



**HAL**  
open science

## Une adaptation originale de la méthode de Shepard pour l'optimisation de stratifiés à fibres droites

François-Xavier Irisarri, Mostafa M. Abdalla, Zafer Gürdal

### ► To cite this version:

François-Xavier Irisarri, Mostafa M. Abdalla, Zafer Gürdal. Une adaptation originale de la méthode de Shepard pour l'optimisation de stratifiés à fibres droites. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.133. hal-00598112

**HAL Id: hal-00598112**

**<https://hal.science/hal-00598112>**

Submitted on 4 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une adaptation originale de la méthode de Shepard pour l'optimisation de stratifiés à fibres droites

## *An original adaptation of the Shepard's method for the optimization of straight-fiber laminates*

François-Xavier Irisarri<sup>1</sup>, Mostafa M. Abdalla<sup>2</sup> et Zafer Gürdal<sup>2</sup>

1 : Onera – The French Aerospace Lab  
F-92322 Châtillon, France  
e-mail : [francois-xavier.irisarri@onera.fr](mailto:francois-xavier.irisarri@onera.fr)

2 : Faculty of Aerospace Engineering  
Delft University of Technology, P.O. Box 5058, 2600 GB Delft, The Netherlands  
e-mail : [m.m.abdalla@tudelft.nl](mailto:m.m.abdalla@tudelft.nl), [z.gurdal@tudelft.nl](mailto:z.gurdal@tudelft.nl)

### Résumé

L'optimisation des empilements pour les structures composites stratifiées constitue un problème combinatoire à variables discrètes lorsque les orientations de plis sont directement employées comme variables d'optimisation. Ce type de problème peut être résolu par un algorithme génétique couplé à une technique de surface de réponse afin de réduire les coûts de calcul. De façon alternative, il est possible de formuler le problème d'optimisation en utilisant les paramètres de stratification comme variables de décision, permettant ainsi l'usage de méthodes efficaces d'optimisation par gradients. Néanmoins, les empilements doivent être reconstruits dans une seconde étape, potentiellement problématique. Cet article propose une synthèse des méthodes de métamodèles et à deux étapes. Cette synthèse est effectuée par le biais d'une technique d'approximation structurale basée sur un usage innovant de la méthode de Shepard, appliquée dans l'espace des rigidités des stratifiés. Pour ce faire, une mesure de distance dans l'espace des rigidités est proposée. L'étape d'optimisation discrète est initialisée à partir de l'optimum continu obtenu par une première étape d'optimisation continue. L'efficacité de la méthode est démontrée sur un exemple d'optimisation d'une plaque stratifiée issu de la littérature. Sa capacité à résoudre des problèmes plus complexes est illustrée sur un exemple de dimensionnement par patches.

### Abstract

Stacking-sequence optimization of laminated composite structures is a combinatorial problem involving discrete variables when ply angles are used as design variables. Such an optimization problem can be solved using genetic algorithms coupled with response surface methods to reduce the computational cost. Alternatively, the optimization problem can be formulated using lamination parameters as design variables, allowing efficient gradient-based optimization methods to be used. Nevertheless practical stacking sequences have to be reconstructed in a second step, which can be problematic. A synthesis of the two-step approach and the response surface approach to composite design is proposed in this paper. The synthesis is effected by constructing a new multi-point structural approximation scheme based on an innovative use of the classical Shepard's method applied in the space of laminate stiffness. A distance measure in the stiffness space is proposed to adapt the method to composite design. The response surface genetic algorithm optimization is performed starting from a continuous optimum defined by prior continuous optimization. The method is first applied to a single laminate design example problem found in literature to demonstrate its efficiency. The capacity of the method to solve more complex problems is then demonstrated on a patch design example.

**Mots Clés :** optimisation, méthode de Shepard, stratifiés à fibres droites

**Keywords :** optimization, Shepard's method, straight-fiber laminates

## 1. Introduction

La conception optimale de structures composites pose de multiples difficultés. Une synthèse détaillée des travaux publiés sur le sujet peut être consultée en [1,2].

L'optimisation des empilements pour les structures composites stratifiées constitue un problème combinatoire à variables discrètes lorsque les orientations de plis sont directement employées comme variables d'optimisation. L'efficacité des Algorithmes Evolutionnaires (AE) pour résoudre ce type de problèmes est aujourd'hui établie. Néanmoins, le recours aux AE engendre des coûts de calcul prohibitifs dès que les grandeurs considérées échappent aux modèles mécaniques les plus simples. L'usage de métamodèles pour limiter ces coûts s'est progressivement généralisé. Toutefois, même si des métamodèles adéquats permettent de réduire significativement le nombre d'analyses exactes, le coût de leur identification devient lui-même excessif lorsque le nombre de variables augmente. Afin de réduire ce nombre, les termes de la matrice de rigidité macroscopique du stratifié peuvent être utilisés comme variables intermédiaires. Dans ce cas, lorsque les rigidités macroscopiques sont employées pour construire les métamodèles, le nombre de variables par empilement devient indépendant du nombre de plis.

