



**HAL**  
open science

## Prédiction du comportement viscoélastique de matériaux composites textiles par une approche d'homogénéisation

Amine El Mourid, Rajamohan Ganesan, Martin Lévesque

### ► To cite this version:

Amine El Mourid, Rajamohan Ganesan, Martin Lévesque. Prédiction du comportement viscoélastique de matériaux composites textiles par une approche d'homogénéisation. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.65. hal-00597939

**HAL Id: hal-00597939**

**<https://hal.science/hal-00597939>**

Submitted on 2 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Prédiction du comportement viscoélastique de matériaux composites textiles par une approche d'homogénéisation

## *Prediction of the viscoelastic behaviour of textile composites by homogenization techniques*

Amine El Mourid<sup>1</sup>, Rajamohan Ganesan<sup>2</sup> et Martin Lévesque<sup>1</sup>

1 : CREPEC, Département de Génie Mécanique  
École Polytechnique de Montréal - Québec - Canada  
e-mail : amine.el-mourid@polymtl.ca, [martin.levesque@polymtl.ca](mailto:martin.levesque@polymtl.ca)

2 : CREPEC, Engineering department  
Concordia University - Canada  
e-mail : [ganesan@alcor.concordia.ca](mailto:ganesan@alcor.concordia.ca)

### Résumé

Il est possible d'utiliser des techniques d'homogénéisation analytiques et numériques afin d'évaluer le comportement effectif de matériaux composites textiles composés d'une matrice viscoélastique et de fibres élastiques. Les techniques analytiques permettent d'obtenir des estimations rapides du comportement effectif des composites, en remplaçant les fibres textiles par des inclusions ellipsoïdales, dont la solution théorique est connue. Dans cette étude, les modèles Mori-Tanaka et auto-cohérent sont utilisés pour prédire le comportement viscoélastique de composites. Afin de vérifier la validité des modèles, des modèles d'homogénéisation numériques basés sur des simulations par éléments finis ont été utilisés. L'architecture réelle des composites textiles a été reconstituée dans un modèle géométrique solide, qui a été par la suite maillé afin d'évaluer le comportement viscoélastique. La performance des modèles analytiques a été évaluée pour plusieurs fractions volumiques et contrastes, afin de déterminer les limites de la validité de l'approche analytique. Il a été observé que le modèle de Mori-Tanaka présente les estimations les plus précises aux faibles contrastes et fractions volumiques. De plus, le modèle auto-cohérent n'arrive pas à reproduire les tendances observées pour la partie transitoire du comportement viscoélastique.

### Abstract

The effective behaviour of composite materials made of a viscoelastic matrix and elastic fibres can be predicted with the help of numerical and analytical homogenization techniques. Analytical methods can give fast estimates of the effective behaviour, by replacing the yarns with ellipsoidal inclusions, for which the theoretical solution is known. In this study, Mori-Tanaka and the self-consistent methods were used to predict the viscoelastic behaviour of the composite. To evaluate the performance of analytical models, finite element simulations of the same textile geometry were performed. A realistic solid model of the textile geometry was created and meshed in a finite element software to evaluate the viscoelastic response of the composite. The performance of analytical models was verified for different fibre volume fractions and stiffness contrasts, in order to determine the validity of the analytical methodology. It has been observed that the Mori-Tanaka model delivers more accurate estimates for low fibre volume fractions and stiffness contrasts. Moreover, the self-consistent scheme was not suitable for reproducing the transient part of the viscoelastic behaviour.

**Mots Clés :** Matériau composite, Modèle d'homogénéisation, Composites textiles, Transformée de Laplace-Carson, Simulation numérique.

**Keywords :** Composite material, Homogenization models, Textile composites, Laplace-Carson transform, Numerical simulation

## 1. Introduction

Les composites à matrice polymère sont de plus en plus utilisés dans les turbines d'avions, et ce, dans des zones où la température de service peut atteindre 300°C. Bien que la matrice soit formulée pour supporter ces températures, son comportement viscoélastique se trouve amplifié par rapport à celui à température ambiante. Afin de cerner le comportement mécanique de matériaux composites polymères à haute température, il est possible de compléter les essais expérimentaux par des techniques d'homogénéisation.

