



HAL
open science

Une théorie de poutre composite basée sur la solution 3D de St Venant

R. El Fatmi, N. Ghazouani

► **To cite this version:**

R. El Fatmi, N. Ghazouani. Une théorie de poutre composite basée sur la solution 3D de St Venant. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.13. hal-00597877

HAL Id: hal-00597877

<https://hal.science/hal-00597877>

Submitted on 2 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une théorie de poutre composite basée sur la solution 3D de St Venant

A composite beam theory built on 3D St Venant's solution

R. El Fatmi¹, N. Ghazouani²

¹ LGC-ENIT, UniversitéTunis-Manar, Tunisie, rached.elfatmi@enit.rnu.tn

² LGC-ENIT, ISET-Nabeul, Tunisie, nejghaz@gmail.com

Résumé

La solution 3D de St Venant est réputée valable dans la zone *intérieure* de la poutre, *loin* des sections où les conditions aux limites sont appliquées. Cependant, pour les profils minces et les sections composites à matériaux fortement anisotropes, les effets de bords peuvent s'étendre sur des distances comparables à la longueur de la poutre et dominer son comportement global; celui-ci devient inaccessible aux théories classiques de poutre et même à celle de St Venant. L'objectif est ici de proposer une théorie de poutre en mesure de prendre en charge une part significative des effets de bords afin de prédire la solution 3D dans une zone intérieure de taille conséquente, et ainsi de mieux décrire le comportement global de la poutre. Pour cela, l'idée est de partir d'un modèle cinématique qui s'inspire de la forme exacte de la solution 3D de St Venant. Le résultat conduit à une théorie d'ordre supérieur qui peut être vue comme une *extension* de la théorie de St Venant. Appliquée à une poutre console soumise un chargement d'extrémité, la théorie proposée conduit à des résultats en contrainte comparables à ceux issus d'un calcul par éléments finis 3D, dans la zone critique de l'encastrement.

Abstract

3D St Venant's solution is known to represent the exact 3D solution in the *interior* part of a beam, *far* from the end-sections where the boundary conditions are applied. However, for open profile or/and strongly anisotropic composite section, end-effects can persist over distances comparable to the beam length and may dominate the global elastic behavior of the beam; the latter becomes inaccessible to classical beam theories and even to that of St Venant. The objective of the proposed theory is to capture a significant part of these end-effects in order to predict the 3D-stresses in a larger interior-part of the beam, and therefore better describe its structural behavior. For that aim, the idea is to start from a displacement model built from the exact form of 3D St Venant displacement. The result isa higher order composite beam theory that can be viewed as an extension of St Venants theory. Applied to tip loaded cantilever beams, this theory leads, for the 3D stresses in the critical zone of the built-in section, to results really comparable to those obtained by 3D-FEM computations..

Mots clés: poutre composite, St Venant, solution intérieure, effet de bord.

Keywords: composite beam, St Venant, central solution, edge effect.

1 Introduction

Pour une poutre élastique, la solution 3D de St Venant (originale ou étendue aux sections composites) [2, 4] est connue pour bien décrire la solution exacte dans la zone intérieure de la poutre, loin des sections où les conditions aux limites sont appliquées. Le principe de St Venant est par ailleurs généralement invoqué pour admettre que les effets de bord restent confinés aux bords. Cela n'est pas toujours vrai [1]. En effet, pour les profils minces et les sections composites à matériaux fortement anisotropes, les

effets de bords peuvent s'étendre sur des distances comparables à la longueur de la poutre et dominer son comportement global [5]; celui-ci devient inaccessible aux théories classiques de poutre et même à celle de St Venant.

L'objectif est ici de formuler, pour les poutres de section composite quelconque (forme et matériaux), une théorie de poutre exploitable par l'ingénieur, qui va *au delà* de la théorie (3D/1D) de St Venant en intégrant une partie *significative* des effets de bords.

La démarche a été de construire une théorie de poutre *d'ordre supérieur* dont la cinématique s'inspire de la forme exacte de la solution 3D de St Venant en déplacement qui s'écrit:

$$\xi_{sv}(x, y, z) = \mathbf{u}(x) + \boldsymbol{\omega}(x) \wedge \mathbf{X} + \sum_{i=1}^6 F_i(x) \begin{bmatrix} \phi_{sv}^i(y, z) \\ \mathbf{U}_{sv}^i(y, z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

où x est l'axe de la poutre, (y, z) ceux de la section, \mathbf{X} le vecteur de section et où $[\phi_{sv}^i; \mathbf{U}_{sv}^i]$ représentent respectivement les fonctions de gauchissement et d'effets Poisson associés aux efforts intérieurs F_i (effort normal, efforts tranchants, moment de torsion, moments de flexion). Il est ici important de souligner que les fonctions $[\phi_{sv}^i; \mathbf{U}_{sv}^i]$ ne dépendent que la nature de la section (forme et matériaux); elle représentent donc des *caractéristiques intrinsèques* à la section quant à sa déformabilité dans son plan (effets-Poisson) et hors plan (gauchissements).

Le modèle de déplacement, qui s'inspire de eq.1, est le suivant:

$$\xi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \alpha_i, \eta_i) = \underbrace{\mathbf{u}(x) + \boldsymbol{\omega}(x) \wedge \mathbf{X}}_{\text{mouvement de section}} + \overbrace{\sum_{i=1}^6 \begin{bmatrix} \eta_i(x) \phi_{sv}^i(y, z) \\ \alpha_i(x) \mathbf{U}_{sv}^i(y, z) \end{bmatrix}}^{\text{enrichissement: déformations de section}} \quad (2)$$

où les efforts intérieurs F_i ont été *relaxés* en faveur de paramètres (α_i, η_i) indépendants. Dans ce modèle, les paramètres cinématiques supplémentaires (α_i, η_i) conduisent, par dualité, à enrichir ceux statiques et permettent (ensemble) de mieux satisfaire les conditions aux limites.

