



**HAL**  
open science

## Modélisation de la raideur de mécanismes parallèles possédant des boucles fermées

Damien Chablat, Alexandr Klimchik, Anatol Pashkevich

► **To cite this version:**

Damien Chablat, Alexandr Klimchik, Anatol Pashkevich. Modélisation de la raideur de mécanismes parallèles possédant des boucles fermées. 12e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Mar 2011, Saint Etienne, France. pp.1-2. hal-00598317

**HAL Id: hal-00598317**

**<https://hal.science/hal-00598317>**

Submitted on 6 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation de la raideur de mécanismes parallèles possédant des boucles fermées

Damien Chablat, Alexandr Klimchik, Anatol Pashkevich

Ecole des Mines de Nantes, 4 rue Alfred-Kastler, Nantes 44307, France

Institut de Recherches en Communications et en Cybernetique de Nantes, 44321 Nantes, France

**Mots-clés:** *modélisation de rigidité, manipulateurs parallèles, chargement externe,*

## 1 Introduction

Parmi les mécanismes parallèles étudiés dans la littérature robotique, certains possèdent des boucles fermées qui permettent d'ajouter des contraintes sur les mouvements de l'organe effecteur. Cependant, l'analyse de la raideur est complexe ce qui conduit à remplacer les boucles fermées par des éléments équivalents dont les paramètres sont définis intuitivement. Un autre problème est lié à l'influence des efforts extérieurs qui peuvent modifier les propriétés de mécanisme et ne permettent plus d'utiliser un modèle linéaire. Dans ce cas, il est nécessaire de définir un nouveau modèle de raideur dépendant de la déformation du mécanisme à cause des efforts extérieurs. Cet article utilise des résultats sur l'analyse de raideur basé sur des flexibilités localisées et apporte des contributions dans les cas où le mécanisme est soumis à des efforts extérieurs.

## 2 Equations d'équilibre d'un mécanisme

Pour écrire les équations d'équilibre d'un mécanisme, nous utilisons une formulation énergétique. Dans une position d'équilibre, l'énergie potentielle du système  $E(\theta_1, \dots, \theta_n)$  doit être minimale et vérifier les contraintes géométriques  $\mathbf{t} = \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i, \theta_i)$  avec  $i = \overline{1, n}$ ,  $(\mathbf{q}_i, \theta_i)$  sont les valeurs des articulations passives et des articulations virtuelles de la  $i^{\text{ème}}$  chaîne cinématique et  $n$  est le nombre de chaîne cinématique. Le lagrangien du système peut être écrit :

$$L(\theta_1, \dots, \theta_n, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \theta_i^T \mathbf{K}_{\theta_i} \theta_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i^T (\mathbf{t} - \mathbf{g}_i(\theta_i, \mathbf{q}_i)) \quad (1)$$

où la matrice de raideur  $\mathbf{K}_{\theta_i}$  regroupe toutes les flexibilités de la chaîne  $i$ ,  $\mathbf{g}_i(\theta_i, \mathbf{q}_i)$  décrit sa cinématique, et le multiplicateur  $\lambda_i$  comme les forces extérieurs  $\mathbf{F}_i$  appliqués à l'extrémité de la chaîne. Les dérivés partielles de  $L$  par rapport à  $\theta_i, \mathbf{q}_i, \lambda_i$  étant nulles, nous écrivons les équations d'équilibres

$$\mathbf{J}_{\theta_i}^T \lambda_i = \mathbf{K}_{\theta_i} \theta_i; \quad \mathbf{J}_{\mathbf{q}_i}^T \lambda_i = \mathbf{0}; \quad \mathbf{t} = \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i, \theta_i); \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

où  $\mathbf{J}_{\theta_i} = \partial \mathbf{g}_i(\cdot) / \partial \theta_i$  et  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}_i} = \partial \mathbf{g}_i(\cdot) / \partial \mathbf{q}_i$  sont les matrices jacobiennes des articulations virtuelles et passives. Dans ce cas,  $\theta_i, \mathbf{q}_i$  et  $\lambda_i$  sont des inconnues. Comme le système obtenu dans

l'équation (2) est fortement non linéaire, la solution ne peut être obtenue que numériquement. Dans cet article, nous proposons d'utiliser la procédure itérative suivante :

$$\begin{bmatrix} \lambda'_i \\ \mathbf{q}'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta_i} \mathbf{K}_{\theta_i}^{-1} \mathbf{J}_{\theta_i}^T & \mathbf{J}_{q_i} \\ \mathbf{J}_{q_i}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t} - \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{q}_i) + \mathbf{J}_{q_i} \mathbf{q}_i + \mathbf{J}_{\theta_i} \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta}'_i = \mathbf{K}_{\theta_i}^{-1} \mathbf{J}_{\theta_i}^T \lambda'_i \quad (3)$$

où le symbole « ' » correspond à l'itération suivante et la solution de départ est calculé en utilisant le modèle géométrique inverse pour le système soumis à aucune force extérieur. En utilisant cette procédure, pour une position donné de l'organe effecteur  $\mathbf{t}$ , nous pouvons calculer la valeur de  $\lambda_i$  pour chaque chaîne cinématique et vérifiant la relation  $\mathbf{F} = \sum_i \lambda_i$ , ce qui permet d'obtenir la relation force/déplacement  $\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{t})$ .