Dans la littérature, il existe un premier type de modèles basé sur la mécanique des milieux continus [1,2]. Ces développements analytiques sont généralement réservés à des cas où les inclusions ont des orientations simples. Gommers *et al.* [3] ont développé une méthodologie capable de tenir compte de la géométrie ainsi que de l'orientation des fibres dans les modèles analytiques, afin de prédire le comportement élastique de composites textiles. Ces modèles peuvent être étendus pour prédire le comportement viscoélastique de matériaux composites en résolvant les équations d'homogénéisation dans l'espace Laplace-Carson [4,5]. La solution peut être retrouvée dans le domaine temporel à l'aide d'algorithmes d'inversion numériques [6].

Une deuxième technique consiste à simuler le comportement des composites textiles dans un logiciel par éléments finis. La modélisation de la géométrie des composites textiles a déjà été réalisée par plusieurs équipes universitaires [7,8]. Ces modèles peuvent être utilisés pour prédire le comportement viscoélastique des matériaux textiles en modélisant le Volume Élémentaire Représentatif (VER) de la géométrie étudiée. À l'aide de conditions périodiques aux rives, il est possible de retrouver numériquement le tenseur de relaxation du matériau en imposant une série de déplacements unitaires [9].

L'objectif de cet article est de présenter une comparaison entre les prédictions de modèles analytiques et numériques pour le comportement viscoélastique linéaire de composites textiles tressés. La section 2 présente la méthodologie utilisée pour obtenir le comportement viscoélastique linéaire à l'aide des méthodes analytiques. Par la suite, la modélisation du comportement viscoélastique dans un logiciel par éléments finis est présentée à la section 3. La section 4 résume la méthodologie adoptée afin de comparer les modèles analytiques et numériques. Finalement, les comparaisons entre les modèles analytiques et numériques pour une des composantes du tenseur de relaxation sont présentées à la section 5.

## 2. Homogénéisation analytique du comportement viscoélastique de composites tressés

### 2.1 Comportement effectif de textiles

Pour un composite constitué de deux matériaux différents (i.e. fibre et matrice) mais dont les fibres sont orientées suivant une distribution statistique, le comportement effectif  $\tilde{\mathbf{C}}$  est donné par [10] :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_0 + \rho_1(\langle \mathbf{C}_1 : \mathbf{A} \rangle - \mathbf{C}_0 : \langle \mathbf{A} \rangle) \quad (\text{Eq. 1})$$

où  $\tilde{\mathbf{C}}$  représente le tenseur de rigidité effectif du composite,  $\mathbf{A}$  le tenseur de localisation des déformations pour une inclusion ellipsoïdale,  $\rho_1$  la fraction volumique des renforts,  $\mathbf{C}_1$  la rigidité des fibres et  $\mathbf{C}_0$  celle de la matrice. Le symbole  $\langle \cdot \rangle$  illustre la moyenne d'orientation et correspond à l'opération :

$$\langle L_{ijkl} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \phi, \beta) \sin \theta a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} L_{mnop} d\theta d\phi d\beta \quad (\text{Eq. 2})$$



Fig. 1. 1. Fibre textile dans un composite tissé ou tressé. 2. Chacune des fibres dans le composite est remplacée par une série d'inclusions équivalentes, qui ont le rapport de forme et l'orientation de la fibre à la position de l'inclusion. Le composite devient un assemblage d'une matrice dans laquelle baignent plusieurs inclusions ellipsoïdales.