Cette approche est a priori valide pour une section composite quelconque. En effet, la nature de la section (pleine ou mince, fermée ou ouverte, homogène ou composite) est déjà contenue dans les modes $[\phi_{sv}^i; \mathbf{U}_{sv}^i]$ qui sont propres à la section.

Naturellement, ce modèle suppose le calcul préalable de ces *modes de déformabilité* de section $[\phi_{sv}^i; \mathbf{U}_{sv}^i]$. Leur calcul est assuré par un programme dénommé *CSection* (présenté dans la session poster des présentes JNC), développé sous Matlab, conformément à la méthode numérique proposée par [6]. Cette méthode consiste à déduire les modes $[\phi_{sv}^i; \mathbf{U}_{sv}^i]$ de la résolution (coût insignifiant), par éléments finis 2D, d'une série de problèmes élastiques posés sur la section.

Par rapport aux théories de poutre d'ordre supérieur, nombreuses dans la littérature, où les *enrichissements* sont construits via des modes *mathématiques* (formes polynomiales, trigonométriques,...), le modèle proposé a l'avantage d'utiliser des modes plus *pertinents* de déformabilité *propres* à la section (forme et matériaux).

Dans ce travail, les sections composites sont supposées y - z -symétriques à phases x - y - z -orthotropes. Cette limitation est volontaire; elle n'enlève rien de fondamental quant au développement de la théorie ou à la portée de la démarche. Elle permet cependant d'aboutir à des résultats théoriques dont l'analyse permet de dégager plusieurs enseignements. Par exemple, la forme explicite des résultats 3D en contraintes permet, par comparaison immédiate avec ceux de St Venant, de saisir de manière précise la contribution de cette approche, et de la commenter. De plus, pour le cas de la torsion, cette théorie conduit à une généralisation, aux sections composites quelconques, de la torsion de Vlasov. Enfin, un dernier point que le lecteur trouvera dans [9]: par rapport à la solution de St Venant, cette théorie a aussi permis de

détecter que *l'étendue de l'effet d'encastrement* est gouvernée par des constantes adimensionnelles qui rendent compte de la nature de la section et du type de chargement; leur expression en fonction des constantes de section est précisée.

Comme illustration, cette théorie est appliquée à une poutre console soumise à un chargement d'extrémité; et cela, pour différents cas de section (homogène ou composite) et de chargement (traction, torsion et flexion simple). L'analyse, menée analytiquement et numériquement, se focalise sur l'influence de *l'effet d'encastrement*, sur les contraintes 3D et le comportement global (1D) de la poutre. Les résultats 1D sont comparés à ceux de la théorie de poutre de St Venant, et les contraintes 3D sont comparées, dans la zone critique de l'encastrement aux contraintes de St Venant et à celles obtenues par éléments finis 3D. Dans ce papier, le paragraphe suivant rappelle les propriétés de la solution de St Venant nécessaires au développement de la théorie qui fait l'objet du paragraphe-3. Le dernier paragraphe est dédié aux applications. Celle-ci sont ici restreintes au cas (le plus significatif) de la torsion; pour la traction et la flexion, le lecteur est invité à consulter [9].

2 Propriétés de la solution 3D de St Venant

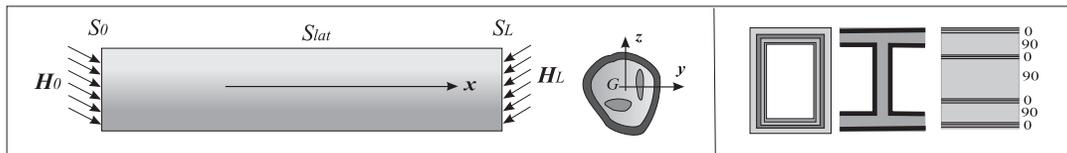


Figure 1: Problème 3D de St Venant et exemples de section *so-CS*

Le problème de St Venant (étendu aux poutres composites) est un problème d'équilibre 3D élastique Fig.1. La poutre composite d'axe x occupe un domaine prismatique Ω de section constante S et de longueur L . S_{lat} est la surface latérale et (S_0, S_L) sont respectivement les sections d'extrémité en $(0, L)$. La poutre est en équilibre sous les seuls chargements surfaciques $(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_L)$ appliqués respectivement sur les sections (S_0, S_L) . Les matériaux sont élastiques anisotropes et leurs adhérences parfaites.

On appelle solution de St Venant l'unique solution x -polynomiale qui satisfait toutes les équations de l'équilibre linéarisé sauf celles des conditions d'extrémité qui ne sont vérifiées qu'en termes de résultantes (force et moment).

On note $M = xx + \mathbf{X}$ un point of Ω avec \mathbf{X} un vecteur appartenant à S , ξ le vecteur déplacement, et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur contrainte. La solution de St Venant, telle que formulée dans [4], est donnée par (le tilda $\tilde{(\cdot)}$ indique une quantité de St Venant):

$$\tilde{\xi} = \mathbf{u}(x) + \boldsymbol{\omega}(x) \wedge \mathbf{X} + \mathcal{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{R}(x) + \mathcal{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{M}(x) \quad (3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{x} = \mathcal{A}^0(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{R}(x) + \mathcal{B}^0(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{M}(x) \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}' + \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}' \\ \boldsymbol{\omega}' \end{bmatrix} = \tilde{\Lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \mathbf{R} = (N, T^y, T^z) \\ \mathbf{M} = (M^x, M^y, M^z) \end{array} \right) \quad (5)$$

où les efforts intérieurs

$$\mathbf{R} = \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \rangle \quad \mathbf{M} = \langle \mathbf{X} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}) \rangle$$

vérifient les équations d'équilibre 1D:

$$\mathbf{R}' = 0 \quad \mathbf{M}' + \mathbf{x} \wedge \mathbf{R} = 0$$

$\langle\langle(\cdot)\rangle\rangle$ denote $\int_S(\cdot)dS$ and $(\cdot)'$ denote la dérivée par rapport à x . $(N, T^y, T^z, M^x, M^y, M^z)$ sont, respectivement) l'effort normal, les efforts tranchants, le moment de torsion et les moments de flexion.

