied d'égalité. Se pose ensuite la question du nombre de partenaires, qui a déjà été évoqué **ici** et dont l'estimation diffère en général entre hommes et femmes... passons ! Nous allons de nouveau faire une simplification abusive et supposer que tout le monde a le même nombre de partenaires. Ce nombre de partenaires n'est pas primordial dans l'étude, il n'a pas d'influence *qualitative* sur les conclusions et nous allons provisoirement le choisir égal à quatre, ce qui permet une représentation graphique très simple ! Vous (ou votre voisine) êtes représenté(e) sur la figure suivante par un « V », et vos (ses) quatre partenaires par $P_1, P_2, P_3$ et $P_4$.




Représenter une population ne pose donc pas de problèmes : il suffit de prendre une feuille quadrillée. Chaque individu est représenté par un des sommets du quadrillage et ses quatre partenaires sont ses quatre plus proches voisins. La population mondiale étant gigantesque, nous allons la supposer infinie, c'est-à-dire supposer notre feuille quadrillée infinie. Nous avons ainsi modélisé le réseau de partenaires. Il nous faut maintenant modéliser la transmission. Il y a deux types de relations : celles qui transmettent le SIDA et celles qui ne le transmettent pas, parmi lesquelles les relations protégées. Supposons que celles qui transmettent le SIDA soient en proportion $p$. Comme nous ignorons la nature des relations d'autrui, nous allons la tirer au hasard. Prenons pour cela une pièce biaisée, c'est-à-dire une pièce qui tombe sur « pile » avec probabilité $p$ et « face » avec probabilité $1-p$ . Pour chaque arête de notre feuille quadrillée, nous lançons notre pièce biaisée. Si la pièce tombe sur « face » nous effaçons l'arête, si elle tombe sur « pile » nous la colorions en rouge, ce qui donne des résultats comme ceci :




Nous voyons se dessiner des chemins (en rouge). Ainsi l'individu $O$ est relié à l'individu $X$ , mais $O$ et $Y$ ne le sont pas. Si $O$ est atteint du SIDA, il le transmet à $X$ , mais pas à $Y$. Nous allons maintenant nous poser deux questions :

- existe-t-il un nombre infini de personnes reliées à $O$ ?
- existe-il quelque part un chemin infini ?

La réponse à ces deux questions n'est pas intuitive, et je suggère aux lecteurs de prendre quelques minutes pour réfléchir avant de lire la réponse. En attendant, voici des commentaires et quelques digressions ! Comment interpréter ces questions concernant

les chemins infinis ? Il faut pointer ici une faiblesse du modèle. Le modèle que nous avons introduit ici est un modèle *statique*, ce qui peut surprendre, et à juste titre. En effet, la propagation d'une maladie est un phénomène *dynamique*. Deux raisons justifient ce choix statique. D'une part, le modèle statique est plus simple à exposer, d'autre part, les modèles dynamiques conduisent aux mêmes conclusions qualitatives. En matière de modélisation, à conclusions égales, il faut privilégier la simplicité [6] et c'est la raison pour laquelle un modèle statique a été retenu. Le chemin infini s'interprète alors de la façon suivante. S'il existe un chemin infini partant de $O$, cela signifie que $O$ déclenchera une épidémie s'il a le SIDA. S'il n'existe pas de chemin infini partant de $O$, cela signifie que $O$ ne peut pas déclencher d'épidémie. L'interprétation de la deuxième question est la même : s'il existe un chemin infini, cela signifie que l'épidémie peut se déclencher. Sinon, cela signifie que, quoique qu'il arrive, l'épidémie s'arrêtera d'elle-même.

## Percolation

Le modèle que nous avons introduit est un exemple de *modèle de percolation*. Historiquement, la percolation a été introduite en 1957 par J. Hammersley qui cherchait à comprendre pourquoi les masques à gaz des soldats devenaient inefficaces. La percolation est un phénomène de transmission d'une « information » par le biais d'un réseau de sites et de liens qui peuvent, selon leur état, relayer ou non l'information aux sites voisins. Ce peut être le gaz à travers le filtre d'un masque à gaz, l'eau dans votre percolateur à café ou dans un milieu poreux, le feu dans une forêt, une rumeur dans une société humaine... Rappelons enfin que la percolation est un domaine mathématique en pleine expansion. Une partie des travaux de **W. Werner** y est consacrée. La page de **V. Beffara** propose toute une série de simulations.