où  $g(\theta, \phi, \beta)$  représente la probabilité qu'une inclusion soit orientée selon une base définie par les angles d'Euler  $(\theta, \phi, \beta)$  et  $\mathbf{a}$  la matrice de changement de base usuelle. Les angles d'Euler sont illustrés à la (Fig. 2.2). Le tenseur de localisation des déformations prend une forme différente selon la méthode d'homogénéisation utilisée. Dans la méthode Mori-Tanaka, le tenseur de localisation des déformations prend la forme:

$$\mathbf{A}_{dil} = [\mathbf{I} + \mathbf{S} : \mathbf{C}_0^{-1} : (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)]^{-1} \quad (\text{Eq. 3.1})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{dil} : [(\mathbf{1} - \rho_1)\mathbf{I} + \rho_1\mathbf{A}_{dil}]^{-1} \quad (\text{Eq. 3.2})$$

où  $\mathbf{I}$  représente le tenseur identité d'ordre quatre et  $\mathbf{S}$  le tenseur d'Eshelby. Dans la méthode auto-cohérente, le tenseur de localisation des déformations prend la forme suivante :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I} + \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : (\mathbf{C}_1 - \tilde{\mathbf{C}})]^{-1} \quad (\text{Eq. 5})$$

L'utilisation de la méthode auto-cohérente conduit à une équation d'homogénéisation implicite car  $\tilde{\mathbf{C}}$  apparaît dans  $\mathbf{A}$ . Il est donc nécessaire de solutionner l'équation 1 avec une méthode numérique. Afin de pouvoir utiliser les techniques analytiques présentées plus haut, la méthodologie développée dans [3] a été utilisée. Chacune des fibres de l'architecture textile est divisée en une série d'inclusions ellipsoïdales, ouvrant la voie à l'utilisation des modèles analytiques. Afin de pouvoir obtenir une solution approchée du comportement réel, la géométrie ainsi que l'orientation des inclusions doivent être prises en considération. La (Fig.1) illustre schématiquement cette opération.

Le premier paramètre à considérer est la géométrie de l'inclusion. La fibre est remplacée par une série d'ellipsoïdes, définis par trois dimensions caractéristiques  $a_1, a_2$  et  $a_3$ , qui sont présentées à la (Fig. 2.1). Les dimensions  $a_2$  et  $a_3$  permettent de définir la section de la fibre. Dans un composite textile, la géométrie de cette section est habituellement lenticulaire, mais peut-être approximée par une ellipse dans le modèle analytique, pour laquelle  $a_2$  est différente  $a_3$ . La dimension  $a_1$  représente la longueur de l'ellipsoïde. Enfin, le rapport  $a_1/a_3$  représente le ratio entre la longueur de l'ellipsoïde et le diamètre de sa section. Ce rapport de forme influence grandement les résultats des différentes techniques d'homogénéisation. Dans ce travail, l'allongement de la fibre est considéré comme infini afin de simuler la continuité des fibres dans le textile.

L'orientation spatiale représente le deuxième facteur qui peut être pris en compte par cette méthodologie. Deux angles, présentés à la (Fig. 2.2), permettent de définir l'orientation d'une inclusion ellipsoïdale dans l'espace. Le troisième angle  $\beta$ , qui représente la rotation d'une inclusion par rapport à son axe principal (x dans la (Fig. 2.1)), n'est pas nécessaire car les fibres sont toujours orientées dans le plan de l'architecture textile [3]. La disposition des inclusions dans l'espace permet de créer une