Alternativement, les rigidités macroscopiques peuvent être directement utilisées comme variables continues du problème d'optimisation. Les rigidités optimales sont déterminées pour chaque stratifié considéré par une méthode à gradients [3]. Les empilements correspondants sont retrouvés dans un second temps par une technique de moindres carrés. Cette approche en deux étapes permet des gains considérables en temps de calcul. Cependant rien ne garantit l'optimalité ni la faisabilité de la solution obtenue au final.

Dans cette étude, nous proposons une synthèse des méthodes à métamodèles et à deux étapes présentées ci-avant. Cette synthèse repose sur le développement d'une méthode d'interpolation d'Hermite (interpolation en valeur et en dérivée) innovante et dédiée aux matériaux composites, basée sur la méthode de Shepard.

La suite de cet article est organisée de la façon suivante. La deuxième partie présente un aperçu général de la stratégie d'optimisation mise en œuvre, suivie d'une description plus détaillée des deux étapes de la procédure. Les adaptations apportées à la méthode de Shepard sont présentées dans la troisième partie. Enfin, des exemples d'application de la méthode sont présentés dans la quatrième partie, pour le dimensionnement de stratifiés uniques ou de structures réalisées par patchs. Les cas d'applications proposés ici sont simples, mais démonstratifs de l'efficacité de la méthode.

## **2. Aperçu général de la stratégie d'optimisation**

La stratégie proposée reprend la décomposition du problème caractéristique de la méthode à deux étapes. La première étape consiste à déterminer les épaisseurs et rigidités optimales des stratifiés considérés. La seconde étape vise à construire les empilements optimaux. Par rapport aux travaux déjà publiés, l'originalité de la stratégie proposée réside dans la façon dont est menée cette seconde étape. Afin de reconstruire les empilements optimaux à partir de l'optimum continu issu de la première étape d'optimisation, IJsselmuiden *et al.* [4] utilisent un AE couplé à un métamodèle identifié en un point unique et exact en valeur et dérivée en ce point. Un premier métamodèle est identifié à l'optimum continu issu de la première étape. Le problème consistant à déterminer l'optimum discret correspondant à ce métamodèle est résolu à l'aide d'un AE. Un nouveau métamodèle est alors bâti en ce point et le processus est répété jusqu'à convergence. Dans la présente étude, la résolution par AE est itérativement répétée, non plus sur une succession de métamodèles bâtis à partir d'un unique point, mais sur un unique métamodèle progressivement enrichi par l'ajout des informations (valeurs et dérivées des fonctions objectifs) récoltées en chacun des optima déterminés aux itérations précédemment réalisées. La construction de ce métamodèle repose sur une adaptation originale de la méthode de Shepard pour l'optimisation composite, détaillée dans la partie 3 de cet article. La stratégie d'optimisation globale est schématisée en Figure 1. Cette stratégie est modulaire et chaque composant peut-être considéré comme une « boîte noire » vis-à-vis des autres composants.

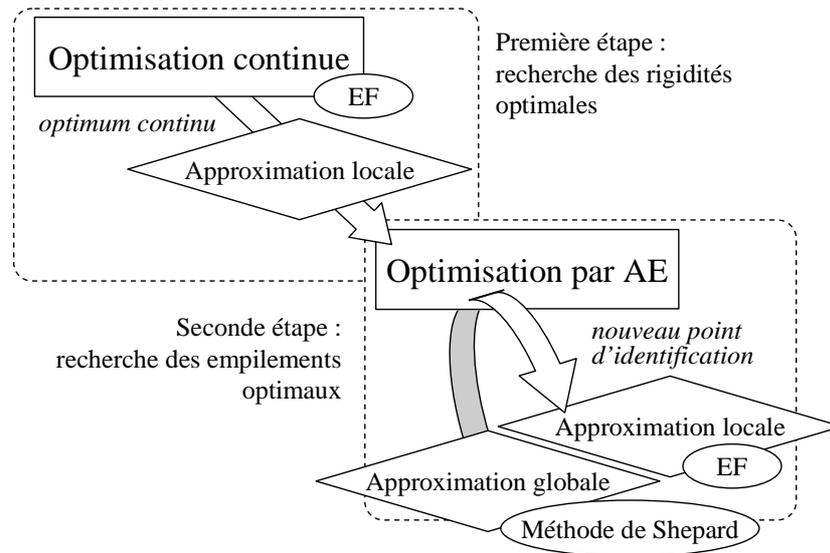


Fig. 1. Schéma de principe de la stratégie d'optimisation proposée.

## 2.1 Première étape : optimisation continue des rigidités et épaisseurs

Travailler sur les termes de la matrice de rigidité du stratifié, ou sur ses « paramètres de stratification » (*lamination parameters*) [5], est avantageux de bien des manières. Par rapport au problème formulé à partir des orientations des plis, la dimension de l'espace de décision est bien inférieure. En effet, douze variables permettent de décrire un empilement complet, dans le cas le plus général, et ce, indépendamment du nombre de plis du stratifié. L'espace de décision correspondant est continu et convexe, ce qui facilite l'usage d'algorithmes d'optimisation à gradients et la construction de métamodèles. De surcroît, et de façon générale, la réponse de la structure à une sollicitation extérieure est bien plus régulière par rapport aux rigidités des empilements que par rapport aux orientations de plis. De fait, l'influence problématique des fonctions périodiques décrivant la rotation des axes locaux associés aux plis par rapport au repère global du stratifié est contenue dans les termes de la matrice de rigidité du stratifié.

