



HAL
open science

Évaluation des performances des modèles d'homogénéisation pour des fibres aléatoirement dispersées ayant des rapports de forme élevés

Hadi Moussaddy, Martin Lévesque, Daniel Therriault

► **To cite this version:**

Hadi Moussaddy, Martin Lévesque, Daniel Therriault. Évaluation des performances des modèles d'homogénéisation pour des fibres aléatoirement dispersées ayant des rapports de forme élevés. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.83. hal-00598129

HAL Id: hal-00598129

<https://hal.science/hal-00598129>

Submitted on 4 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Évaluation des performances des modèles d'homogénéisation pour des fibres aléatoirement dispersées ayant des rapports de forme élevés

Performance evaluation of homogenization techniques for high aspect ratio randomly distributed fibers

Hadi Moussaddy, Martin Lévesque et Daniel Therriault

CREPEC, Département de Génie Mécanique
École Polytechnique de Montréal - C.P. 6079, Succ. Centre-Ville - Montréal (QC) - Canada H3C 3A7

e-mail : daniel.therriault@polymtl.ca

Résumé

Les méthodes d'homogénéisation analytiques de Mori-Tanaka et auto-cohérente ont été utilisées pour évaluer les propriétés élastiques effectives des composites renforcés par des fibres aléatoirement dispersées. Les résultats obtenus ont montré que le rapport de forme des fibres a un effet considérable sur le module d'élasticité effectif du composite. Pour valider les résultats des modèles analytiques, les propriétés élastiques effectives des composites ont aussi été calculées par la méthode des éléments finis. Les fibres ont été générées aléatoirement dans un cube périodique en utilisant un algorithme d'adsorption séquentielle aléatoire. Chaque réalisation géométrique générée a été maillée, et des conditions aux rives périodiques ont été appliquées. Pour chercher le tenseur d'élasticité effectif d'une réalisation, les contraintes ont été moyennées sur tous les éléments du modèle éléments finis. Le volume élémentaire représentatif a été déterminé statistiquement pour plusieurs rapports de forme de fibres (3 à 50). Les résultats montrent une relation quasi-linéaire entre le module d'élasticité effectif du composite et le rapport de forme des fibres aléatoires. Les estimations du modèle de Mori-Tanaka sont légèrement plus rigides que les résultats du modèle éléments finis. Les estimations de la méthode auto-cohérente sont plus rigides que les résultats des méthodes éléments finis et Mori-Tanaka.

Abstract

Analytical homogenization methods of Mori-Tanaka and that of the self-consistent scheme have been used to estimate the overall elastic properties of composites with randomly oriented fibers. The results showed that aspect ratio of fibers have a significant effect on the overall elastic modulus of the composite. In order to validate the analytical modeling results, effective elastic properties of the composites were also evaluated using a finite element homogenization method. The fibers were randomly generated in a periodic cube using a Random Sequential Adsorption algorithm (RSA). Every geometrical realization generated was meshed, and periodic boundary conditions were applied. The effective elasticity tensor was calculated by averaging the stress results over all elements in each finite element model. Representative volume elements were found for several aspect ratios (3 to 50). The results show a quasi-linear dependence between overall stiffness of the composite and the random fibers aspect ratio. The results from the Mori-Tanaka scheme were found to slightly overestimate the overall stiffness of the composite when compared to finite element results. However, the self-consistent model estimations resulted in stiffer results than either finite element or Mori-Tanaka estimations.

Mots Clés : Composite, Fibres aléatoires, Modélisation, Homogénéisation, Propriétés mécaniques.

Keywords : Composite, Random fibers, Modelling, Homogenization, Mechanical properties.

1. Introduction

Grâce à ses propriétés mécaniques élevées (rigidité axiale autour de 1TPa), le nanotube de carbone constitue un renfort très prometteur pour les nanocomposites à haute performance. Toutefois, la manipulation et l'orientation des nanotubes dans une matrice est pour le moment pratiquement impossible. Cependant, il pourrait être intéressant d'avoir à disposition des outils prédictifs fiables permettant d'évaluer les propriétés mécaniques qui seraient obtenues pour une microstructure idéale. Cela permettrait d'évaluer l'effort à déployer pour atteindre les propriétés idéales lors de l'élaboration de nanocomposites à base de nanotubes de carbone.