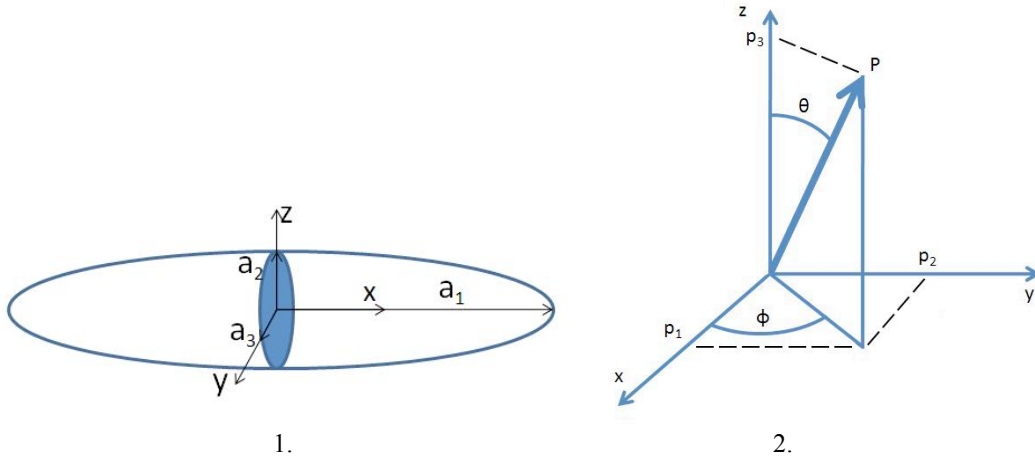


Fig. 2. 1. Géométrie et orientation des inclusions ellipsoïdales. Chacune des inclusion ellipsoïdales est définie par deux rapports de formes :  $\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_3$  qui représente le rapport d'allongement de l'inclusion, et  $\mathbf{a}_2/\mathbf{a}_3$  qui représente le rapport d'aplatissement de l'ellipsoïde. Le rapport d'allongement choisi est infini, pour simuler la continuité des fibres. 2. L'orientation des fibres est définies par deux angles :  $\phi$  qui représente l'orientation de la fibre dans le plan et  $\theta$ , définissant l'orientation de la fibre en dehors du plan.

fonction de distribution d'orientation, qui permet de représenter la probabilité de trouver une fibre à une orientation spatiale donnée. En utilisant les tenseurs d'orientations définis par Advani *et al.* [11], il est possible de définir des orientations équivalentes, capables de prendre en compte l'ensemble des orientations présentes dans le textile.

## 2.2 Extension des modèles analytiques au comportement viscoélastique linéaire

La méthodologie d'homogénéisation de composites textiles peut-être étendue pour tenir compte du comportement viscoélastique de fibres élastiques immergées dans une matrice ayant un comportement viscoélastique linéaire. Pour un matériau viscoélastique linéaire, la loi de comportement prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{C}(t - \tau) : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} \quad (\text{Eq. 4})$$

où  $\mathbf{C}(t - \tau)$  est le tenseur de relaxation, défini par :

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^o + \sum_1^S C_{ijkl}^s e^{-\lambda_s t} \quad (\text{Eq. 5})$$

où  $C_{ijkl}^o$  ainsi que  $C_{ijkl}^s$  sont semi-définis positifs et les  $\lambda_s$  représentent les temps de relaxation du matériau viscoélastique tels que  $\lambda_s > 0$ . Si on applique la transformée de Laplace-Carson à l'équation 5, on obtient:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(p) = \mathbf{C}^*(p) : \boldsymbol{\varepsilon}^*(p) \quad (\text{Eq. 6})$$

où  $p$  est la variable remplaçant le temps dans le domaine Laplace-Carson,  $\boldsymbol{\sigma}^*$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  et  $\mathbf{C}^*$  représentent respectivement la contrainte, la déformation ainsi que le tenseur de relaxation dans le domaine Laplace-Carson. La relation entre la contrainte et la déformation redevient linéaire, ce qui permet d'utiliser les équations développées dans le domaine élastique linéaire. Cependant, la solution obtenue se trouve dans le domaine Laplace-Carson et doit être inversée afin d'obtenir la réponse dans le domaine temporel. Si une solution analytique au problème d'inversion est parfois possible, elle est impossible à

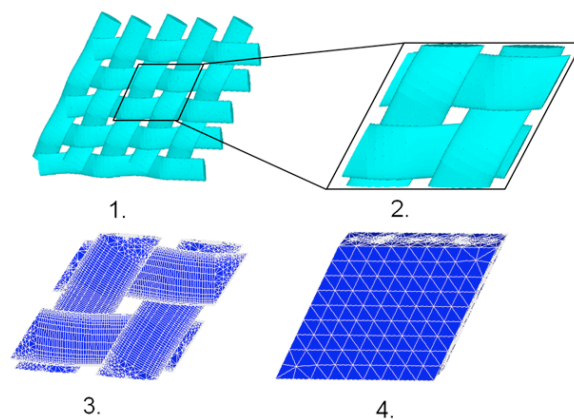


Fig. 3. Étapes nécessaires à la création du volume élémentaire représentatif sur le logiciel ANSYS. 1. Un modèle solide représentant l'architecture du composite textile est modélisé dans le logiciel Wisetex. 2. Une cellule unitaire périodique est sélectionnée afin de représenter le comportement de l'ensemble du matériau. 3. Le modèle périodique est maillé. 4. La matrice enveloppant les fibres est modélisée puis maillée.