Néanmoins, certaines difficultés et limitations sont inhérentes à l'usage de termes de la matrice de rigidité comme variables d'optimisation. Ainsi, les rigidités de membrane ( $\mathbf{A}$ ), de flexion ( $\mathbf{D}$ ) et de couplage ( $\mathbf{B}$ ) ne peuvent être manipulées indépendamment et le jeu de conditions suffisantes définissant leur domaine réalisable est aujourd'hui inconnu. La deuxième limitation réside dans le fait que, en travaillant à l'échelle macroscopique associée au stratifié, les échelles inférieures restent inaccessibles. Ceci est particulièrement problématique lorsqu'il s'agit d'intégrer dans l'optimisation des considérations liées à la rupture du stratifié, généralement modélisée à l'échelle du pli et des interfaces entre plis. A cette étape de l'optimisation, ce sont donc uniquement des réponses structurales globales qui peuvent être prises en compte. Rupture et endommagement ne peuvent être que grossièrement évalués [6]. Enfin, la limitation principale réside dans le fait que l'optimum obtenu ne correspond pas à un design réel. L'empilement correspondant est inconnu à ce stade, en supposant qu'il existe compte tenu des contraintes de fabrication et de conception de l'empilement, d'où la nécessité d'une seconde étape d'optimisation.

La méthode utilisée ici pour l'optimisation continue des rigidités et épaisseurs a été proposée par IJsselmuiden *et al.* [3]. Cette méthode est valable pour des stratifiés dont les comportements de membrane et de flexion sont découplés ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ). L'enveloppe convexe du domaine des rigidités réalisables est approchée par un ensemble d'inégalités linéaires. La procédure d'optimisation est basée sur une technique d'approximations successives, ce qui permet de restreindre le nombre d'analyses structurales complètes nécessaires pour trouver l'optimum. L'idée consiste à approcher les objectifs et contraintes de l'optimisation par des fonctions dont chaque terme correspond aux variables associées à un empilement. L'optimisation est menée sur l'approximation après quoi

celle-ci est mise à jour et l'ensemble du processus est répété jusqu'à convergence. Sous sa forme la plus générale, l'approximation s'écrit de la façon suivante :

$$r \approx \sum_i Tr(\Psi_i^m \mathbf{A}_i + \Psi_i^f \mathbf{D}_i + \Phi_i^m \mathbf{A}_i^{-1} + \Phi_i^f \mathbf{D}_i^{-1}), \quad (\text{Eq. 1})$$

où  $i$  correspond au numéro du stratifié,  $\Psi_i^m$ ,  $\Psi_i^f$ ,  $\Phi_i^m$  et  $\Phi_i^f$  sont les matrices de sensibilité par rapport aux matrices de rigidité de membrane et de flexion et à leurs inverses, respectivement. Cette approximation est exacte en valeur et en dérivée à son point d'identification. La construction de cette approximation requiert une unique analyse structurale et une analyse de sensibilité. Cette dernière est réalisée par une méthode adjointe, son coût est donc faible. Ici, l'approximation est écrite pour l'inverse du facteur de flambement, toutefois elle peut être écrite pour n'importe quel critère de dimensionnement statique linéaire.

## 2.2 Seconde étape : optimisation discrète des empilements

Après avoir trouvé la distribution optimale de rigidité et d'épaisseur dans la structure, la seconde étape d'optimisation a pour but de définir les empilements correspondants. Cette seconde étape est la plus problématique. En effet, pour un dimensionnement réaliste, l'épaisseur du pli est fixée et les orientations de plis possibles sont peu nombreuses et déterminées par les contraintes de fabrication. Le problème d'optimisation résultant est discret et combinatoire.

Ce problème est habituellement traité à l'aide d'un AE ou d'une autre métaheuristique [7] en ciblant la distribution de rigidité optimale. Toutefois une telle approche peut conduire à des solutions sous-optimales. En effet, les rigidités optimales obtenues à l'issue de la première étape ne tiennent compte d'aucune contrainte sur les orientations et épaisseurs de plis. Par conséquent les rigidités optimales ne correspondent le plus souvent à aucun empilement réel. Il n'y a ainsi aucune garantie que les empilements permettant de s'approcher au mieux de l'optimum du problème continu formulé sur les rigidités correspondent à l'optimum réel du problème discret [8].