Les modèles d'homogénéisation analytiques permettent d'estimer les propriétés élastiques effectives des composites à partir de la connaissance de la microstructure (propriétés des

constituants, leurs formes, positions et orientations). Plusieurs de ces modèles sont basés sur le modèle d'Eshelby [1], comme les méthodes de Mori-Tanaka [2], Torquato [3] et auto-cohérente [4]. La précision de ces modèles peut être évaluée par des méthodes numériques. Par exemple, il est possible d'utiliser des maillages par Éléments Finis (ÉF) de Volumes Élémentaires Représentatifs (VÉR). Cette approche a déjà été utilisée dans le cas de renforts sphériques [5] ou ellipsoïdaux alignés [6]. Toutefois, il existe très peu d'études pour des composites renforcés par des renforts ellipsoïdaux aléatoirement distribués. Kari et al. [7] ont étudié l'effet du rapport de forme, variant de 1 jusqu'à 15, pour des fibres isotropes aléatoirement dispersées en utilisant la méthode des ÉF. Ils ont conclu que le rapport de forme des fibres aléatoirement dispersées n'a aucun effet sur le module d'élasticité effectif du composite. Lusti [8] a réalisé une étude similaire mais pour des rapports de forme allant jusqu'à 1000 en calculant les résultats des ÉF pour des fibres alignées et en moyennant ensuite le tenseur d'élasticité obtenu sur toutes les orientations possibles. Contrairement aux résultats de Kari et al., Lusti a observé une variation du module d'élasticité effectif du composite en augmentant le rapport de forme des fibres. Toutefois, ses résultats ÉF étaient très proches de la borne supérieure de Voigt. La principale difficulté dans ce genre d'études est que plus le rapport de forme est élevé, plus le nombre de fibres devant être maillées dans le VÉR est élevé. De plus, cela augmente aussi la densité de maillage, ce qui peut limiter la gamme de rapports de forme étudiée.

Cette étude avait comme premier objectif de déterminer l'effet du rapport de forme des fibres sur le comportement effectif des composites renforcés par des fibres isotropes et aléatoirement dispersées en utilisant la méthode des ÉF. Le second objectif était de déterminer le modèle d'homogénéisation le plus précis pour des microstructures composées de fibres cylindriques aléatoirement distribuées et à grand rapport de forme.

La Section 2 présente les modèles d'homogénéisation analytique utilisés, soit le modèle de Mori-Tanaka et la méthode auto-cohérente. Les modifications principales pour simuler une distribution aléatoire de fibres sont aussi présentées. La Section 3 présente la méthodologie utilisée pour obtenir les résultats par la méthode des ÉF. Cette section décrit la méthode de génération des microstructures aléatoires, le maillage, les conditions aux rives périodiques, les équations d'homogénéisation numérique et la méthode de recherche du VÉR. La Section 4 présente les résultats de modélisation par ÉF et ceux des modèles analytiques. Les modules d'élasticité effectifs sont donnés pour plusieurs rapports de forme des fibres (3 à 50). Les résultats des ÉF sont comparés aux résultats analytiques. La précision et les erreurs de chacun des modèles analytiques sont brièvement discutées. Finalement, la Section 5 présente les principales conclusions et propose plusieurs suites possibles à considérer pour la présente étude.

Dans ce document, les lettres latines minuscules en gras (\mathbf{u}, \mathbf{x}) symbolisent des tenseurs d'ordre 1 (u_i, x_i), les lettres grecques en gras ($\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$) symbolisent des tenseurs d'ordre 2 (σ_{ij}, E_{ij} et Σ_{ij}) et les lettres latines majuscules en gras (\mathbf{C}, \mathbf{A} et \mathbf{S}) sont des tenseurs d'ordre 4 (C_{ijkl}, A_{ijkl} et S_{ijkl}).

2. Méthodes analytiques

D'après le modèle Mori-Tanaka et pour des fibres toutes alignées dans la même direction, le tenseur d'élasticité effectif \mathbf{C}_{MT} est exprimé par [2] :

$$\mathbf{C}_{MT} = \mathbf{C}_m + f_v (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m) : \mathbf{A}_{dil} : \left[(1 - f_v) \mathbf{I} + f_v \mathbf{A}_{dil} \right]^{-1} \quad (\text{Eq. 1})$$

où \mathbf{C}_m et \mathbf{C}_f sont les tenseurs d'élasticité de la matrice et des fibres, f_v est la fraction volumique des fibres, \mathbf{I} est le tenseur d'identité du 4^{ème} ordre et \mathbf{A}_{dil} est exprimé par :

$$\mathbf{A}_{dil} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S} : \mathbf{C}_m^{-1} : (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m) \right]^{-1} \quad (\text{Eq.2})$$

