

Trois approches cohérentes pour modéliser la multifissuration des composites 1D

É. Castelier, L. Gélébart, Christian Lantuéjoul

▶ **To cite this version:**

É. Castelier, L. Gélébart, Christian Lantuéjoul. Trois approches cohérentes pour modéliser la multifissuration des composites 1D. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.88. hal-00598132

HAL Id: hal-00598132
https://hal.science/hal-00598132

Submitted on 4 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Trois approches cohérentes pour modéliser la multifissuration des composites 1D

Three consistent approaches of the multiple cracking process in 1D composites

É. Castelier[1], L. Gélébart[2], C. Lantuéjoul[3]

1 : CEA,DEN,SESC, F-13108 Saint-Paul-lez-Durance, France
2 : CEA,DEN,SRMA, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
3 : MINESPARISTECH, 35 rue Saint Honoré F-77305 Fontainebleau France

e-mail : etienne.castelier@cea.fr, lionel.gelebart@cea.fr, christian.lantuejoul@mines-paristech.fr

Résumé

Il existe de nombreux modèles pour décrire la fissuration des composites 1D, avec, pour la plupart, les points communs suivants : la mécanique est simplifiée en 1D, le comportement des matériaux (fibres et matrice) est élastique, l'interphase est souvent modélisée par une contrainte de cisaillement. Le point délicat de ces modèles consiste à gérer le caractère aléatoire de la fissuration, souvent décrit par un modèle de Weibull. Pour ce faire, plusieurs stratégies ont été déployées qui peuvent se classer en trois approches : la première approche (CL) discrétise le composite, et tire aléatoirement des contraintes limites suivant une statistique de Weibull ; la seconde approche (PF) détermine de manière aléatoire les différentes fissures de manière séquentielle ; la troisième approche (AC) modélise un composite infini, et propose des formules analytiques pour décrire la statistique des fragments de composites. Nous montrons, dans le cas simplifié du micro-composite, que ces trois approches conduisent à des résultats équivalents.

Abstract

Most modellings found in literature for the multiple cracking process of 1D composites deal approximately with the same ingredients : the mechanical modelling is reduced to 1D, the material behaviour (matrix and fibre) is elastic, and the interphase is often modelled with a shear stress. The key points of these modellings is to handle the randomness of the cracking process, often described by a Weibull model. Several strategies are developed for this, which resort mainly from three approaches : the first approach (CL) discretizes the composite, and random strengths are given according to a Weibull statistic ; the second approach (PF) determines randomly the cracks, in sequential manner ; the third approach (AC) assumes an infinitely long composite, and gives analytical formulae to model the fragment length statistics. These three approaches are shown to give equivalent results on the simplified case of a micro-composite.

Mots clefs : Composites à Matrice Céramique (CMC), Fissuration, Modélisation, Méthodes probabilistes
Keywords : Ceramic-matrix composites (CMC), Fragmentation, Modelling, Probabilistic methods

1 Introduction

Les composites 1D (macro et minicomposites) sont fréquemment utilisés lors de la conception des composites à matrice céramique (CMC). Composés d'une fibre (microcomposite) ou d'un toron (minicomposites), revêtus de matrice, ils permettent d'étudier la couche d'interphase à l'interface fibre matrice, son influence sur la fissuration multiple des fibres et de la matrice, et le comportement mécanique qui en résulte.
Il existe de nombreux modèles pour décrire la fissuration des composites 1D, avec, pour la plupart, les points communs suivants : la mécanique est simplifiée en 1D, le comportement des matériaux (fibres et matrice) est élastique, l'interphase est souvent modélisée par une contrainte de cisaillement. Le point délicat de ces modèles consiste à gérer le caractère aléatoire de la fissuration, souvent décrit par un modèle de Weibull. Pour ce faire, plusieurs stratégies ont été déployées qui peuvent se classer en trois approches :

1. La première approche (*Contrainte Limite, CL*) [1] consiste à discrétiser le composite en petits éléments, et à générer des contraintes limites suivant une statistique de Weibull. Après cette phase d'initialisation aléatoire, le reste du calcul est déterministe.

2. La seconde approche (*Prochaine Fissure, PF*) [2, 3, 4] détermine de manière aléatoire l'instant de la prochaine fissure, ainsi que sa localisation.
3. La troisième approche (*Approche Continue, AC*) [5] modélise un composite infini, et propose des formules analytiques pour décrire la statistique des fragments de composites.

Ces approches sont-elles équivalentes ? Les avis diffèrent [4], mais cette question n'a jamais été abordée de manière systématique. Pour y répondre, les trois approches ont été implantées sur un modèle simplifié : le composite est un microcomposite, la fissuration est localisée dans la matrice et la contrainte de cisaillement est supposée constante. Une étude théorique montre que ces trois approches conduisent à des résultats équivalents ; leur implantation numérique le confirme.
Le processus de fissuration, ainsi que les trois approches, sont décrits de manière plus détaillée dans un article précédent [6].