Nous proposons dans cette étude une méthode pour contourner efficacement cette difficulté. L'optimisation des empilements ne cible plus la distribution de rigidité optimale, mais les performances de l'optimum continu, en se basant sur un métamodèle progressivement enrichi (Cf. partie 3). Les fonctions objectifs et contraintes de la première étape sont toutes reprises lors de la seconde étape. De plus, les empilements sont maintenant connus, de telle sorte que n'importe quel critère de dimensionnement additionnel formulé à l'échelle mésoscopique peut être ajouté au problème. Le métamodèle est initialisé à partir de l'optimum continu. En pratique, la première étape permet de se doter d'une référence absolue pour évaluer et comparer les performances des solutions obtenues, ainsi que d'identifier rapidement la région d'intérêt de l'espace de décision pour réduire le coût de la construction du métamodèle.

Dans la suite, le problème d'optimisation des empilements est résolu à l'aide d'un AE. Deux types de problèmes sont abordés dans la partie 4 de cet article : un problème portant sur l'optimisation d'un empilement unique et un problème portant sur l'optimisation de structures conçues par patches. Un algorithme spécifique est utilisé pour chaque problème, ce que permet la modularité de la stratégie globale (Fig. 1).

Dans le cas de l'optimisation d'un empilement unique, c'est l'algorithme développé par Irisarri *et al.* [9,10] qui est directement employé.

La conception par patches suppose de gérer les arrêts ou reprises de plis entre patches adjacents de sorte à assurer un maximum de continuité des plis au sein de la structure. La contrainte de continuité (*blending constraint*) entre patches est gérée par le biais d'une modification de l'encodage des solutions par rapport au cas d'un empilement unique ou de plusieurs empilements indépendants. Une approche inspirée de « l'approche guidée » (*guide-based approach*), initialement proposée par Adams *et al.* [11], a ainsi été incorporée à l'algorithme. Une solution est encodée par autant de chromosomes qu'elle comporte de patches. Chaque chromosome représente l'empilement d'un

patch. Le guide correspond à l'empilement du patch le plus épais. Les empilements des autres patches sont définis à partir guide par suppression de plis. Le cas échéant, la contrainte d'équilibre est imposée par suppression de séquences équilibrées. En procédant de la sorte, la contrainte de continuité est imposée de façon moins restrictive que par les techniques usuelles de *inner-blending* ou *outer-blending* [11].

Les règles suivantes de dimensionnement des séquences d'empilement sont gérées dans ce travail :

- les empilements sont symétriques par rapport à leur plan moyen;
- les empilements sont équilibrés, avec le même nombre de plis orientés à  $+\theta^\circ$  qu'à  $-\theta^\circ$  (avec  $\theta$  différent de 0 et 90);
- les empilements présentent une proportion minimale de 10% des plis dans les directions  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  et  $90^\circ$ .

En plus de répondre à certaines considérations liées à la fabrication des solutions, ces règles permettent d'assurer une certaine cohérence entre les hypothèses en vigueur lors de la première et de la seconde étape de l'optimisation. La contrainte de symétrie entraîne le découplage des comportements de membrane et de flexion ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ). L'équilibre rend le comportement de membrane orthotrope. La règle des 10% peut être transposée comme une contrainte de rigidité minimale dans toutes les directions du plan et ainsi être imposée lors des deux étapes d'optimisation.

### 3. Adaptation de la méthode de Shepard

De nombreuses méthodes d'interpolation sont aujourd'hui basées sur une somme pondérée d'approximations locales, néanmoins la méthode d'origine a été proposée par Shepard [12]. Ces méthodes peuvent être utilisées pour construire une interpolation globale par sommation d'un ensemble d'interpolations locales. Ici « locale » ne signifie pas nécessairement que ces fonctions ont un support local, mais plutôt qu'elles peuvent être construites à partir de données locales. Toutes ces méthodes peuvent être présentées comme une généralisation de la méthode de Shepard.

#### 3.1 Principe général de la méthode

Le principe de base de la méthode de Shepard peut être résumé de la façon suivante. Considérant un ensemble de points irrégulièrement distribués  $x^{(i)}, i=1, \dots, n$  dans un espace euclidien  $\mathbf{X}$  de dimension  $m$  et considérant un ensemble de valeurs scalaires  $f_i$  telles que  $f_i = f(x^{(i)})$ , la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{X}$  et à valeurs réelles peut être approchée par la fonction interpolante  $\tilde{f}$ , telle que  $\tilde{f}(x^{(i)}) = f_i$  et définie par :

$$\tilde{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i(x) f_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i(x)}, \forall x \in \mathbf{X}, \quad (\text{Eq. 2})$$

où les fonctions de pondération  $\omega_i(x)$  sont définies comme l'inverse de la distance euclidienne entre la solution courante  $x$  et le point d'identification  $x^{(i)}$  :

$$\omega_i(x) = \frac{1}{\|x - x^{(i)}\|_2^2}. \quad (\text{Eq. 3})$$

Komargodski et Levin [13] ont démontré que la méthode de Shepard peut être employée pour construire une interpolation d'Hermite (interpolation en valeur et en dérivée) sous les deux hypothèses suivantes :

1. les approximations locales doivent être exactes en valeur et en dérivée à leur point d'identification respectif ;

2. les inverses des fonctions de pondération  $1/\omega_i(x)$  doivent être positives, nulles à leur origine, c'est-à-dire  $1/\omega_i(x^{(i)}) = 0$  et différentiables à leur origine.