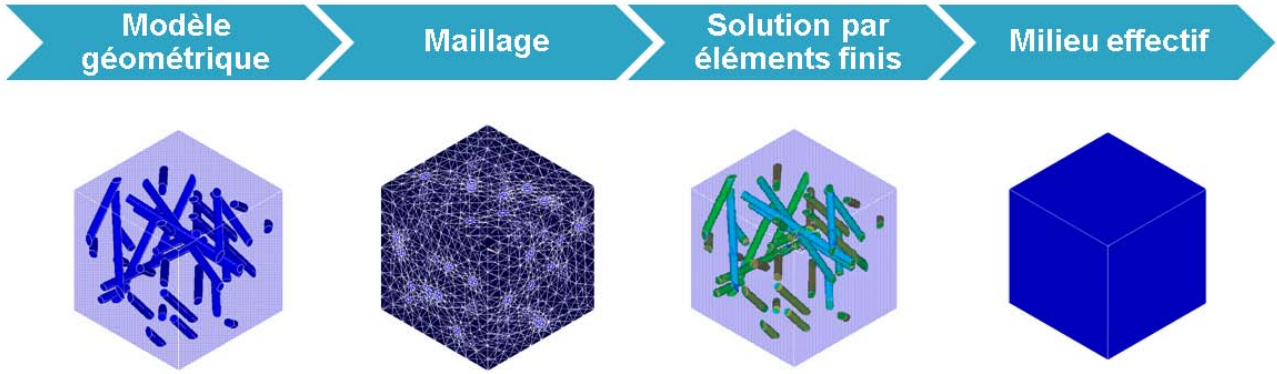


Fig. 1: Schéma représentatif des étapes de modélisation par éléments finis: 1) génération du modèle géométrique; 2) Maillage; 3) Conditions périodique et solution par éléments finis; 4) Calcul des propriétés effectives.

où S est le tenseur d'Eshelby. Les expressions des différentes composantes du tenseur d'Eshelby sont listées dans plusieurs références dont le livre de Mura [9].

Pour des fibres alignées, le schéma auto-cohérent exprime le tenseur d'élasticité effectif C_{AC} par [4] :

$$C_{AC} = C_m + fv (C_f - C_m) : \left[I + S : C_{AC}^{-1} : (C_f - C_{AC}) \right]^{-1} \quad (\text{Eq. 3})$$

ce qui conduit à une expression implicite devant être solutionnée par une méthode numérique.

Pour simuler une distribution aléatoire, Benveniste [10] a modifié le modèle de Mori-Tanaka pour obtenir l'expression suivante :

$$C_{MT} = C_m + \left\{ fv (C_f - C_m) : A_{dil} \right\} : \left[(1 - fv) I + fv \{ A_{dil} \} \right]^{-1} \quad (\text{Eq. 4})$$

où $\{.\}$ symbolise une moyenne sur le domaine des orientations possibles. Plus récemment, Schjodt-Thomsen et al. [11] a utilisé une fonction de distribution des orientations pour moyenniser l'ensemble de l'expression du tenseur d'élasticité effectif de Mori-Tanaka sur toutes les orientations possibles $\{C_{MT}\}$. Cette méthode permet d'obtenir toujours un tenseur d'élasticité symétrique. Dans ce travail, les propriétés effectives des composites ont été calculées avec les modèles de Mori-Tanaka $\{C_{MT}\}$ et la méthode auto-cohérente $\{C_{AC}\}$ moyennés sur le domaine des orientations possibles :

$$\{C^*\} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi, \beta) \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \alpha_{ls} C_{pqrs}^* \sin(\theta) d\theta d\varphi d\beta \quad (\text{Eq. 5})$$

où C^* peut être C_{MT} ou bien C_{AC} , g est une fonction de distribution d'orientation définie dans le repère d'Euler (θ, φ, β) et α est la matrice de transformation exprimée en fonction des angles d'Euler (θ, φ, β) [11].

3. Méthodologie de calcul par ÉF

Pour calculer les résultats par ÉF, une méthode à 4 étapes a été développée et est schématisée dans la figure 1. La première étape consiste à générer le modèle géométrique, les positions et les orientations des fibres. Deuxièmement, le modèle a été maillé avec des éléments finis. À la troisième étape, les conditions aux rives périodiques ont été appliquées afin de simuler l'effet d'un composite infini, puis la solution par ÉF a été ensuite calculée. La dernière étape est celle de l'homogénéisation numérique des modèles des ÉF. À cette étape, les résultats par ÉF ont été moyennés pour trouver les propriétés élastiques effectives du volume modélisé. Finalement, la