trouver dans la plupart des cas. Dans ce travail, la méthode d'inversion numérique des transformées de Laplace-Carson proposée par Lévesque *et al.* [6] a été utilisée. Cette méthode est une amélioration de la méthode des collocations proposée par Schapery [12] et permet de s'assurer que le matériau résultant dans l'espace temporel rencontre les exigences de la thermodynamique.

### 3. Homogénéisation numérique du comportement viscoélastique de composites tressés

#### 3.1 Création du modèle solide

Les techniques d'homogénéisation numériques sont principalement basées sur la méthode des éléments finis [9,13]. Afin d'estimer le comportement effectif du composite, un VER de la géométrie réelle a été généré. Il est important de rappeler que les composites textiles ont une structure géométrique périodique et déterministe. Le VER est donc représenté par la cellule unitaire périodique de l'arrangement textile. La première étape réside dans la création d'un modèle solide du composite. Ce modèle est réalisé à l'aide du logiciel Wisetex [7] qui permet ensuite d'exporter la géométrie vers le code de calculs par éléments finis ANSYS. L'utilisateur doit par la suite mailler les fibres et la matrice, en plus d'imposer les conditions aux rives périodiques. Une loi de comportement viscoélastique linéaire est appliquée à la matrice et le comportement de la fibre est décrit par une loi de comportement élastique linéaire. La (Fig. 3) décrit les principales étapes de la création du modèle d'éléments finis.

#### 3.2 Évaluation de la contrainte macroscopique

Le tenseur des contraintes macroscopiques est classiquement défini par:

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma(x) dV \quad (\text{Éq. 10})$$

où  $V$  est le volume du VER et  $\sigma(x)$  le tenseur des contraintes dans chaque élément du modèle. L'équation 10 peut être évaluée en sommant  $\sigma(x)$  dans chaque élément multiplié par son volume, puis en divisant par le volume total. Enfin, les composantes du tenseur de relaxation relient la déformation imposée aux contraintes macroscopiques évaluées. Il est donc possible de calculer les composantes du tenseur de relaxation à chaque pas de temps.

### 4. Méthodologie de comparaison

Contraste	$E_{11}$	$E_{22}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$
R=5	25	5	0.27	0.3	5
R=10	50	10	0.27	0.3	10
R=20	100	20	0.27	0.3	20
R=40	200	40	0.27	0.3	40
R=80	400	80	0.27	0.3	80

Tab. 1. Propriétés des fibres selon le contraste R choisi

Propriétés	$E_{11}$	$\nu_{12}$
Matrice	$3 + 2e^{-2t}$	0.3

Tab. 2. Propriétés de la matrice

Les techniques d'homogénéisation analytiques ont été comparées aux simulations par éléments finis pour une large gamme de propriétés afin de vérifier les performances des modèles pour une architecture textile tressée. La méthodologie a été utilisée pour des fibres isotropes transverses ayant un comportement élastique et une matrice isotrope ayant un comportement viscoélastique linéaire. Le composite textile présenté est un tressage bi axial, avec des fibres à  $\pm 30^\circ$ . Cinq fractions volumiques, entre 10% et 45%, ont été choisies afin de calculer le tenseur de relaxation du composite. Le (Tab. 1) donne les propriétés des différentes fibres simulées et le (Tab. 2) donne les propriétés viscoélastiques de la matrice. La colonne « contraste » du (Tab. 1) est le rapport en le module d'Young longitudinal des fibres et celui de la matrice à  $t = 0$ .