2 Modèle de microcomposite

L'objet modélisé dans cette étude est un microcomposite : une fibre recouverte de sa matrice. Il est soumis à une traction monotone, caractérisée par une contrainte σ croissante. Lors de l'essai, des fissures transversales apparaissent dans la matrice, puis la fibre casse, provocant la rupture du composite. La modélisation présentée décrit la fissuration multiple de la matrice, mais ne traite pas de la rupture de la fibre.
La fissuration des microcomposites est décrite abondamment dans la littérature [2, 1, 5, 6]. Nous en rappelons les traits principaux. Elle résulte de deux causes : la présence de défauts dans la microstructure du matériau, et leur activation par le champ de contraintes.

2.1 Défauts et modèle de Weibull

Les matériaux fragiles possèdent dans leur microstructure de nombreux **défauts**, qui, pour une certaine valeur des contraintes se transforment en fissure. Chaque défaut peut donc être représenté par un couple : sa position x et sa valeur d'activation σ_m. Dans le cas du microcomposite, la matrice peut être modélisée comme un milieu 1D. Chaque défaut correspond à un point (x, σ_m) dans un espace à deux dimensions : l'**espace des défauts**.
La microstructure du composite est inconnue, les défauts sont cachés, ils n'apparaissent que lorsqu'ils sont activés et se transforment en fissure. Il est donc classique pour les matériaux fragiles de recourir à un modèle aléatoire : les défauts sont considérés comme des points aléatoirement répartis dans l'espace des défauts. Un tel ensemble de points aléatoires s'appelle un **processus ponctuel**.
Deux hypothèses, plutôt naturelles, permettent de simplifier la description probabiliste :

1. Les défauts dans la microstructure n'ont pas d'interaction entre eux. Leur taille est en effet petite devant leur distance. D'un point vue probabiliste, ils sont dits **indépendants**, et le processus ponctuel devient un **processus de Poisson**. Il est alors caractérisé par une densité λ telle que le nombre N de défauts qui appartiennent à un domaine infinitésimal $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma_m$ vaut en moyenne :
$$E\{N(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\sigma_m)\} = \lambda(x, \sigma_m)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\sigma_m. \tag{1}$$
2. La matrice est supposée élaborée de manière uniforme, donc la densité de défaut λ est indépendante de la coordonnée x.

Ces propriétés permettent le calcul de nombreuses probabilités. Un composite de taille L_0 par exemple, est soumis à un chargement croissant. La contrainte Σ_m dans la matrice au moment où la première fissure apparaît est une **variable aléatoire**, dont la fonction de répartition vaut :
$$P\{\Sigma_m < \sigma_m\} = 1 - \exp\left(-L_0\,\Lambda(\sigma_m)\right), \quad \text{avec} \quad \Lambda(\sigma_m) = \int_0^{\sigma_m} \lambda(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

La densité λ du processus de Poisson est donc accessible à l'expérience. Il suffit de soumettre plusieurs composites à des tractions, de construire la statistique de la première fissure Σ_m, et d'inverser la relation (2).
Une densité classiquement utilisée pour la fissuration est celle de **Weibull** :

$$\lambda(\sigma_m) = \frac{w\, A_m}{V_0\, \sigma_0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^{w-1} \quad \text{et} \quad \Lambda(\sigma_m) = \frac{A_m}{V_0} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^{w}, \tag{3}$$

dont les paramètres sont : le module w, un paramètre d'échelle σ_0, un volume de référence pris souvent à 1^3. La notation A_m représente la section de matrice du composite.

2.2 Profil des contraintes

Lorsque le microcomposite est soumis à une contrainte σ, sa charge se répartit entre la fibre et la matrice. Loin de toute fissure, la contrainte dans la matrice est proportionnelle à σ :

$$\sigma_m = \varsigma_m\, \sigma \quad \text{avec} \quad \varsigma_m = \frac{E_m}{\phi_f\, E_f + \phi_m\, E_m}. \tag{4}$$

Le coefficient de proportionnalité ς_m fait intervenir les modules d'Young E_m et E_f, et les proportions volumiques ϕ_m et ϕ_f de matrice et de fibre.
À l'endroit d'une fissure, la charge est entièrement portée par la fibre et la contrainte est nulle dans la matrice :

$$\sigma_m = 0. \tag{5}$$

Près de la fissure, la matrice n'adhère plus à la fibre. Le glissement de la matrice sur la fibre produit un frottement, modélisé par une contrainte de cisaillement τ. Ce frottement transfert progressivement les efforts de la fibre vers la matrice :

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} = \frac{2\,\tau\,\phi_f}{\phi_m\, R_f}, \tag{6}$$

où R_f désigne le rayon de la fibre. À partir d'une fissure, la contrainte dans la matrice σ_m croît donc linéairement, jusqu'à atteindre la valeur (4). La longueur de décohésion est donc proportionnelle à la charge σ du composite :

$$l_d = \delta_m\, \sigma, \quad \text{avec} \quad \delta_m = \frac{R_f\, \phi_m\, \varsigma_m}{2\,\tau\,\phi_f}. \tag{7}$$

Le microcomposite peut donc être divisée en deux zones : une zone saine où la contrainte σ_m est uniforme, et une zone de glissement, à proximité des fissures où la contrainte σ_m croît linéairement. Le profil des contraintes est illustré en figure 1.