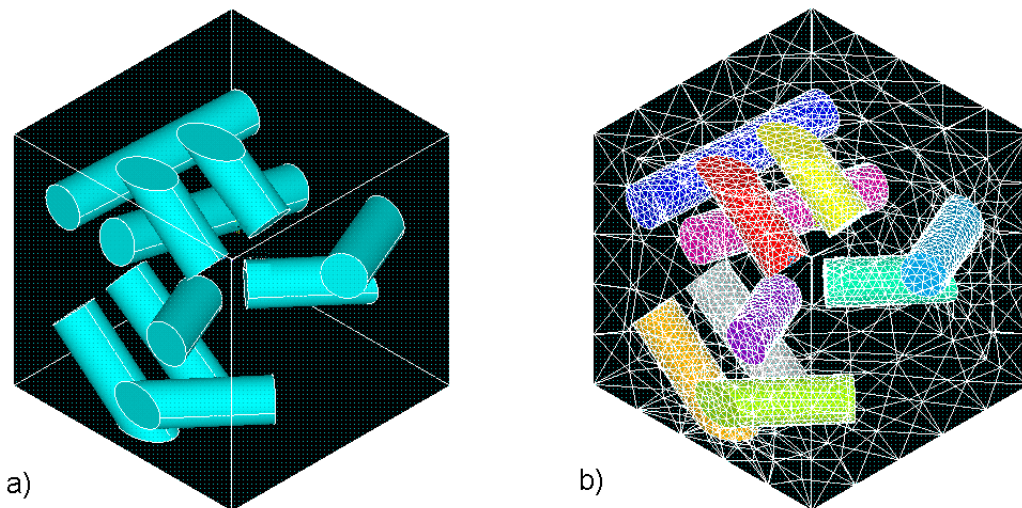


Fig. 2: Microstructure générée avec 5 fibres aléatoires de rapport de forme 5: a) Modèle géométrique; b) Maillage de la microstructure.

méthode statistique de recherche du VÉR du composite est présentée. Ces étapes sont présentées en détails aux sous-sections suivantes.

3.1. Génération géométrique

Un outil de génération de fibres aléatoirement dispersées dans un cube périodique a été développé sous Matlab. La Figure 2a montre un exemple de modèle géométrique généré à l'aide de cet outil. L'algorithme est basé sur la méthode d'adsorption séquentielle aléatoire (ASA) [12]. Dans cet algorithme, la position d'une première fibre dans le cube est tirée aléatoirement. La fibre est considérée comme un cylindre plein de rapport de forme L/D , où L et D sont respectivement la longueur et le diamètre de la fibre. La position de la deuxième fibre est ensuite générée aléatoirement. Des boucles de vérification permettent alors de vérifier que la seconde fibre n'entre pas en collision avec la première. Les fibres suivantes sont ajoutées en suivant la même méthode jusqu'à l'atteinte de la fraction volumique désirée. Dans cette étude, les géométries générées sont périodiques, de sorte que toute fibre qui coupe une surface a été prolongée sur la surface opposée. Une distance minimale entre les fibres ou encore entre les extrémités des fibres et les parois du cube a été utilisée pour faciliter le maillage du modèle géométrique.

L'algorithme ASA ne permet pas en général d'atteindre des fractions volumiques importantes. Pour des fibres aléatoirement dispersées, une fraction maximale de 25% est généralement atteinte [7]. Dans cette étude, la concentration maximale de nanotubes de carbone ne dépasse pas les 10%, justifiant ainsi l'adoption de l'algorithme ASA. Il doit être noté que pour un rapport de forme de 50, des microstructures contenant 5% de nanotubes de carbone ont difficilement pu être générées. Ainsi, la présente étude a été limitée par le rapport de forme maximal (50) qui a pu être généré en utilisant l'algorithme ASA.

3.2. Maillage ANSYS

Le volume a été ensuite transféré au logiciel ANSYS afin de générer le maillage. Les volumes ont été maillés avec des éléments tétraédriques à 10 nœuds. Les surfaces opposées du cube ont été maillées similairement afin d'obtenir une position de nœuds identiques et de permettre l'application de conditions périodiques. Les conditions aux rives périodiques sont présentées dans la prochaine section. Le langage APDL du logiciel ANSYS a permis d'automatiser le processus de maillage des volumes, sans avoir à traiter et mailler les nombreux modèles un par un.

3.3. Conditions aux rives périodiques

Un champ de déplacement périodique est défini par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\text{Eq. 6})$$

où \mathbf{E} est le tenseur de déformation macroscopique et \mathbf{x} est le vecteur position. \mathbf{v} est la fluctuation périodique, elle prend des valeurs identiques sur deux nœuds homologues positionnés sur des surfaces opposées. Par simple soustraction de l'Équation 6 pour deux nœuds homologues, la relation suivante est obtenue :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{Eq. 7})$$

Donc pour un cas de déformation macroscopique appliquée, chaque paire de nœuds situés sur des surfaces opposées est reliée par l'Équation 7. Il est facile de démontrer par simple dérivation de l'Équation 7 que les 2 nœuds homologues ont les mêmes déformations et contraintes.