• Les opérateurs linéaires $(\tilde{\Lambda}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}^0, \mathcal{B}^0)$, qui sont des caractéristiques de la section droite (forme et matériaux) vérifient les propriétés suivantes :

$$\langle \mathcal{A}^0 \rangle = \mathcal{I} \quad \langle \mathcal{B}^0 \rangle = \mathcal{O} \quad \langle \mathbf{X} \wedge \mathcal{A}^0 \rangle = \mathcal{O} \quad \langle \mathbf{X} \wedge \mathcal{B}^0 \rangle = \mathcal{I} \quad (6)$$

$$\langle \mathcal{A}^{0t} \mathcal{A} \rangle = \langle \mathcal{A}^{0t} \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{B}^{0t} \mathcal{A} \rangle = \langle \mathcal{B}^{0t} \mathcal{B} \rangle = \mathcal{O} \quad (7)$$

où \mathcal{I} est l'opérateur identité et \mathcal{O} l'opérateur nul.

• $\tilde{\Lambda}$, l'opérateur 1D de souplesse de la poutre est le résultat de l'identification [4]:

$$\langle \tilde{\sigma}^\alpha \mathbf{K}^{-1} \tilde{\sigma}^\beta \rangle = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\alpha \\ \mathbf{M}^\alpha \end{bmatrix}^t \tilde{\Lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\beta \\ \mathbf{M}^\beta \end{bmatrix} \quad \forall(\alpha, \beta) \quad (8)$$

où \mathbf{K} est le tenseur délasticité, avec $(\tilde{\sigma}^\alpha, \mathbf{R}^\alpha, \mathbf{M}^\alpha)$ et $(\tilde{\sigma}^\beta, \mathbf{R}^\beta, \mathbf{M}^\beta)$ les contraintes et les efforts intérieurs correspondant aux solutions de St Venant associées, respectivement, aux chargements $(\mathbf{H}_0^\alpha, \mathbf{H}_L^\alpha)$ et $(\mathbf{H}_0^\beta, \mathbf{H}_L^\beta)$.

Cas d'une section symétrique à matériaux orthotropes. Désignons par *so-CS* une section composite y - z -symétrique pour laquelle chaque matériau est x - y - z -orthotrope. Pour ce type de section, la solution de St Venant bénéficie de plusieurs autres propriétés; elles sont données ci-dessous.

• \mathcal{A} , \mathcal{B} et le comportement 1D se réduisent comme suit: [6]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \phi^y & \phi^z \\ U_y^x & 0 & 0 \\ U_z^x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M^y \\ M^z \end{bmatrix} = \tilde{\Gamma}_1 \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} & \text{avec } \tilde{\Gamma}_1 &= \begin{bmatrix} \widetilde{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{EI}_y & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{EI}_z \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \phi^x & 0 & 0 \\ 0 & U_y^y & U_y^z \\ 0 & U_z^y & U_z^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^x \\ T^y \\ T^z \end{bmatrix} = \tilde{\Gamma}_2 \begin{bmatrix} \chi_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} & \text{avec } \tilde{\Gamma}_2 &= \begin{bmatrix} \widetilde{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{GA}_y & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{GA}_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

où, avec $(i \in \{x, y, z\})$, (U_y^i, U_z^i) sont les fonctions de St Venant d'effet Poisson associés aux efforts (N, M^y, M^z) ; (ϕ^i) les fonctions de St Venant de gauchissement associés aux efforts (M^x, T^y, T^z) ; $(\widetilde{EA}, \widetilde{GA}_y, \widetilde{GA}_z, \widetilde{GJ}, \widetilde{EI}_y, \widetilde{EI}_z)$ sont les constantes de la section composite. De plus, en raison de la double symétrie de la section, (U_y^i, U_z^i, ϕ^i) présentent les propriétés de parité par rapport à y et z données dans Tab.1.

U_y^x	U_z^x	U_y^y	U_z^y	U_y^z	U_z^z	ϕ^x	ϕ^y	ϕ^z
ip/y, pa/z	pa/y, ip/z	ip/y, ip/z	pa/y, pa/z	pa/y, pa/z	ip/y, ip/z	ip/y, ip/z	ip/y, pa/z	pa/y, ip/z

Table 1: Parités: ip/y ou pa/y signifie que la fonction est impaire ou paire par rapport à y .

• Pour un matériau x - y - z -orthotrope, la loi élastique peut se scinder en $\sigma = \mathbf{K}_1 \varepsilon_1$ et $\sigma_2 = \mathbf{K}_2 \varepsilon_2$ où $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont définis par:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} G_{xy} & 0 \\ 0 & G_{xz} \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Il est commode, pour la suite, d'introduire les constantes $\widetilde{R}_y = \frac{\widetilde{GA}_y}{EI_z}$, $\widetilde{R}_z = \frac{\widetilde{GA}_z}{EI_y}$ et les fonctions (appelées aussi de St Venant) :

$$\left. \begin{aligned} (V^x, W^x) &= (\widetilde{EA}U_y^x, \widetilde{EA}U_z^x) & (V^y, W^y) &= (\widetilde{EI}_yU_y^y, \widetilde{EI}_yU_z^y) & (V^z, W^z) &= (\widetilde{EI}_zU_y^z, \widetilde{EI}_zU_z^z) \\ \psi^x &= \widetilde{GJ}\phi^x & \psi^y &= \widetilde{GA}_y\phi^y & \psi^z &= \widetilde{GA}_z\phi^z \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