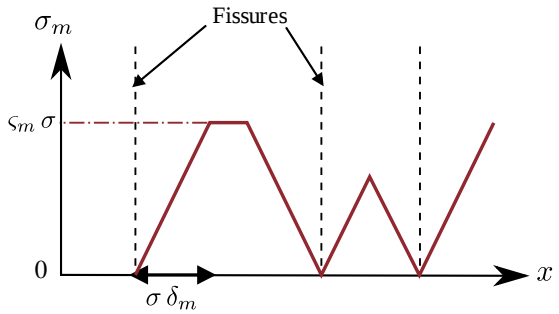


FIG. 1 – Profil de contrainte σ_m dans la matrice

2.3 Fissuration

La fissuration est un processus qui combine l'existence des défauts aux contraintes appliquées dans la matrice. La figure 2 illustre ce processus. Elle présente les défauts comme des points dans l'espace des défauts, avec en abscisse la coordonnée x et en ordonnée la contrainte σ_m. Trois fissures ont déjà été atteintes. La courbe rouge représente le profil des contraintes σ_m après la troisième fissuration, pour une charge σ_d sur le composite.

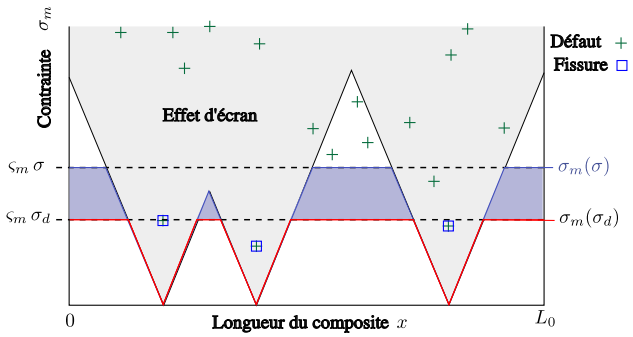


FIG. 2 – Recherche de la prochaine fissure dans l'espace des défauts

Lorsque la charge σ exercée sur le composite augmente, le profil des contraintes balaie un domaine, en bleu sur la figure. La prochaine fissure correspond au prochain défaut atteint par le balayage. La plus grande partie des défauts ne seront jamais atteints, car la diminution des contraintes à proximité d'une fissure les protège. Le domaine concerné par cet **effet d'écran** est en gris sur la figure.

3 Trois approches

Les trois approches évoquées en introduction pour modéliser numériquement la fissuration du micro-composite, *Contrainte Limite*, *Prochaine Fissure* et *Approche Continue* sont maintenant présentées

3.1 Contrainte Limite

L'approche CL consiste à discrétiser un microcomposite en éléments de taille Δx. Chaque élément se voit attribuer une contrainte limite, tirée aléatoirement suivant une loi de Weibull :

$$P\{\Sigma_m < \sigma_m\} = 1 - \exp\left[-\frac{A_m\,\Delta x}{V_0}\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^w\right]. \tag{8}$$

Dans cette approche, le caractère aléatoire de la fissuration est traité avant le calcul mécanique, par une initialisation aléatoire des paramètres matériau. La discrétisation induit une approximation : la précision des calculs augmente avec la finesse du maillage.

3.2 Prochaine Fissure

L'approche PF recherche les fissures en balayant l'espace des défauts (figure 2) dans l'ordre croissant de la contrainte matricielle σ_m. Tout défaut non protégé par l'effet d'écran est transformé en fissure. La recherche d'un nouveau défaut se fait par un tirage aléatoire en deux temps : sa contrainte Σ_m, puis sa position X :

– Si σ_m^d est la contrainte du dernier défaut trouvé, la contrainte Σ_m du suivant peut se calculer à partir d'une variable aléatoire uniforme U :

$$\Sigma_m = \left({\sigma_m^d}^w - \ln(U) \frac{\sigma_0^w V_0}{L_0 A_m} \right)^{1/w} . \quad (9)$$

– La position X du nouveau défaut est tirée aléatoirement de manière uniforme sur la longueur L_0 du composite.

Cette approche est exacte, et ne dépend d'aucune approximation.