L'approximation locale présentée en (Eq. 1) respecte cette première hypothèse. La première adaptation apportée dans ce travail à la méthode de Shepard consiste donc à utiliser cette approximation locale plutôt qu'une valeur scalaire pour construire l'interpolant global. Ainsi, les variables du métamodèle résultant sont les termes des matrices de rigidité décrivant le comportement élastique des empilements constitutifs de la structure. Les fonctions de pondérations doivent donc être définies dans l'espace des rigidités.

### 3.2 Distance dans l'espace des rigidités

Dans la méthode de Shepard d'origine, les fonctions de pondération sont inversement proportionnelles à la distance euclidienne entre la solution courante  $x$  et le point d'identification  $x^{(i)}$  (Eq. 3). Néanmoins le choix de la distance euclidienne n'est qu'une question de commodité, n'importe quelle fonction respectant les trois conditions suivantes pourrait convenir : (i) positivité, (ii) valeur nulle au point d'identification et (iii) différentiabilité. Dans la suite, nous introduisons une fonction de distance dans l'espace des rigidités (il ne s'agit toutefois pas d'une distance au sens mathématique, l'inégalité triangulaire n'étant pas prouvée), vérifiant ces trois propriétés et permettant la construction par la méthode de Shepard de métamodèles dans cet espace.

Considérons deux matrices de rigidité de membrane  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$ . Pour un état de déformation donné  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , l'écart relatif en rigidité entre les deux stratifiés s'écrit :

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{Eq. 4})$$

Cette équation (Eq. 4) à la forme d'un quotient de Rayleigh. Les extrema relatifs de ce quotient sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{A}_2 - \lambda \mathbf{A}_1) \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (\text{Eq. 5})$$

On définit alors une fonction de distance dans l'espace des rigidités de membrane par l'expression suivante :

$$d(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i + \frac{1}{\lambda_i} - 2 \right). \quad (\text{Eq. 6})$$

Cette forme assure que  $d(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = d(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1)$  et  $d(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1) = 0$ . La fonction de distance dans l'espace des rigidités de membrane se simplifie sous la forme :

$$d(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \text{Tr}(\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^{-1}) - 6. \quad (\text{Eq. 7})$$

Il est possible d'étendre cette définition au cas général de deux stratifiés. Notons  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  leurs matrices de rigidité  $6 \times 6$ . La distance dans l'espace des rigidités entre ces deux stratifiés s'écrit :

$$d(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \text{Tr}(\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^{-1}) - 12. \quad (\text{Eq. 8})$$

Dans le cas de structures conçues par patches, la distance entre deux solutions  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  est définie de la façon suivante :

$$d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sum_i S_i = \sum_i S_i [\text{Tr}(\mathbf{C}_{1,i}^{-1} \mathbf{C}_{2,i} + \mathbf{C}_{1,i} \mathbf{C}_{2,i}^{-1}) - 12], \quad (\text{Eq. 9})$$

où l'index  $i$  décrit les patches et  $S_i$  représente l'aire du patch  $i$ .

## 4. Exemples d'application

Deux types de problèmes sont abordés dans la suite : un problème portant sur l'optimisation d'un empilement unique et un autre portant sur l'optimisation de structures conçues par patches. Les applications qui suivent ont été intégralement réalisées sous MATLAB.

### 4.1 Maximisation de la raideur et de la force critique de flambement d'une plaque stratifiée

La structure considérée ici consiste en une plaque rectangulaire, de longueur  $a$  et de largeur  $b$ , soumise à une compression axiale  $N_x$  introduite par le biais d'un déplacement uniforme imposé au bord. La plaque est simplement appuyée sur ses quatre bords. On traite ici d'une configuration carrée ( $a/b = 1$ ), d'épaisseur 1,524 mm. Les propriétés du pli unidirectionnel sont les suivantes :  $E_{11} = 181$  GPa,  $E_{22} = 10,3$  GPa,  $G_{12} = 7,17$  GPa et  $\nu_{12} = 0,28$  GPa. L'empilement est symétrique équilibré et comporte 16 plis. Ce problème d'optimisation a été précédemment étudié par Olmedo et Gürdal [14] et IJsselmuiden *et al.* [3]. L'étude du compromis entre la résistance de la plaque au flambement et sa raideur dans le plan est intéressante dans la mesure où ces objectifs sont antagonistes.

Le facteur de flambement est déterminé pour chaque mode par la formule analytique suivante, dans laquelle les paramètres  $m$  et  $n$  représentent le nombre de demi-longueur d'onde dans les directions longitudinales et transverses, respectivement :

$$\lambda_{(m,n)} = \frac{\pi^2 [D_{11}(m/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m/a)^2(n/b)^2 + D_{22}(n/b)^4]}{N_x(m/a)^2}. \quad (\text{Eq. 10})$$

Le mode critique correspond au mode de facteur de flambement minimal. Dans ce cas, le calcul des matrices de sensibilité est entièrement analytique. Seule la matrice de sensibilité de l'inverse du facteur de flambement par rapport à l'inverse de la matrice de rigidité de flexion est non nulle.