### 5. Résultats

Les prédictions des modèles Mori-Tanaka et de la méthode auto-cohérente sont comparées à celles des éléments finis pour les parties permanente et transitoire du tenseur de relaxation. La partie transitoire représente la partie visqueuse du comportement du matériau, tandis que la partie permanente représente

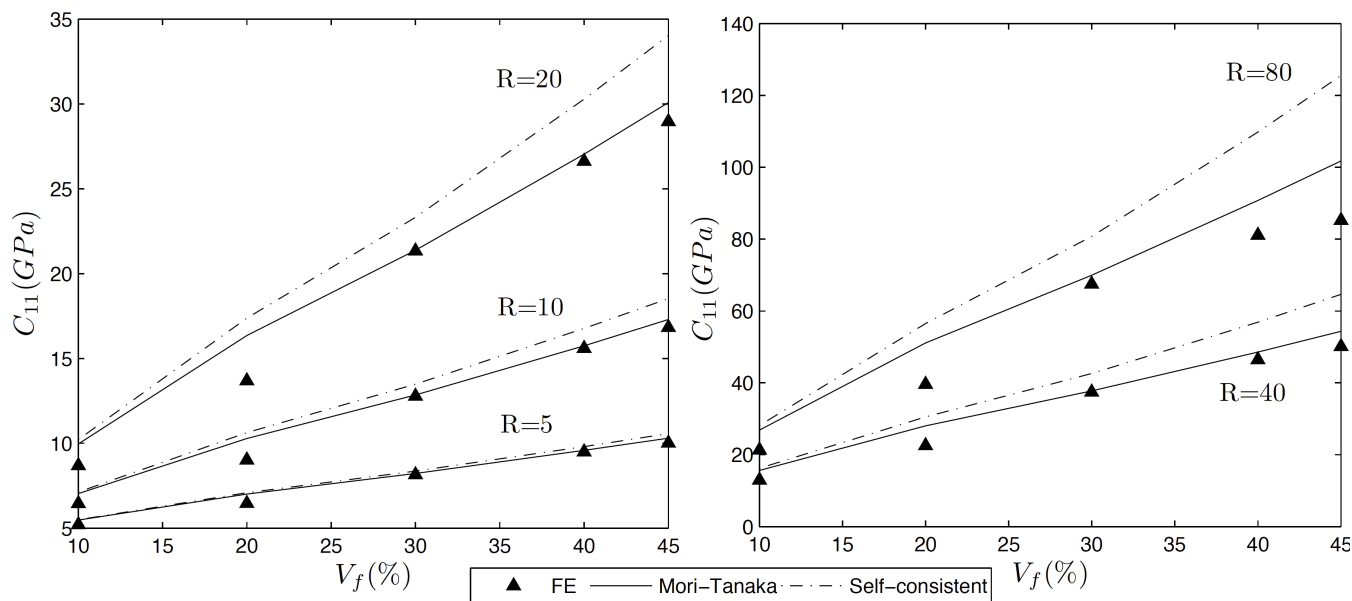


Fig. 4. Partie permanente de la composante  $C_{11}$  du tenseur de relaxation, en fonction de la fraction volumique et du contraste R entre les fibres et la matrice. Les résultats sont présentés pour la méthode Mori-Tanaka, le schéma auto-cohérent et les simulations par éléments finis. La composante  $C_{11}$  relie la déformation  $\epsilon_{11}$  à la contrainte  $\sigma_{11}$