### 3 Matrice de raideur

Pour calculer la matrice de raideur, la relation reliant la force et le déplacement de l'organe effecteur doit être linéarisée au voisinage de sa position d'équilibre. En considérant que les efforts extérieurs  $\mathbf{F}_i$  et la position de l'organe effecteur  $\mathbf{t}$  sont incrémenter par deux petites valeurs  $\delta \mathbf{F}_i$ ,  $\delta \mathbf{t}$ , nous pouvons étudier deux états d'équilibre du système  $(\mathbf{F}_i, \boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{t})$  et  $(\mathbf{F}_i + \delta \mathbf{F}_i, \boldsymbol{\theta}_i + \delta \boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{q}_i + \delta \mathbf{q}_i, \mathbf{t} + \delta \mathbf{t})$ . Sous ces hypothèses, l'équation (2) devient

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_{\theta_i} + \delta \mathbf{J}_{\theta_i})^T (\lambda_i + \delta \lambda_i) &= \mathbf{K}_{\theta_i} (\boldsymbol{\theta}_i + \delta \boldsymbol{\theta}_i); & (\mathbf{J}_{q_i} + \delta \mathbf{J}_{q_i}) (\lambda_i + \delta \lambda_i) &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{t} + \delta \mathbf{t} &= \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{J}_{\theta_i} \delta \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{J}_{q_i} \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\delta \mathbf{J}_{\theta_i}$  et  $\delta \mathbf{J}_{q_i}$  sont les différentielles des matrices jacobiennes à cause des déplacements de  $(\boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{q}_i)$ . Après simplification, en négligeant les termes d'ordre supérieurs et en développant les différentielles à partir de la fonction hesienne  $\Psi_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i, \boldsymbol{\theta}_i)^T \lambda_i$ ,  $\mathbf{H}_{qq}^{(i)} = \partial^2 \Psi_i / \partial \mathbf{q}_i^2$ ,  $\mathbf{H}_{q\theta}^{(i)} = \partial^2 \Psi_i / \partial \mathbf{q}_i \partial \boldsymbol{\theta}_i$ ,  $\mathbf{H}_{\theta\theta}^{(i)} = \partial^2 \Psi_i / \partial \boldsymbol{\theta}_i^2$ , le système d'équation complet du système peut être écrit

$$\mathbf{J}_{\theta_i} \delta \lambda_i + \mathbf{H}_{q\theta}^{(i)} \delta \mathbf{q}_i + \mathbf{H}_{\theta\theta}^{(i)} \delta \boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{K}_{\theta_i} \delta \boldsymbol{\theta}_i; \quad \mathbf{J}_{q_i} \delta \lambda_i + \mathbf{H}_{qq}^{(i)} \delta \mathbf{q}_i + \mathbf{H}_{q\theta}^{(i)} \delta \boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{0}; \quad \mathbf{J}_{\theta_i} \delta \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{J}_{q_i} \delta \mathbf{q}_i = \delta \mathbf{t} \quad (2)$$

Après l'élimination analytique de  $\delta \boldsymbol{\theta}_i$ , nous pouvons écrire la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta \lambda_i \\ \delta \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta_i} (\mathbf{K}_{\theta_i} - \mathbf{H}_{\theta\theta}^{(i)})^{-1} \mathbf{J}_{\theta_i}^T & \mathbf{J}_{q_i} \\ \mathbf{J}_{q_i}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ce qui donne la relation linéaire  $\delta \lambda_i = \mathbf{K}_{C_i} \delta \mathbf{t}$  définissant la matrice de raideur cartésienne de chaque chaîne cinématique. En étudiant l'architecture du mécanisme étudié, la matrice de raideur cartésienne peut maintenant être écrite  $\mathbf{K}_C = \sum_i \mathbf{K}_{C_i}$ . À partir de cette expression, nous pouvons calculer la raideur dans le cas ou sans forces extérieurs..

### 4 CONCLUSION

Cet article présente de nouveaux résultats concernant la modélisation de la raideur des manipulateurs parallèles possédant des boucles fermées. Contrairement aux études précédentes, nous prenons en compte l'influence des efforts extérieurs et nous exprimons un modèle non linéaire de déformation. Ces résultats peuvent aussi servir à détecter les flambements de la structure du manipulateur.