3.4. Homogénéisation

L'équation de comportement effectif du modèle des éléments finis est la suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E} \quad (\text{Eq. 8})$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ est la contrainte macroscopique, et $\tilde{\mathbf{C}}$ est le tenseur d'élasticité effectif recherché. En notation matricielle de Voigt modifiée, l'Équation 8 s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \sqrt{2}\Sigma_{12} \\ \sqrt{2}\Sigma_{13} \\ \sqrt{2}\Sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1133} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1112} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1113} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1123} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2233} & \sqrt{2}\tilde{C}_{2212} & \sqrt{2}\tilde{C}_{2213} & \sqrt{2}\tilde{C}_{2223} \\ \tilde{C}_{3311} & \tilde{C}_{3322} & \tilde{C}_{3333} & \sqrt{2}\tilde{C}_{3312} & \sqrt{2}\tilde{C}_{3313} & \sqrt{2}\tilde{C}_{3323} \\ \sqrt{2}\tilde{C}_{1211} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1222} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1233} & 2\tilde{C}_{1212} & 2\tilde{C}_{1213} & 2\tilde{C}_{1223} \\ \sqrt{2}\tilde{C}_{1311} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1322} & \sqrt{2}\tilde{C}_{1333} & 2\tilde{C}_{1312} & 2\tilde{C}_{1313} & 2\tilde{C}_{1323} \\ \sqrt{2}\tilde{C}_{2311} & \sqrt{2}\tilde{C}_{2322} & \sqrt{2}\tilde{C}_{2333} & 2\tilde{C}_{2312} & 2\tilde{C}_{2313} & 2\tilde{C}_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{12} \\ \sqrt{2}E_{13} \\ \sqrt{2}E_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 9})$$

Afin de calculer la valeur du tenseur des contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$, nous avons utilisé les définitions suivantes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_V \quad (\text{Eq. 10})$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte dans un élément fini, et $\langle \cdot \rangle$ indique une moyenne volumique sur tous les éléments inclus dans le volume V . Les 36 composantes du tenseur d'élasticité effectif $\tilde{\mathbf{C}}$ ont été déterminées en appliquant 6 cas de déformation macroscopique \mathbf{E} différents.

3.5. Méthode de recherche du VÉR

La définition du VÉR a été obtenue en suivant la méthodologie de Kanit et al. [13]. La méthodologie consiste à calculer le module d'élasticité effectif pour plusieurs réalisations géométriques de la même microstructure (même rapport de forme, fraction volumique, propriétés des constituants mais orientations et positions des fibres différentes). Ensuite des intervalles de confiance ont été calculés sur la moyenne des modules d'élasticité effectifs obtenus pour toutes les

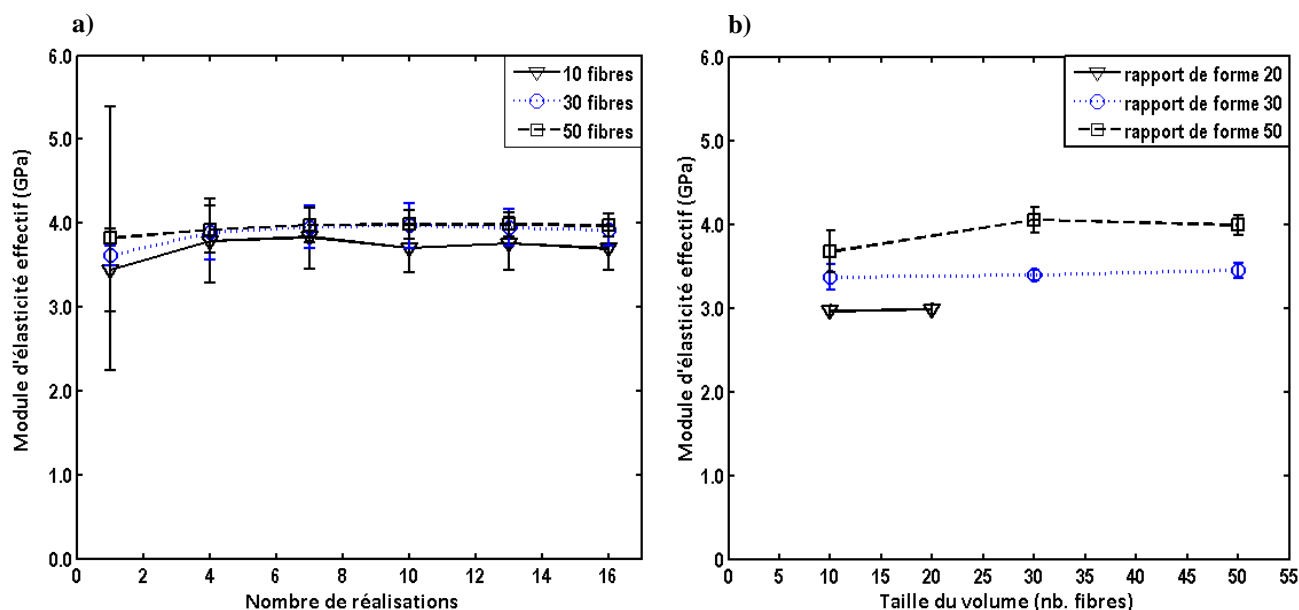


Fig. 3: Détermination du VÉR : a) étude sur le nombre de réalisations pour un rapport de forme 50 ; b) étude sur la taille du volume. Les barres représentent un intervalle de confiance de 95%.