On peut alors montrer, à partir des eq.3 et eq.9, que les champs de déformations et de contraintes de St Venant peuvent se scinder:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & z & -y \\ V_{,y}^x & V_{,y}^y & V_{,z}^z \\ W_{,z}^x & W_{,z}^y & W_{,z}^z \\ (V_{,z}^x + W_{,y}^x) & (V_{,z}^y + W_{,y}^y) & (V_{,z}^z + W_{,y}^z) \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}_1} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{D}_1 (\widetilde{\Gamma}_1)^{-1} \begin{bmatrix} N \\ M^y \\ M^z \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \overbrace{\begin{bmatrix} (-z + \psi_{,y}^x) (1 + \psi_{,y}^y - \widetilde{R}_y V^z) & (\psi_{,y}^z + \widetilde{R}_z V^y) \\ (y + \psi_{,z}^x) & (\psi_{,z}^y - \widetilde{R}_y W^z) & (1 + \psi_{,z}^z + \widetilde{R}_z W^y) \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}_2} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{D}_2 (\widetilde{\Gamma}_2)^{-1} \begin{bmatrix} M^x \\ T^y \\ T^z \end{bmatrix} \quad (13)$$

• *Relations entre constantes de section et fonctions de St Venant.* Le développement des équations eq.6 et eq.7 conduit aux propriétés détaillées, respectivement, par les équations eq.14 et eq.15:

$$\left. \begin{aligned} \langle K_{11} + K_{12}V_{,y}^x + K_{13}W_{,z}^x \rangle &= \widetilde{EA} \\ \langle zK_{11} + K_{12}V_{,y}^y + K_{13}W_{,z}^y \rangle &= \widetilde{EI}_y \\ \langle -y(-yK_{11} + K_{12}V_{,y}^z + K_{13}W_{,z}^z) \rangle &= \widetilde{EI}_z \\ \langle -zG_{xy}\psi_{,y}^x + yG_{xz}\psi_{,z}^x \rangle &= \widetilde{GJ} - \widetilde{GI}_x \\ \langle G_{xy}(\psi_{,y}^y - \widetilde{R}_y V^z) \rangle &= \widetilde{GA}_y - \langle G_{xy} \rangle \\ \langle G_{xz}(\psi_{,z}^y + \widetilde{R}_z W^y) \rangle &= \widetilde{GA}_z - \langle G_{xz} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle (K_{11} + K_{12}V_{,y}^x + K_{13}W_{,z}^x)\psi^i \rangle &= 0 \\ \langle (zK_{11} + K_{12}V_{,y}^y + K_{13}W_{,z}^y)\psi^i \rangle &= 0 \\ \langle (-yK_{11} + K_{12}V_{,y}^z + K_{13}W_{,z}^z)\psi^i \rangle &= 0 \\ \langle (G_{xy}(-z + \psi_{,y}^x))V^i + (G_{xz}(y + \psi_{,z}^x))W^i \rangle &= 0 \\ \langle (G_{xy}(1 + \psi_{,y}^y - \widetilde{R}_y V^z))V^i + (G_{xz}(\psi_{,z}^y - \widetilde{R}_y W^z))W^i \rangle &= 0 \\ \langle (G_{xy}(\psi_{,y}^z + \widetilde{R}_z V^y))V^i + (G_{xz}(1 + \psi_{,z}^z + \widetilde{R}_z W^y))W^i \rangle &= 0 \end{aligned} \right\}; (\forall i \in \{x, y, z\}) \quad (15)$$

où $\widetilde{GI}_x = \langle z^2 G_{xy} + y^2 G_{xz} \rangle$. Enfin, Eq.(8) (écrite en terme de déformations) conduit à

$$\left. \begin{aligned} \langle (K_{11} + K_{12}V_{,y}^x + K_{13}W_{,z}^x)^2 \rangle &= \widetilde{EA} \\ \langle (zK_{11} + K_{12}V_{,y}^y + K_{13}W_{,z}^y)^2 \rangle &= \widetilde{EI}_y \\ \langle (-yK_{11} + K_{12}V_{,y}^z + K_{13}W_{,z}^z)^2 \rangle &= \widetilde{EI}_z \\ \langle (G_{xy}(-z + \psi_{,y}^x))^2 + G_{xz}(y + \psi_{,z}^x)^2 \rangle &= \widetilde{GJ} \\ \langle (G_{xy}(1 + \psi_{,y}^y - \widetilde{R}_y V^z))^2 + G_{xz}(\psi_{,z}^y - \widetilde{R}_y W^z)^2 \rangle &= \widetilde{GA}_y \\ \langle (G_{xy}(\psi_{,y}^z + \widetilde{R}_z V^y))^2 + G_{xz}(1 + \psi_{,z}^z + \widetilde{R}_z W^y)^2 \rangle &= \widetilde{GA}_z \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

3 La théorie de poutre

On conserve comme problème de référence le problème 3D de St Venant du paragraphe précédent. Le modèle cinématique, précisé par l'eq.2, se réduit pour le cas d'une section de type *so*-CS à la forme suivante:

$$\xi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{X} + \alpha_x \begin{bmatrix} 0 \\ V^x \\ W^x \end{bmatrix} + \alpha_y \begin{bmatrix} 0 \\ V^y \\ W^y \end{bmatrix} + \alpha_z \begin{bmatrix} 0 \\ V^z \\ W^z \end{bmatrix} + \eta_x \begin{bmatrix} \psi^x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta_y \begin{bmatrix} \psi^y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta_z \begin{bmatrix} \psi^z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

où, avec $i \in \{x, y, z\}$,

- (η_i) sont 3 paramètres associés aux 3 fonctions de gauchissement ψ^i ;
- (α_i) sont 3 paramètres associés aux 3 paires de fonctions d'effet Poisson (V^i, W^i) ;

La théorie de poutre qui dérive de ce modèle de déplacement, paramétré par $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})$, est obtenue de manière classique via la méthode des travaux virtuels.