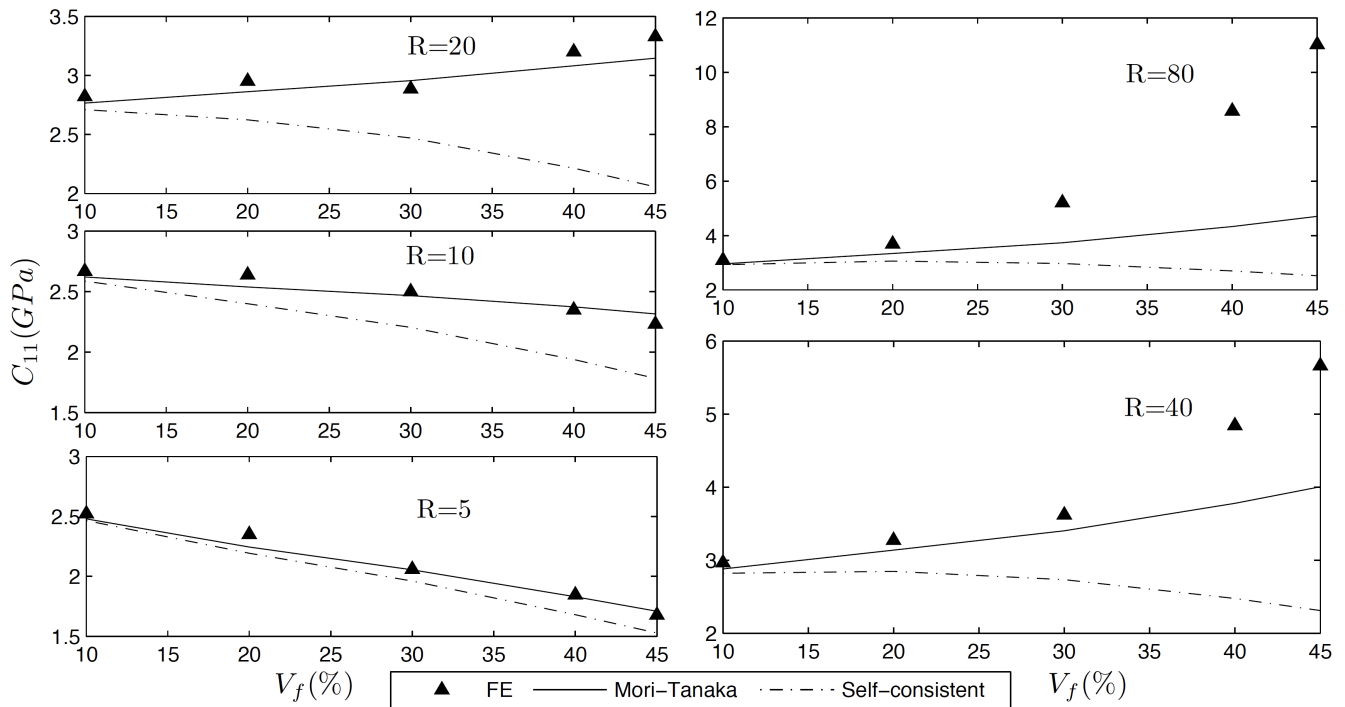


Fig. 5. Partie transitoire de la composante  $C_{11}$  du tenseur de relaxation, en fonction de la fraction volumique et du contraste  $R$  entre les fibres et la matrice. Les résultats sont présentés pour la méthode Mori-Tanaka, le schéma auto-cohérent et les simulations par éléments finis.

la composante élastique du comportement. La (Fig. 4) montre les résultats obtenus pour la composante  $C_{11}$  du tenseur de relaxation pour la partie permanente. De manière générale, les modèles analytiques surestiment les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, quelque soit le rapport de contraste ou la fraction volumique calculée. De plus, la méthode Mori-Tanaka permet d'obtenir des résultats plus proches du modèle par éléments finis par rapport à la méthode auto-cohérente. Les résultats analytiques sont assez proches des modèles par éléments finis pour les rapports de rigidités allant jusqu'à 20. L'écart entre les résultats pour les fractions volumiques élevées ainsi que les rapports de forme élevés est probablement attribuable à l'hypothèse de rapport de forme infini choisi pour tenir compte de la continuité des fibres dans les modèles analytiques. Cette hypothèse augmente la rigidité calculée par les techniques analytiques. Il est aussi intéressant de remarquer que les modèles d'éléments finis prédisent une stabilisation de la rigidité lorsque l'on passe de 40% à 45% de fraction volumique de fibres. Cela est attribuable au fait que la courbure des fibres augmente dans le tissu pour permettre une compaction plus importante. Cela se traduit par un transfert de charge moins efficace, et par conséquent, des propriétés effectives moins élevées. Les modèles d'homogénéisation supposent un rapport de forme infini pour les fibres et ne sont donc pas capables de capturer cet effet.