réalisations d'une microstructure. L'augmentation du nombre de réalisations a été arrêtée lorsqu'il y a convergence du module d'élasticité effectif moyen avec une certaine tolérance permise (1%). Pour augmenter la taille du volume élémentaire, le nombre de fibres a été incrémenté tout en gardant le même rapport de forme et fraction volumique, et plusieurs réalisations géométriques ont de nouveau été calculées. Dans cette étude, il a été supposé que le composite résultant était isotrope. Ainsi, pour chaque réalisation, 3 modules élastiques effectifs ont été calculés selon les trois axes de l'espace. Les 3 modules ont ensuite été moyennés pour former le module élastique effectif du composite. En réalité cette hypothèse a été validée, puisqu'en augmentant le nombre de réalisations pour un rapport de forme donné, la moyenne des tenseurs d'élasticité effectifs observée était isotrope.

4. Résultats et discussions

4.1. Détermination du VÉR

Dans cette étude, la fraction volumique des fibres était de 5%. Tous les calculs ont été réalisés pour des fibres isotropes ayant un module d'Young de 600 GPa et une matrice isotrope ayant un module d'Young de 2 GPa. Le coefficient de Poisson est de 0.3 pour les fibres et pour la matrice.

Pour un même rapport de forme de fibres, deux convergences ont été atteintes. La première

Rapport de forme	VÉR		Module d'élasticité effectif (GPa)				
	Nombre de fibres	Nombre de réalisations	ÉF	Mori-Tanaka	Erreur %	Auto-cohérent	Erreur %
3	10	1	2.30	2.25	-2.1	2.26	-1.3
5	10	5	2.35	2.31	-0.2	2.34	-1.6
10	10	12	2.55	2.52	0.3	2.65	3.9
20	10	15	2.98	3.09	3.5	3.73	25.2
30	30	7	3.45	3.69	7.1	4.92	42.8
50	30	10	4.24	4.70	10.9	6.26	47.1

Tab. 1: Taille des VÉR et modules d'élasticité effectifs des composites en fonction du rapport de forme.