La souplesse de la structure et sa sensibilité par rapport à l'inverse de la matrice de rigidité de membrane sont données par les deux expressions suivantes, où  $\mathbf{N}$  représente le vecteur des flux d'efforts dans le plan :

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \Phi^m = \frac{1}{2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T. \quad (\text{Eq. 11})$$

Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 2 sous forme de fronts de Pareto dans l'espace des objectifs, normalisés par les performances de la solution quasi-isotrope. L'optimum continu a été établi en [3] à l'aide de 85 analyses structurales. Le problème discret d'optimisation des empilements est résolu ici par énumération, et par la méthode décrite précédemment. Dans le cas où les orientations de plis sont choisies dans l'ensemble  $\{0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ\}$ , l'espace des empilements symétriques équilibrés à 16 plis comporte 12870 solutions. Pour la résolution du problème à l'aide de la méthode présentée dans cet article, la seconde étape de l'optimisation est initialisée à partir des deux solutions optimales correspondant aux deux objectifs considérés séparément. Les facteurs de flambement sont approximés séparément pour chaque mode. Le front de Pareto obtenu converge sur la solution obtenue par itération après 8 analyses structurales seulement.

La Figure 3 illustre l'évolution de l'erreur d'approximation sur le facteur de flambement correspondant au mode  $(m,n) = (1,2)$  avec l'ajout progressif de nouveaux points d'identification.

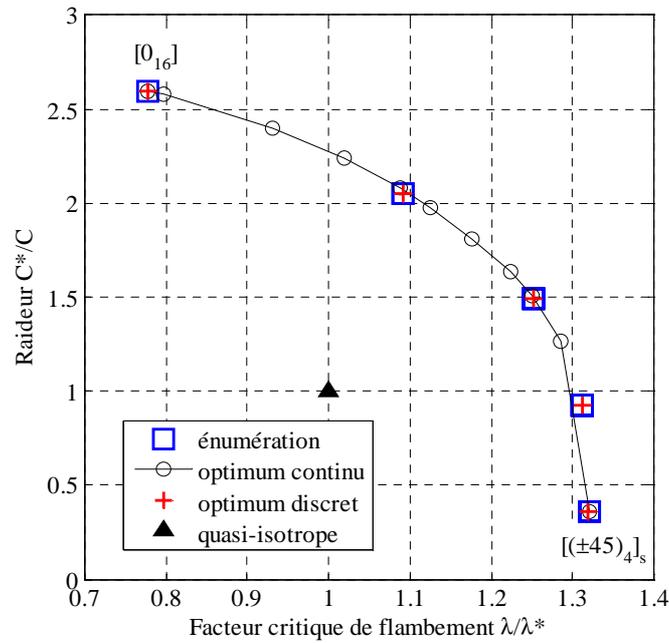


Fig. 2. Comparaison des fronts de Pareto obtenus par énumération des empilements réalisables, à l'issue de l'optimisation continue réalisée en [3] et par la stratégie proposée dans ce travail. Les résultats sont normalisés par rapport aux performances de la solution quasi-isotrope.

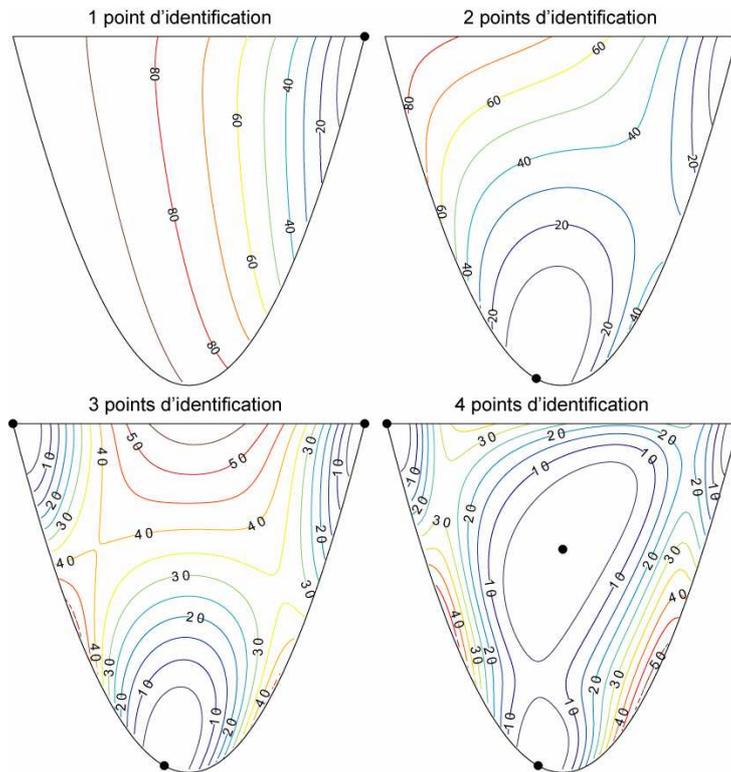


Fig. 3. Tracé des lignes de contour de l'erreur d'approximation sur le mode de flambement  $(m,n) = (1,2)$  dans le plan des paramètres de stratification  $(\xi_1^D, \xi_2^D)$  associés aux modules de flexion  $(D_{11}, D_{22})$ . Evolution de l'erreur avec l'ajout progressif de points d'identification (points noirs sur la figure). Les erreurs sont indiquées en pourcentages.