La comparaison des résultats pour la partie transitoire, présentés à la (Fig. 5), permet de confirmer la supériorité de la méthode Mori-Tanaka par rapport au schéma auto-cohérent. On peut remarquer que le modèle de Mori-Tanaka ainsi que les éléments finis prédisent une augmentation de la partie transitoire avec la fraction volumique tandis que le schéma auto-cohérent prédit le contraire. On peut aussi remarquer que, pour les paramètres simulés, la précision des modèles d'homogénéisation analytiques laisse à désirer.



## 6. Conclusion

Les résultats présentés montrent une première tentative de simulation du comportement viscoélastique de textiles tressés à l'aide de techniques d'homogénéisation analytiques, dont les prédictions sont comparées aux résultats d'homogénéisation numérique. La comparaison des modèles analytiques aux simulations par éléments finis montre une certaine faiblesse de ces modèles pour la prédiction des parties transitoire et permanente des tenseurs de relaxation, à fraction volumique des fibres et contraste élevés. Le décalage des résultats est probablement attribuable à l'hypothèse de rapport de forme infini des inclusions dans les modèles analytiques. Une étude plus poussée permettrait d'évaluer un rapport de forme convenable pour prédire le comportement viscoélastique de composites tressés. Enfin, l'étude présentée ici montre les résultats pour une des composantes du tenseur de relaxation, et pour un angle de tissage du composite tressé. Il est donc nécessaire d'évaluer la performance des méthodes analytiques pour la prédiction de toutes les composantes du tenseur de relaxation, afin de valider la méthodologie présentée.

## Références

- [1] Y. Benveniste. «A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials». *Mechanics of Materials*, Vol.6, pp.147 – 157, 1987.
- [2] A. Zaoui. «Continuum micromechanics: Survey». *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.28, pp.808 – 816, 2002
- [3] B. Gommers, I.Verpoest, et P.Van Houtte. «The mori-tanaka method applied to textile composite materials». *Acta Materialia*, Vol.46, pp. 2223 – 2235, 1998.
- [4] Z. Hashin. «Viscoelastic fibre reinforced materials». *AIAA Journal*, Vol.4, pp.1411 – 1417, 1966.
- [5] N. Laws and R. McLaughlin. «Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials». *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol.359, pp.251 –273, 1978.
- [6] M. Lévesque, M. D. Gilchrist, N. Bouleau, K. Derrien, and D. Baptiste. « Numerical inversion of the laplace-carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media». *Computational mechanics*, Vol. 40, pp. 771–789, 2007.
- [7] I. Verpoest et S. V. Lomov. « Virtual textile composites software wisetex: Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis». *Composites Science and Technology*, Vol.65, pp.2563 – 2574, 2005.
- [8] C.C.Wong, A.C. Long, M. Sherburn, F. Robitaille, P. Harrison, and C.D. Rudd. « Comparisons of novel and efficient approaches for permeability prediction based on the fabric architecture». *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol.37 pp.847 – 857, 2006.
- [9] S. V. Lomov, D. S. Ivanov, I. Verpoest, M. Zako, T. Kurashiki, H. Nakai, et S. Hirosawa. « Meso-fe modelling of textile composites: Road map, data flow and algorithms». *Composite Science and Technology*, Vol. 67, pp. 1870 – 1891, 2007.
- [10] M. L. Dunn, H. Ledbetter, P. R. Heyliger, and C. S Choi. «Elastic constants of textured short-fibers composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44, pp.1509 – 1541, 1996.
- [11] SG. Advani, C. Tucker. « The Use of Tensors to Describe and Predict Fiber Orientation in Short Fiber Composites». *Journal of Rheology*, Vol. 31, pp. 751–784, 1987.
- [12] R.A Schapery. 1961. « A simple collocation method for fitting viscoelastic models to experimental data». *GALCIT SM 61-23A* , California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [13] R.Barello et M. Lévesque. « Comparison between the relaxation spectra obtained from homogenization models and finite elements simulations for the same composites». *International Journal of Solid and Structures*, Vol.45, pp 850-867, 2007.