Quantités généralisées (1D). Soient $\widehat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\boldsymbol{\omega}}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}})$ un déplacement virtuel et $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ le tenseur de déformation qui lui correspond. Pour le modèle eq.17, le travail virtuel des efforts intérieurs

$W_i = - \int_L \langle \boldsymbol{\sigma} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle dx$ peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} W_i &= - \int_L (\mathbf{R} \cdot \widehat{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{M} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_\psi \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}}' + \mathbf{M}_s \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{A}_\nu \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}' + \mathbf{B}_s \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}) dx \\ &= \int_L [\mathbf{R}' \cdot \widehat{\mathbf{u}} + (\mathbf{M}' + \mathbf{x} \wedge \mathbf{R}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}} + (\mathbf{M}'_\psi - \mathbf{M}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{A}'_\nu - \mathbf{B}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}] dx \\ &\quad - [\mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{M} \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_\psi \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{A}_\nu \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}]_O^L \end{aligned} \quad (18)$$

où (\mathbf{R}, \mathbf{M}) sont les efforts intérieurs classiques et où $\mathbf{M}_\psi = (M_\psi^x, M_\psi^y, M_\psi^z)$, $\mathbf{M}_s = (M_s^x, T_s^y, T_s^z)$, $\mathbf{A}_\nu = (A_\nu^x, A_\nu^y, A_\nu^z)$, et $\mathbf{B}_s = (N_s, M_s^y, M_s^z)$ sont ceux nouveaux (ou additionnels) définis par:

$$\left. \begin{aligned} M_\psi^x &= \langle \sigma_{xx} \psi^x \rangle & M_s^x &= \langle \tau_{xy} \psi_{,y}^x + \tau_{xz} \psi_{,z}^x \rangle \\ M_\psi^y &= \langle \sigma_{xx} \psi^y \rangle & T_s^y &= \langle \tau_{xy} \psi_{,y}^y + \tau_{xz} \psi_{,z}^y \rangle \\ M_\psi^z &= \langle \sigma_{xx} \psi^z \rangle & T_s^z &= \langle \tau_{xy} \psi_{,y}^z + \tau_{xz} \psi_{,z}^z \rangle \\ A_\nu^x &= \langle \tau_{xy} V^x + \tau_{xz} W^x \rangle & N_s &= \langle \sigma_{yy} V_{,y}^x + \sigma_{zz} W_{,y}^x + \tau_{yz} (V_{,z}^x + W_{,y}^x) \rangle \\ A_\nu^y &= \langle \tau_{xy} V^y + \tau_{xz} W^y \rangle & M_s^y &= \langle \sigma_{yy} V_{,y}^y + \sigma_{zz} W_{,y}^y + \tau_{yz} (V_{,z}^y + W_{,y}^y) \rangle \\ A_\nu^z &= \langle \tau_{xy} V^z + \tau_{xz} W^z \rangle & M_s^z &= \langle \sigma_{yy} V_{,y}^z + \sigma_{zz} W_{,y}^z + \tau_{yz} (V_{,z}^z + W_{,y}^z) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

- $(\mathbf{M}_\psi, \mathbf{M}_s)$ sont, respectivement, appelé le vecteur *bimoment* et le vecteur secondaire associé; ils sont reliés aux gauchissements;
- De manière similaire, les effets Poisson introduisent les deux vecteurs d'efforts intérieurs $(\mathbf{A}_\nu, \mathbf{B}_s)$. L'indice $(\cdot)_s$, comme *secondaire*, est utilisé pour indiquer que les composantes (N_s, M_s^y, M_s^z) de \mathbf{B}_s peuvent être vus comme un effort normal secondaire, et des moments de flexions secondaires (voir la remarque page-8).

Le travail virtuel des actions extérieures $W_e = \langle \mathbf{H}_O \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}} \rangle_O + \langle \mathbf{H}_L \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}} \rangle_L$ peut se mettre sous la forme

$$W_e = \mathbf{P}_O \cdot \widehat{\mathbf{u}}_O + \mathbf{C}_O \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}_O + \mathbf{Q}_O \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}}_O + \mathbf{S}_O \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_O + \mathbf{P}_L \cdot \widehat{\mathbf{u}}_L + \mathbf{C}_L \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}_L + \mathbf{Q}_L \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}}_L + \mathbf{S}_L \cdot \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_L \quad (20)$$

où les actions extérieures 1D (généralisées) (P, C, Q, S) sont définies par $(x \in \{x, y, z\}; \mathbf{x}_i \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{H} \rangle \quad \mathbf{C} = \langle \mathbf{X} \wedge \mathbf{H} \rangle \quad \mathbf{Q} = \langle H_x \psi^i \rangle \mathbf{x}_i \quad \mathbf{S} = \langle H_y V^i + H_z W^i \rangle \mathbf{x}_i \quad (21)$$

Equations d'équilibre et conditions aux limites (1D). Le principe des travaux virtuels permet de déduire des équations eq.18 et eq.20 les équations d'équilibre (1D)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}' + \mathbf{x} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}'_\psi - \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \mathbf{A}_\nu' - \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (22)$$

et les conditions aux limites (1D)

$$x=0 : (\mathbf{R}, \mathbf{M}, \mathbf{M}_\psi, \mathbf{A}_\nu) = -(\mathbf{P}_O, \mathbf{C}_O, \mathbf{Q}_O, \mathbf{S}_O) \quad \text{and} \quad x=L : (\mathbf{R}, \mathbf{M}, \mathbf{M}_\psi, \mathbf{A}_\nu) = (\mathbf{P}_L, \mathbf{C}_L, \mathbf{Q}_L, \mathbf{S}_L) \quad (23)$$