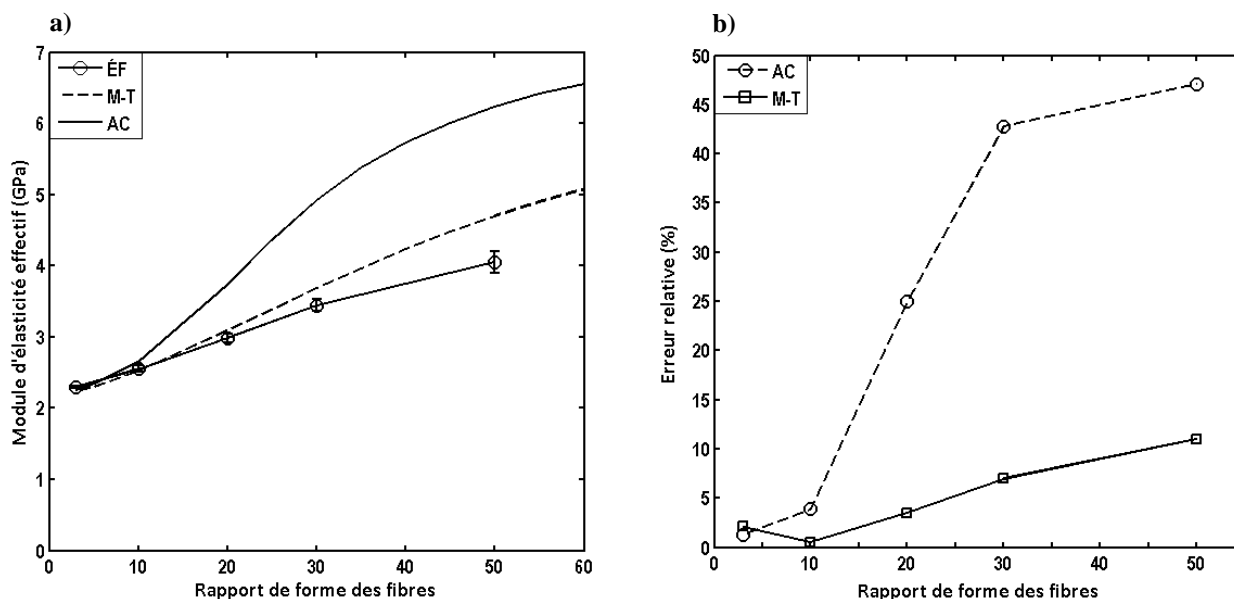


Fig. 4: Étude sur le rapport de forme des fibres : a) Module d'élasticité effectif du composite (frac.vol. 5%) en fonction du rapport de forme des fibres: estimations des méthodes de Mori-Tanaka et auto-cohérente, et les résultats des modèles ÉF avec intervalles de confiance à 95% ; b) Erreurs relatives des méthodes de Mori-Tanka et auto-cohérente.

convergence était celle de la moyenne des modules d'élasticité effectifs des différentes réalisations géométriques pour un même nombre de fibre dans le volume élémentaire. La Figure 3a présente l'évolution de la moyenne des modules d'élasticité effectifs en augmentant le nombre de réalisations géométriques pour un rapport de forme de 50 avec 3 tailles de volumes différentes : 10, 30 et 50 fibres. La deuxième convergence était celle du module d'élasticité effectif en variant la taille du volume (nombre de fibres). La Figure 3b présente la convergence du module d'élasticité effectif pour plusieurs rapports de formes en fonction de la taille du volume modélisé.

La taille du VÉR a rapidement convergé pour les rapports de forme inférieurs à 50. Mais pour un rapport de forme de 50, il a fallu 50 fibres pour trouver le VÉR, comme le montre la Figure 3b. Dans la Figure 3a avec 10 fibres de rapport de forme de 50, le module élastique effectif a convergé vers la mauvaise solution, ce qui montre qu'il existe un biais. L'augmentation du nombre de réalisations n'a pas été pas suffisante pour éliminer ce biais et ainsi converger vers la bonne solution. C'est seulement en augmentant le nombre de fibres que le biais peut être éliminé [13]. Toujours à la Figure 3a, on remarque que pour 30 fibres ayant un rapport de forme 50 le module d'élasticité effectif pour une seule réalisation est erroné. En augmentant le nombre de réalisations cette fois-ci le module élastique effectif a convergé vers la bonne solution. Toutefois, pour le volume ayant 50 fibres il a fallu moins de réalisations pour converger vers la bonne solution. Ceci démontre que le VÉR n'est pas défini simplement par sa taille, mais est plutôt défini statistiquement par un nombre de réalisations à une taille donnée. Évidemment, plus la taille du volume est grande, moins nombreuses sont les réalisations requises pour atteindre la convergence. La taille de VÉR obtenue est exclusive au rapport de forme des fibres, à leur fraction volumique (5%), et au contraste de rigidité (300). Les résultats des tailles et nombre de réalisations des VÉR trouvés sont listés dans le Tableau 1. Les résultats sont montrés pour la plus petite taille de VÉR trouvée selon une tolérance de 1%.

4.2. Effet du rapport de forme des fibres

La Figure 4a montre les résultats obtenus avec la méthode des ÉF et les résultats des modèles analytiques pour différents rapports de formes de fibres. Pour un faible rapport de forme (entre 3 et 10), les résultats numériques des ÉF et les résultats analytiques sont très proches. Pour un rapport de forme plus grand que 10, un écart commence à croître entre les résultats numériques et les résultats

analytiques. Les estimations du modèle de Mori-Tanaka ont légèrement surestimé le module d'élasticité effectif du composite. Les estimations du modèle auto-cohérent sont plus rigides que les résultats des ÉF ainsi que les estimations de Mori-Tanaka. Les erreurs relatives sont présentées en fonction du rapport de forme des fibres à la Figure 4b. Pour un rapport de forme de 10 le modèle de Mori-Tanaka a une faible erreur de 1% mais cette erreur augmente à 11% pour un rapport de forme de 50. Pour le modèle auto-cohérent, l'erreur est de 4% pour un rapport de forme de 10 et de 47% pour un rapport de forme de 50. Les résultats numériques des ÉF et analytiques des méthodes Mori-Tanaka et auto-cohérente sont listés dans le Tableau 1.

Selon les modèles analytiques, il existe un rapport de forme à partir duquel son augmentation n'aurait aucun effet considérable sur le module d'élasticité effectif des composites. Le rapport de forme effectif est observé autour de 100 pour le modèle de Mori-Tanaka et la méthode auto-cohérente. Au rapport de forme 50, on commence déjà à observer dans la Figure 4a un changement de la pente des résultats des ÉF. Toutefois, d'autres rapports de formes doivent être simulés avant d'atteindre une asymptote.