Revenons maintenant aux deux questions que nous nous posions. Il va exister une probabilité critique $0 < p_c < 1$ , appelée *seuil de percolation*, telle que si $p < p_c$ , alors il n'existe jamais de chemin infini qui parte de $O$, et si $p > p_c$ , alors il existe, avec une probabilité strictement positive, un chemin infini qui part de $O$. La démonstration n'est pas très compliquée, elle repose sur des arguments de combinatoire et d'analyse que l'on peut trouver dans [7]. Cette démonstration n'apporte rien à la compréhension de notre problème et je ne l'esquisse donc pas. Tournons-nous maintenant vers la deuxième question. Si $p < p_c$ , il ne va pas exister de chemin infini du tout. Et si $p > p_c$ ? Partons de $O$. Soit il existe un chemin infini et c'est gagné. Soit il n'en existe pas, et nous pouvons alors nous déplacer un peu et nous reposer la question et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons trouvé un chemin infini. Et effectivement il existe un chemin infini. Ce genre de résultat découle d'un théorème profond en Probabilité, la loi du **tout ou rien** de **A. Kolmogorov** qui affirme en substance que dans un gros espace, tout évènement raisonnable est soit certain, soit impossible. L'existence certaine d'un chemin infini dans notre modèle de percolation n'est donc pas un résultat atypique.

En réalité, l'existence d'un seuil de percolation est indépendante du nombre de voisins (partenaires) choisi. C'est un phénomène très général, et notre choix de quatre partenaires n'a pas d'influence sur l'existence d'un seuil de percolation. En revanche, la valeur de la probabilité critique $p_c$ dépend crucialement du nombre de partenaires.

Revenons maintenant au SIDA et à la prévention. Se protéger revient à diminuer la valeur de $p$. Si suffisamment de personnes se protègent, nous pouvons espérer que $p$ devienne inférieur à la probabilité critique et faire ainsi disparaître le SIDA.

## Un problème de santé publique

La valeur numérique de $p_c$ n'est connue que dans très peu de cas [8]. Mais que pourrait nous apporter la connaissance de cette probabilité critique $p_c$ ? Notre modélisation est tellement grossière que nous ne pouvons espérer un pouvoir prédictif quantitatif. Revenons néanmoins à cette modélisation. Nous avons abusivement (et sciemment) simplifié en supposant que le nombre de partenaires était le même pour tout le monde. La réalité est évidemment beaucoup plus nuancée. Nous pouvons déjà raffiner en deux groupes : le groupe, numériquement important, de personnes qui papillonnent modérément, et le groupe, numériquement faible, de personnes (principalement des prostitué·e·s) qui ont énormément de partenaires. Les habitudes dans ces deux groupes sont différentes, et nous pouvons supposer que les probabilités de transmissions du SIDA pour chacun de ces groupes sont différentes. Pour passer sous le seuil de percolation, quel est le groupe dont il faut abaisser la probabilité de transmission ? En d'autres termes, sur quel groupe faut-il centrer les campagnes de prévention pour éradiquer le SIDA ? La réponse n'est pas connue à ce jour.

### Notes

[▲1] Une **épidémie** est le développement et la propagation rapide d'une maladie dans une région définie et une période de temps limité. L'**endémie** est la persistance d'une maladie dans une région donnée, présence permanente ou épisodique. Une **pandémie** est une épidémie qui s'étend à la quasi-totalité d'une population d'un ou de plusieurs continents, voire dans certains cas de la planète.

[▲2] L'utilisation du préservatif n'est pas une méthode contraceptive totalement sûre, ce n'est pas non plus une protection absolue contre les maladies sexuellement transmissibles. Deux raisons à cela : le préservatif peut être mal utilisé ; il reste un

matériau perméable. Il est difficile de donner des chiffres, car certaines études, provenant de groupes idéologiquement opposés à l'utilisation de préservatifs, semblent sujettes à caution.

[▲3] Le modèle « compliqué » restera toujours infiniment éloigné de la réalité.

[▲4] L'argument principal étant l'éloignement du modèle à la réalité.

[▲5] Cette discussion n'a de sens que dans des situations identiques à la notre. Il nous est effectivement impossible d'effectuer des expériences qui permettraient de valider ou d'invalider un modèle.

[▲6] Ce principe porte le nom de **rasoir d'Occam**.

[▲7] G.Grimmet, Percolation, Springer, 1999.

[▲8] Elle est en particulier connue dans notre cas à quatre voisins, $p_c = 1/2$ .

Pour citer cet article : **Jacques Istas**, **« La prévention peut-elle éradiquer le SIDA? »** — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/La-prevention-peut-elle-eradiquer.html`