Comportement (1D). L'utilisation de toutes les propriétés associées aux fonctions (V^i, W^i, ψ^i) détaillées dans le paragraphe précédent permet, sans concéder la moindre simplification, de montrer que le comportement généralisé associé au modèle de déplacement eq.17 peut se mettre sous la forme découpée suivante:

$$\begin{bmatrix} N \\ N_s \\ A_\nu^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle K_{11} \rangle & -(\langle K_{11} \rangle - \widetilde{EA}) & 0 \\ -(\langle K_{11} \rangle - \widetilde{EA}) & \langle K_{11} \rangle - \widetilde{EA} & 0 \\ 0 & 0 & gx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \alpha_x \\ \alpha'_x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M^x \\ M_s^x \\ M_\psi^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{GI}_x & -(\widetilde{GI}_x - \widetilde{GJ}) & 0 \\ -(\widetilde{GI}_x - \widetilde{GJ}) & \widetilde{GI}_x - \widetilde{GJ} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{KI}_\psi^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \eta_x \\ \eta'_x \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} M^z \\ M_s^z \\ A_\nu^z \\ M_\psi^y \\ T^y \\ T_s^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y^2 K_{11} \rangle & -(\langle y^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_z) & 0 & -a_y & 0 & 0 \\ -(\langle y^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_z) & (\langle y^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_z) & 0 & a_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_z & 0 & f_y & e_y \\ -a_y & a_y & 0 & \widetilde{KI}_\psi^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_y & 0 & \langle G_{xy} \rangle & -(\langle G_{xy} \rangle - \widetilde{GA}_y) + \widetilde{R}_y f_y \\ 0 & 0 & e_y & 0 & -(\langle G_{xy} \rangle - \widetilde{GA}_y) + \widetilde{R}_y f_y & \langle G_{xy} \rangle - \widetilde{GA}_y - \widetilde{R}_y (f_y - e_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_z \\ \alpha_z \\ \alpha'_z \\ \eta'_y \\ \gamma_y \\ \eta_y \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} M^y \\ M_s^y \\ A_\nu^y \\ M_\psi^z \\ T^z \\ T_s^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle z^2 K_{11} \rangle & -(\langle z^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_y) & 0 & -a_z & 0 & 0 \\ -(\langle z^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_y) & (\langle z^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_y) & 0 & a_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_y & 0 & f_z & e_z \\ -a_z & a_z & 0 & \widetilde{KI}_\psi^z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_z & 0 & \langle G_{xz} \rangle & -(\langle G_{xz} \rangle - \widetilde{GA}_z) - \widetilde{R}_z f_z \\ 0 & 0 & e_z & 0 & -(\langle G_{xz} \rangle - \widetilde{GA}_z) - \widetilde{R}_z f_z & \langle G_{xz} \rangle - \widetilde{GA}_z + \widetilde{R}_z (f_z - e_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_y \\ \alpha_y \\ \alpha'_y \\ \eta'_z \\ \gamma_z \\ \eta_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

où les nouvelles constantes qui apparaissent dans les opérateurs ci-dessus sont définis par:

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{KI}_\psi^x &= \langle K_{11} (\psi^x)^2 \rangle & g_x &= \langle G_{xy} (V^x)^2 + G_{xz} (W^x)^2 \rangle & e_y &= \langle G_{xy} \psi_{,y}^y V^z + G_{xz} \psi_{,z}^y W^z \rangle & a_y &= \langle y K_{11} \psi^y \rangle \\ \widetilde{KI}_\psi^y &= \langle K_{11} (\psi^y)^2 \rangle & g_y &= \langle G_{xy} (V^y)^2 + G_{xz} (W^y)^2 \rangle & e_z &= \langle G_{xy} \psi_{,y}^z V^y + G_{xz} \psi_{,z}^z W^y \rangle & a_z &= \langle -z K_{11} \psi^z \rangle \\ \widetilde{KI}_\psi^z &= \langle K_{11} (\psi^z)^2 \rangle & g_z &= \langle G_{xy} (V^z)^2 + G_{xz} (W^z)^2 \rangle & f_y &= \langle G_{xy} V^z \rangle & f_z &= \langle G_{xz} W^y \rangle \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

- $(\widetilde{KI}_\psi^x, \widetilde{KI}_\psi^y, \widetilde{KI}_\psi^z)$ sont les rigidités aux gauchissements;
- (g_x, g_y, g_z) sont les rigidités aux effets Poissons;
- $(a_y, f_y, e_y, a_z, f_z, e_z)$ expriment les couplages entre gauchissement et effet Poisson dans le comportement de flexion.

Remarque. On peut facilement déduire de ce comportement 1D, les relations constitutives suivantes :

$$\left. \begin{aligned} N_p &= N + N_s = \widetilde{EA} \gamma_x & M_p^y &= M^y + M_s^y = \widetilde{EI}_z \chi_z & M_p^z &= M^z + M_s^z = \widetilde{EI}_z \chi_z \\ M_p^x &= M^x + M_s^x = \widetilde{GJ} \chi_x & T_p^y &= T^y + T_s^y - \widetilde{R}_y A_\nu^z = \widetilde{GA}_y \gamma_y & T_p^z &= T^z + T_s^z + \widetilde{R}_z A_\nu^y = \widetilde{GA}_z \gamma_z \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ces résultats montrent que $(N_p, M_p^y, M_p^z, M_p^x, T_p^y, T_p^z)$, appelés efforts intérieurs *primaires*, obéissent à des relations similaires à celles données par le comportement 1D de St Venant eq-5 mais pour les efforts $(N, M^y, M^z, M^x, T^y, T^z)$. On peut y voir une justification des qualificatifs *primaire* et *secondaire* dans les efforts intérieurs supplémentaires induits par les paramètres (η_i, α_i) .