Plusieurs travaux ont mentionné que le modèle Mori-Tanaka équivaut à la borne inférieure de second ordre de Hashin et Shtrikman (HS) [14]. Benveniste [10] a cependant retrouvé que dans le cas particulier des fibres aléatoires, le modèle de Mori-Tanaka devient plus rigide que la borne inférieure de HS. Il a observé que l'estimation de Mori-Tanaka s'approchait même de la borne supérieure de HS lorsque le rapport de forme était très faible (disque fin) ou très grand (aiguilles). Les résultats obtenus par ÉF dans la présente étude appuient les constatations de Benveniste, puisque les estimations du modèle de Mori-Tanaka s'écartent des résultats des ÉF de plus en plus en augmentant le rapport de forme des fibres. Des observations similaires, ont été reportées pour des disques aléatoirement dispersés [15-16].

5. Conclusion

Dans ce travail les modules d'élasticité effectifs des composites renforcés par des fibres aléatoirement dispersées ont été déterminés par la méthode des ÉF et par deux méthodes d'homogénéisation analytique, celle de Mori-Tanaka et la méthode auto-cohérente. Le VÉR a été déterminé statistiquement pour plusieurs rapports de forme des fibres. Les deux méthodes analytiques, Mori-Tanaka et auto-cohérente, ont surestimé le module d'élasticité effectif des composites pour des fibres de rapport de forme supérieur à 10. Toutefois, il a été remarqué que le modèle de Mori-Tanaka est plus précis que la méthode auto-cohérente, mais n'est plus une borne inférieure des propriétés effectives du composite. La suite de l'étude devrait concerner le comportement des composites pour des rapports de forme supérieurs à 50 dans le but de déterminer le rapport de forme effectif des résultats par ÉF. Une autre possibilité sera de reprendre les calculs pour différentes fractions volumiques des fibres, et d'autres contrastes de rigidité.

Remerciements

L'auteur remercie Maryam Pahlavan Pour et Amine El-Mourid pour avoir fourni les algorithmes des méthodes d'homogénéisation analytique. L'auteur est reconnaissant envers le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour leur support.

Références

- [1] J. D. Eshelby, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, no. 1226, pp. 376-396, 1957.
- [2] T. Mori et K. Tanaka, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions," *Acta Metallurgica*, vol. 21, no. 5, pp. 571-4, 1973.

- [3] S. Torquato, "Morphology and effective properties of disordered heterogeneous media," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, no. 19, pp. 2385-2406, 1998.
- [4] R. Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 213-222, 1965.
- [5] S. Kari, H. Berger, R. Rodriguez-Ramos, et U. Gabbert, "Computational evaluation of effective material properties of composites reinforced by randomly distributed spherical particles," *Composite Structures*, vol. 77, no. 2, pp. 223-31, 2007.
- [6] C. L. Tucker Iii et E. Liang, "Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation," *Composites Science and Technology*, vol. 59, no. 5, pp. 655-671, 1999.
- [7] S. Kari, H. Berger, et U. Gabbert, "Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites," *Computational Materials Science*, vol. 39, no. 1, pp. 198-204, 2007.
- [8] H. R. Lusti et A. A. Gusev, "Finite element predictions for the thermoelastic properties of nanotube reinforced polymers," *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 12, no. 3, pp. S107-S119, 2004.
- [9] T. Mura, *Micromechanics of defects in solids*, 2^e éd.: Springer, 1982.
- [10] Y. Benveniste, "New approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials," *Mechanics of Materials*, vol. 6, no. 2, pp. 147-157, 1987.
- [11] J. Schjdt-Thomsen et R. Pyrz, "The Mori-Tanaka stiffness tensor: Diagonal symmetry, complex fibre orientations and non-dilute volume fractions," *Mechanics of Materials*, vol. 33, no. 10, pp. 531-544, 2001.
- [12] J.-S. Wang, "Random sequential adsorption, series expansion and Monte Carlo simulation," *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, vol. 254, no. 1-2, pp. 179-184, 1998.
- [13] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, et D. Jeulin, "Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 13-14, pp. 3647-3679, 2003.
- [14] Z. Hashin et S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- [15] L. Figiel et C. P. Buckley, "Elastic constants for an intercalated layered-silicate/polymer nanocomposite using the effective particle concept - A parametric study using numerical and analytical continuum approaches," *Computational Materials Science*, vol. 44, no. 4, pp. 1332-1343, 2009.
- [16] K. Hbaieb, Q. X. Wang, Y. H. J. Chia, et B. Cotterell, "Modelling stiffness of polymer/clay nanocomposites," *Polymer*, vol. 48, no. 3, pp. 901-909, 2007.