#### 4.2 Maximisation de la force critique de flambement pour un panneau à deux patchs

Un patch correspond à une région de la structure où l'empilement est uniforme. A chaque patch correspond un jeu de variables d'optimisation. Dans la première étape de l'optimisation, les patchs sont considérés comme étant indépendants. Lors de la seconde étape d'optimisation, un empilement est explicitement attribué à chaque patch. Les patchs peuvent toujours être considérés comme

indépendants, mais la probabilité pour que les solutions obtenues sous cette hypothèse soient impossibles à fabriquer est forte. En effet, les arrêts de plis doivent être contrôlés avec précision afin de maintenir une continuité suffisante entre les plis de patches adjacents de sorte à obtenir une structure fabricable. La conception par patch conduit à un compromis entre performances et fabricabilité de la solution. Les solutions obtenues sans soucis de continuité présente les performances les plus élevées et les plus proches de celle de l'optimum continu. Les solutions fabricables sont beaucoup plus contraintes, donc moins performantes.

L'exemple d'application présenté ici correspond à une plaque carrée ( $a/b = 1$ ,  $a = 508$  mm) composée de trois patches, un patch central et deux patches identiques le long de ses bords longitudinaux (Fig. 4). La plaque est simplement appuyée sur ses quatre bords et soumise à un effort de compression longitudinale. Les bords restent droits. Les propriétés du pli unidirectionnel sont les suivantes :  $E_{11} = 138$  GPa,  $E_{22} = 11$  GPa,  $G_{12} = 6,5$  GPa et  $\nu_{12} = 0,28$  GPa ; l'épaisseur du pli est de 0,125 mm. Les empilements sont symétriques et équilibrés. La force critique de flambement est obtenue par une analyse EF réalisée sous MATLAB. L'optimisation est réalisée sous une contrainte de volume maximal correspondant au volume de la plaque à 32 plis d'épaisseur uniforme. Le nombre de plis minimal pour un patch est de 8 plis. Les orientations de plis sont choisies dans l'ensemble  $\{0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ\}$ . La seconde étape de l'optimisation est arrêtée après 10 analyses structurales.

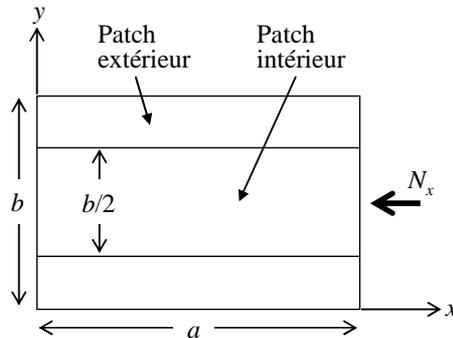


Fig. 4. Disposition des patches et chargement. Panneau raidi par patches longitudinaux.

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 1. L'optimisation conduit à des patches extérieurs plus épais que le patch intérieur, analogue à un panneau rigidifié par deux raidisseurs sur ses bords longitudinaux. La contrainte de volume maximale est active à l'optimum. Les proportions optimales de plis orientés à  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  et  $90^\circ$  sont proches de  $\{50\%, 50\%, 0\%\}$  pour le patch extérieur et  $\{0\%, 40\%, 60\%\}$  pour le patch intérieur lorsque la contrainte de continuité entre patches est désactivée. Lorsque cette contrainte est activée, les proportions pour le patch extérieur tendent vers  $\{33\%, 33\%, 33\%\}$ , d'où des performances inférieures.

Optimisation continue	$N^*$ (N/mm)	Nombre d'analyses EF	Patch	Nombre de plis	$\xi_1^A$	$\xi_2^A$	$\xi_1^D$	$\xi_2^D$
	236,7				37	Extérieur	50,75	0,52
			Intérieur	13,25	-0,60	-0,25	-0,60	-0,25

Optimisation discrète	$N/N^*$ (%)	Nombre d'analyses EF	Patch	Nombre de plis	Empilements
Sans continuité entre patches	76				
		Intérieur	14	$[90/-45/45/90_4]_S$	
Avec continuité entre patches	59	10	Extérieur	48	$[0/45_2/-45/0/-45/45/-45/90_2/-45/0/45/90_4/45/0_5]_S$
			Intérieur	16	$[45/-45/90_6]_S$

Tab. 1. Résultats de l'optimisation du panneau raidi par patches longitudinaux. Les paramètres de stratification indiqués correspondent, avec les épaisseurs des patches, aux variables d'optimisation de la première étape d'optimisation. Les nombres de plis indiqués pour l'optimisation continue correspondent aux épaisseurs de patch divisées par l'épaisseur du pli. Pour l'optimisation discrète avec continuité des plis entre patch, les plis arrêtés sont notés en gras.