Contraintes 3D. En utilisant la loi 3D élastique, on peut établir que ce modèle de déplacement conduit à un champ 3D de contrainte dont l'expression peut être scindée en σ_1 et σ_2 donnés par:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \underbrace{\widetilde{\sigma}}_{sv} \begin{bmatrix} N \\ M^y \\ M^z \end{bmatrix} + \widetilde{\sigma} \begin{bmatrix} N_s \\ M_s^y \\ M_s^z \end{bmatrix} + \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \psi^x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{M^x}{\widetilde{KI}_\psi} + \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ V_{,y}^x \\ W_{,z}^x \\ (V_{,z}^x + W_{,y}^x) \end{bmatrix} \frac{N_s}{\langle K_{11} \rangle - \widetilde{EA}} \\ &+ \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \psi^y & 0 \\ 0 & V_{,y}^z \\ 0 & W_{,z}^z \\ 0 & (V_{,z}^z + W_{,y}^z) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \widetilde{KI}_\psi^y & a_y \\ a_y & \langle y^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_z \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} M_\psi^y \\ M_s^z \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \psi^z & 0 \\ 0 & V_{,y}^y \\ 0 & W_{,y}^y \\ 0 & (V_{,z}^y + W_{,y}^y) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \widetilde{KI}_\psi^z & a_z \\ a_z & \langle z^2 K_{11} \rangle - \widetilde{EI}_y \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} M_\psi^z \\ M_s^y \end{bmatrix} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \underbrace{\widetilde{\tau}}_{sv} \begin{bmatrix} M^x \\ T^y \\ T^z \end{bmatrix} + \widetilde{\tau} \begin{bmatrix} M_s^x \\ T_s^y - \widetilde{R}_y A_\nu^z \\ T_s^z + \widetilde{R}_z A_\nu^y \end{bmatrix} + \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \psi_{,y}^x \\ \psi_{,z}^x \end{bmatrix} \frac{M_s^x}{\widetilde{GI}_x - \widetilde{GJ}} + \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} V^x \\ W^x \end{bmatrix} \frac{A_\nu^x}{g_x} \\ &+ \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \psi_{,y}^y & V^z \\ \psi_{,z}^y & W^z \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \langle G_{xy} \rangle - \widetilde{GA}_y - \widetilde{R}_y (f_y - e_y) & e_y \\ e_y & g_z \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} T_s^y \\ A_\nu^z \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \psi_{,y}^z & V^y \\ \psi_{,z}^z & W^y \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \langle G_{xz} \rangle - \widetilde{GA}_z + \widetilde{R}_z (f_z - e_z) & e_z \\ e_z & g_y \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} T_s^z \\ A_\nu^y \end{bmatrix} \quad (30) \end{aligned}$$

où les opérateurs $\widetilde{\sigma} = \mathbf{K}_1 \mathbf{D}_1 (\widetilde{\Gamma}_1)^{-1}$ et $\widetilde{\tau} = \mathbf{K}_2 \mathbf{D}_2 (\widetilde{\Gamma}_2)^{-1}$ sont associés aux expressions des contraintes de St Venant eq.12 et 13. Dans ces deux expressions les deux premiers termes correspondent aux contraintes de St Venant, et les termes supplémentaires suivants montrent la contribution des nouveaux efforts intérieurs.

4 Torsion d'une poutre console

On considère une poutre console de longueur L soumise à un moment de torsion au droit de son extrémité libre. Deux types de so -CS sont considérées:

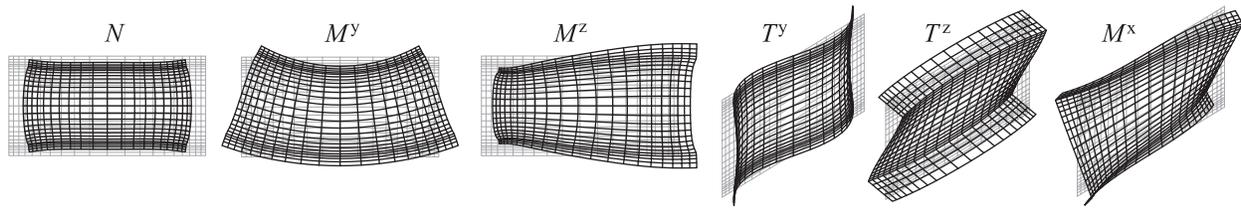


Figure 2: Effets Poisson's dus à (N, M^y, M^z) et gauchissements dus à (T^y, T^z, M^x) (section sandwich)

- deux sections homogènes [rectangulaires ($h \times h/2$) et en **I** ($h \times h/2, h/10$)] orthotropes dont les matériaux sont caractérisés par $E_{xx}/G=06$, $E_{xx}/G=33$, $E_{xx}/G=66$;
- une section sandwich à phases isotropes $E_p/E_c=40$, $\nu_p=\nu_c=0.3$ (p=peau, c=coeur).

Caractéristiques de section. Il s'agit des constantes de section, des modes de gauchissements et des effets Poisson. Leur calcul numérique est assuré par le programme *CSestion*. La Fig.2 présente les modes obtenus pour la section sandwich.

Comportement 1D. La Fig.3 compare les variations de la rotation ω_x et du gauchissement η_x selon l'axe de la poutre avec les résultats de la théorie de poutre de St Venant. Les gauchissements, nuls au droit de l'encastrement, évoluent pour tendre, après une certaine distance d , vers ceux de St Venant dans la zone *intérieure* de la poutre. Cette distance d qui, par rapport au résultat de St Venant caractérise l'effet d'encastrement, peut devenir du même ordre que la longueur L de la poutre.

Contraintes 3D. Les contraintes 3D (contrainte axiale σ_{xx} et contrainte de cisaillement τ) qui résultent de la présente théorie (1D) sont comparées à celle de St Venant (SV) et à celles obtenues par un calcul par éléments finis (3D); la Fig.4 décrit ces variations (à partir de la zone d'encastrement) pour des points importants particuliers A et B. Pour St Venant les cisaillements sont constants et les contraintes axiales nulles. Les résultats de la présente théorie et ceux 3D qui sont tout à fait comparables tendent comme attendus vers ceux de St Venant quand on s'éloigne de la zone d'encastrement De plus ils montrent tous deux, quand on s'approche de l'encastrement, que le cisaillement diminue fortement en faveur d'une contrainte axiale dont le module peut notablement dépassé la valeur du cisaillement de St Venant.