3.3 Approche Continue

L'approche continue a été développé par Hui et al. [5]. Contrairement aux approches précédentes, elle considère un micro-composite de taille infinie, et calcule la statistique des fragments de matrice, son évolution au cours de la fissuration.

Elle propose pour la densité de probabilité des fragments des formules analytiques complexes, qui ne sont pas reportées ici. Pour la mettre en œuvre, il faut utiliser une fonction spéciale (exponentielle intégrale Ein) et réaliser numériquement des intégrales.

3.4 Comparaison

Les trois approches décrites ci-dessus sont comparées sur un exemple, un micro-composite en SiC/SiC, dont les paramètres, rassemblés dans le tableau 1, proviennent d'un article de Guillaumat et Lamon [3].

Nom	Symbole	Valeur	Unité
Proportion Volumique de fibre	ϕ_f	0.26	
Diamètre de fibre	$2\,R_f$	15	μm
Longueur du composite	L_0	2.5	cm
Module d'Young matrice	E_m	300	GPa
Module d'Young fibre	E_f	180	GPa
Cisaillement (frottement)	τ	5.	MPa
Module de Weibull	w	4.9	
Paramètre d'échelle de Weibull (V_0=1 m^3)	σ_0	3.	MPa

TAB. 1 – Paramètres d'un micro-composite en SiC/SiC d'après Guillaumat et Lamon [3].

La simulation aléatoires de 10 000 essais de traction permet de tracer les histogrammes des longueurs de fragments produits par les deux premières approches présentés en figure 3. Ces histogrammes sont comparables à la densité de probabilité obtenue par la troisième approche. Cela montre la cohérence des trois approches.

4 Conclusion

Pour modéliser la fissuration d'un composite, les trois approches décrites procèdent de manière très différentes. Le choix d'une approche dépend de ses avantages et inconvénients :

– L'approche *Contrainte Limite* est simple à mettre en œuvre, puisqu'il s'agit d'initialiser par un tirage aléatoire des valeurs de contrainte limite. Elle a déjà été implanté en 2D ou 3D. Pour les

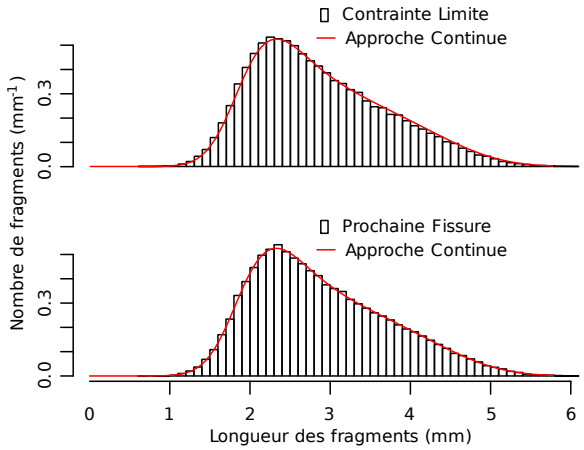


FIG. 3 – Histogrammes des longueurs des fragments : comparaison des différentes approches

composites 1D, ses temps de calculs sont bien supérieurs aux autres approches, et la précision des résultats dépend de la finesse de la discrétisation.

– L'approche *Prochaine Fissure* peut être implantée sans approximation et possède des temps de calculs très courts. Elle a déjà été étendue aux minicomposites. Elle est délicate à mettre en œuvre car elle combine le caractère aléatoire des défauts avec le calcul d'équilibre mécanique.
– *Approche Continue* n'est valable que pour les microcomposites. Ses formules analytiques sont pratiques pour vérifier les autres approches.

Références

[1] W. A. Curtin. Multiple matrix cracking in brittle matrix composites. *Acta metallurgica et materialia*, 41(5) :1369–1377, 1993.

[2] R. B. Henstenburg and S. L. Phoenix. Interfacial shear strength studies using the single-filament-composite test. II : A probability model and Monte Carlo simulation. *Polymer composites*, 10(2) :389–408, 1989.

[3] L. Guillaumat and J. Lamon. Fracture statistics applied to modelling the non-linear stress-strain behavior in microcomposites : influence of interfacial parameters. *International Journal of Fracture*, 82 :297–316, 1996.

[4] J. Lamon. Stochastic approach to multiple cracking in composite systems based on the extreme-values theory. *Composites science and technology*, 69(10) :1607–1614, 2009.

[5] C.-Y. Hui, S. L. Phoenix, M. Ibnabdeljalil, and R. L. Smith. An exact closed-form solution for fragmentation of Weibull fibers in a single filament composite with applications to fiber-reinforced ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(10) :1551–1585, 1995.

[6] É. Castelier, L. Gélébart, C. Lacour, and C. Lantuéjoul. Three consistent approaches of the multiple cracking process in 1D composites. *Composites Science and Technology*, 70(15) :2146–2153, 2010.