## 5. Conclusion et perspectives

Nous présentons dans cet article une stratégie complète pour l'optimisation de structures composées de stratifiés à fibres droites. Cette stratégie est basée sur une approche en deux étapes et une technique originale de métamodélisation basée sur la méthode de Shepard. La première étape de l'optimisation retourne la distribution optimale de rigidité et d'épaisseur dans la structure. Le problème d'optimisation est formulé à partir des paramètres de stratification et résolu dans le cadre d'une approche par approximations successives, couplée à un algorithme d'optimisation continue. La seconde étape de l'optimisation a pour but de déterminer les empilements optimaux. La résolution est effectuée dans le cadre d'une approche itérative basée sur un algorithme génétique et un métamodèle enrichi au fur et à mesure des itérations. Le métamodèle est construit à partir des approximations locales associées aux optima issus des itérations précédentes. Le métamodèle est exact en valeur et dérivée à ses points d'identification. L'efficacité de la stratégie réside dans le fait que le métamodèle est initialisé en un unique point d'identification – l'optimum continu issu de la première étape – et itérativement enrichi par la suite. Aucun plan d'expérience initial n'est nécessaire pour son identification. Ainsi, l'effort de calcul dépensé avec les techniques d'approximation usuelles pour construire une approximation raisonnablement précise sur l'ensemble de l'espace de décision est ici utilisé pour augmenter la précision du métamodèle dans la région d'intérêt uniquement. La stratégie proposée est modulaire et générale, de telle sorte que les travaux en cours portent sur son extension à l'optimisation de structures réalisées par placement de fibres.

## Références

- [1] H. GHIASI, D. PASINI, L. LESSARD, « Optimum Stacking Sequence Design of Composite Materials. Part I: Constant Stiffness Design ». *Composite Structures*, Vol. 90, pp. 1-11, 2009.
- [2] H. GHIASI, K. FAYAZBAKHS, D. PASINI, L. LESSARD, « Optimum Stacking Sequence Design of Composite Materials. Part II: Variable Stiffness Design ». *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1-13, 2010.
- [3] S.T. IJSSELMUIDEN, M.M. ABDALLA, Z. GÜRDAL, « Optimization of Variable-Stiffness Panels for Maximum Buckling Load Using Lamination Parameters ». *AIAA Journal*, Vol. 48, pp. 134-143, 2010.
- [4] S.T. IJSSELMUIDEN, M.M. ABDALLA, O. SERESTA, Z. GÜRDAL, « Multi-step blended stacking sequence design of panel assemblies with buckling constraints ». *Composites: Part B*, Vol. 40, pp. 329-336, 2009.
- [5] Z. GÜRDAL, R.T. HAFTKA, P. HAJELA, « Design and Optimization of Laminated Composite Materials ». John Wiley and Sons Inc., 1999.
- [6] S.T. IJSSELMUIDEN, M.M. ABDALLA, Z. GÜRDAL, « Implementation of Strength Based Failure Criteria in the Lamination Parameter Design Space ». *AIAA Journal*, Vol. 46, pp. 1826-1834, 2008.
- [7] J.E. HERENCIA, P.M. WEAVER, M.I. FRISWELL, « Optimization of Long Anisotropic Laminated Fiber Composite Panels with T-Shaped Stiffeners ». *AIAA Journal*, Vol. 45, pp. 2497-2509, 2007.
- [8] J.E. HERENCIA, R.T. HAFTKA, P.M. WEAVER, M.I. FRISWELL, « Lay-Up Optimization of Composite Stiffened Panels Using Linear Approximations in Lamination Space ». (TN), *AIAA Journal*, Vol. 46, pp. 2387-2391, 2008.
- [9] F.X. IRISARRI, D.H. BASSIR, N. CARRERE, J.F. MAIRE, « Multiobjective stacking sequence optimization for laminated composite structures ». *Composites Science and Technology*, Vol. 69, pp. 983-990, 2009.
- [10] F.X. IRISARRI, F. LAURIN, F.H. LEROY, J.F. MAIRE, « Computational strategy for multiobjective optimization of composite stiffened panels ». *Composite structures*, Vol. 93, pp. 1158-1167, 2011.
- [11] D.B. ADAMS, L.T. WATSON, Z. GÜRDAL, C.M. ANDERSON-COOK, « Genetic algorithm optimization and blending of composite laminates by locally reducing laminate thickness ». *Advances in Eng. Soft.*, Vol. 35, pp. 35-43, 2004.
- [12] D. SHEPARD, « A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data ». *Proceedings of 23rd ACM National Conference*, pp. 517-523, 1968.
- [13] Z. KOMARGODSKI, D. LEVIN, « Hermite type moving-least-squares approximations ». *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 51, pp. 1223-1232, 2006.
- [14] Z. GÜRDAL, R. OLMEDO, « In-Plane Response of Laminates with Spatially Varying Fiber Orientations: Variable Stiffness Concept ». *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 751-758, 1993.