Le lecteur trouvera des résultats similaires pour plusieurs exemples de section tant en torsion qu'en traction et flexion dans [9]. Ils confirment, du moins pour un effet de bord de type encastrement que cette théorie donne de bons résultats. D'autres types de bords doivent être testés. Le but, rappelons le, n'est pas de calculer vraiment l'effet de bord, mais uniquement d'en saisir une part significative afin que le *reste* de la solution soit *confiné* au bord.

References

- [1] R. Toupin . *st-Venant's principle*. Arch. Rational Mech. Anal. (18) 83-96. 1965.
- [2] D. Iesan *st-Venant's problem for inhomogeneous and anisotropic elastic bodies*. J. Elast (6) 277-94. 1976.
- [3] C. Horgan C, J. Simmonds. *St Venant end effects in composite structures*. Compos. Eng. (3) 279-86. 1994.
- [4] P. Ladevèze, J. Simmonds. *New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading*, European Journal of Mechanics, 17 (3) 377-402, 1998.

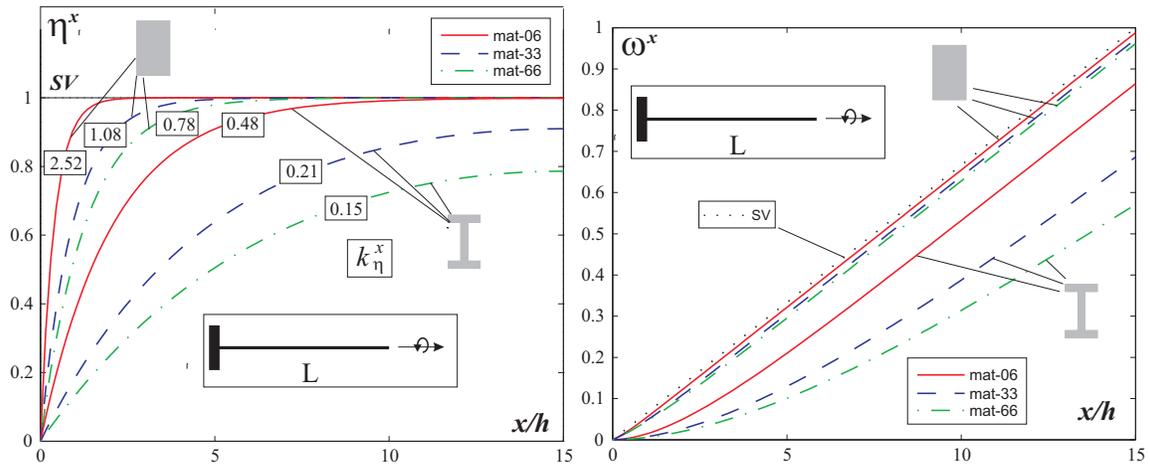


Figure 3: Variation du gauchissement η_x et de la rotation ω_x pour différents matériaux ($E_{xx}/G=06,33,66$)

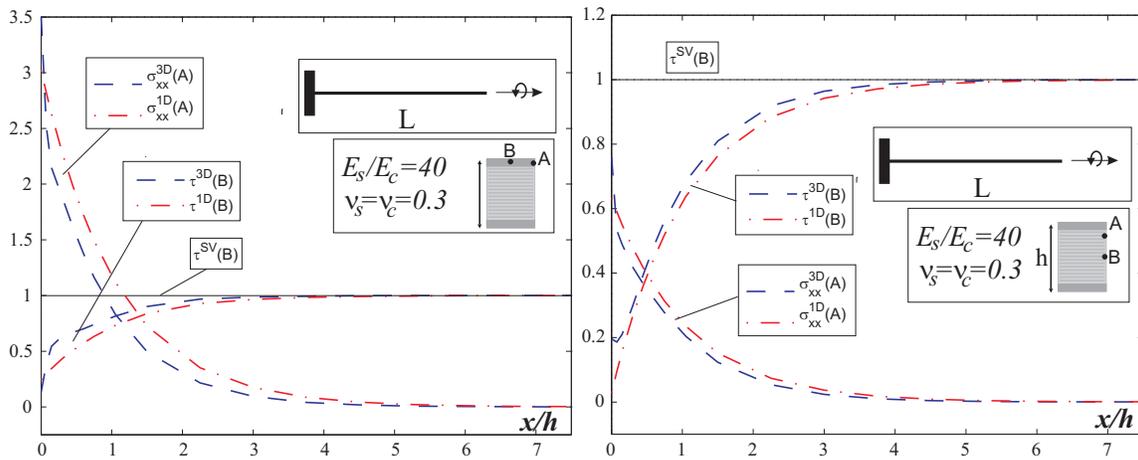


Figure 4: Comparison entre contraintes (axiales et de cisaillement) [3D/1D/SV] (les contraintes sont normalisées par $\tau^{SV}(B)$).

[5] V. Volovoi V, D.Hodges, V. Berdichevsky, V. Sutyryn. *Asymptotic theory for static behavior of elastic anisotropic I-beams*. Int. J. Solids. struct. (36)101743. 1999.

[6] R. El Fatmi, H. Zenzri. *A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams*. Comp. & struct. ,41, 25212537. 2004.

[7] R. El Fatmi, H. Zenzri. *A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams*. Int. J. Solids. struct. ,41, 25212537. 2004.

[8] R. El Fatmi, N. Ghazouani. *Higher order composite beam theory built on st-Venant’s solution. Part-I: Theoretical developments*, Composite structures, (93) 557-566, 2011.

[9] N. Ghazouani, R. El Fatmi. *Higher order composite beam theory built on st-Venant’s solution. Part-II: Built-in effects influence on the behavior of end-loaded cantilever beams*, Composite structures, (93) 567-581, 2011.