



HAL
open science

Calcul des caractéristiques mécaniques d'une section composite quelconque: un outil sous Matlab

R. El Fatmi

► **To cite this version:**

R. El Fatmi. Calcul des caractéristiques mécaniques d'une section composite quelconque: un outil sous Matlab. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.11. hal-00597875

HAL Id: hal-00597875

<https://hal.science/hal-00597875>

Submitted on 3 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul des caractéristiques mécaniques d'une section composite quelconque: un outil sous Matlab

Mechanical characteristics of any composite section: a Matlab tool

R. El Fatmi¹

¹ LGC-ENIT, UniversitéTunis-Manar, Tunisie, rached.elfatmi@enit.rnu.tn

Résumé

On présente un programme, dénommé *CSection*, qui assure le calcul systématique des caractéristiques mécaniques d'une section composite quelconque: pleine, mince, ouverte, fermée symétrique ou pas et constituée de matériaux anisotropes. Ces caractéristiques sont celles associées à la théorie de poutre qui dérive de la solution 3D de St Venant (étendue aux sections composites): la matrice 6×6 du comportement généralisé et, pour *chacun* des (6) efforts intérieurs: les modes de déformation de section (effet Poisson et gauchissement) ainsi que le champ 3D de contraintes. Ces caractéristiques qui sont autant d'informations sur le comportement mécanique de la section offrent à l'ingénieur R&D une réelle aide pour concevoir et optimiser une section ou calculer une poutre composite. Pour une section donnée, ces caractéristiques sont déduites du traitement par éléments finis 2D, d'une série de problèmes posés sur la section (El Fatmi et Zenzri, Computers & Structures, 2002). Actuellement, *CSection* fonctionne sous Matlab, mais il peut être implémenté dans un code d'éléments finis standard. Pour illustrer les performances de *CSection* deux exemples significatifs sont présentés: une section rectangulaire homogène et isotrope et une section symétrique stratifiée $[0,90, -45,60]_s$ constituées de 8 couches orthotropes.

Abstract

We present a program, named *CSection*, devoted to the computation of the mechanical characteristics of any composite section: solid or walled, open or closed, symmetric or not, and made of elastic and anisotropic materials. These characteristics are those related to the beam theory that derives from the 3D St Venant's solution: the full 6×6 matrix of the structural behavior and, for *each* of the (6) cross-sectional stresses: the sectional deformation (Poisson's effect and warping) and the 3D stress field. These characteristics constitute a relevant set of mechanical informations that can really help R&D engineers to design composite section and to compute composite beams. *CSection* is developed conforming to the numerical method proposed by El Fatmi and Zenzri (Computers and Structures, 2002). This method consists in solving, by 2D finite elements, a set of elastic problems on the section from which all the sectional characteristics are deduced. The present version of *CSection* is developed as a tool on Matlab platform, but such a tool can be implemented in any finite element code. To illustrate *CSection* performance, two significant examples are presented: a rectangular homogeneous and isotropic section and a symmetric laminated section $[0,90,-45,60]_s$ made by 8 orthotropic layers.

Mots clés: poutre composite, constantes de section, gauchissements, effets Poisson, champs de contrainte.

Keywords: composite beam, sectional constants, warpings, Poisson's effects, stress fields.

1 Introduction

Pour les poutres homogènes et isotropes, les constantes de section sont relativement faciles à calculer (formules d'ingénieurs ou codes de calcul), leur comportement est communément maîtrisé et les théories

classiques de poutre sont suffisantes pour les applications courantes. En revanche, le comportement d'une poutre composite est beaucoup plus complexe, difficile à appréhender et à calculer. Le premier niveau de complexité concerne le comportement global (1D) de la poutre composite; il est dû aux différents couplages entre extension, flexion et torsion qui peuvent se produire pour une section composite quelconque; les poutres stratifiées sont connues pour exhiber de tels couplages; cela est dû à la nature anisotrope des couches et au séquençement de leur empilement. Un deuxième niveau de difficulté est qu'il est fondamental, pour une section composite, de pouvoir remonter, à partir des efforts intérieurs (1D) au droit d'une section, au champ (3D) de contrainte qui règne (localement) dans *chacun* des matériaux qui forment la section composite. Un modèle de simulation pour les poutres composites est d'autant important que les essais classiquement menés sur les matériaux composites sont fatalement effectués sur des éprouvettes dont la forme est une poutre (éventuellement courte). Il s'agit en effet d'essais non homogènes de type *structure* plutôt que *matériau* dont l'interprétation nécessite, à défaut de simulation numérique 3D, le recours à un modèle de calcul relativement évolué pour rendre compte de la réalité du comportement de la poutre composite.

Si l'importance économique des matériaux et des structures composites est aujourd'hui établie (aéronautique, sport de compétition, industrie automobile, renforts dans les structures des constructions civiles, ...), il n'existe, à notre connaissance, pas encore sur le marché d'outil numérique suffisamment général dédié au calcul des poutres composites, et accessible à l'ingénieur. Il existe certainement des programmes ou logiciels développés dans les centres de recherche de certaines industries de haute technologie pour assurer ce type de calcul, mais ces outils sont généralement confidentiels et orientés sur des applications particulières.

Notre objectif est de proposer à terme un outil numérique *efficace* dédié au calcul des poutres de section composite quelconque, exploitable par l'ingénieur (voire le technicien).

Une première étape a été le développement d'un outil dénommé *CSection*, développé en guise de prototype sous Matlab, qui assure *le calcul systématique des caractéristiques mécaniques d'une section composite quelconque*: pleine ou mince, ouverte ou fermée, symétrique ou non et constituée de matériaux élastiques anisotropes (avec adhérence parfaite).

Les caractéristiques, dont il est question dans *CSection*, ne se réfèrent pas à une théorie basée sur un quelconque modèle cinématique et ne relèvent pas non plus d'une technique d'homogénéisation. Il s'agit des caractéristiques associées à la théorie de poutre qui dérive de la solution 3D de St Venant étendue aux sections composites [1, 2]. Pourquoi ce choix?

La solution 3D de St Venant est fondamentale pour les poutres (en particulier composites) pour deux raisons:

- 1 le *statut* de la solution 3D de St Venant qui *représente* la solution 3D exacte dans la zone *intérieure* de la poutre, *loin* des sections où sont appliquées les conditions de chargements ou d'appuis.
- 2 l'ensemble des caractéristiques mécaniques que la solution 3D de St Venant fournit et *qui ne dépendent que de la nature de la section* (forme et matériaux); ces *caractéristiques de section* sont:
 - Λ , l'opérateur (6×6) du comportement généralisé qui contient toutes les constantes de section avec, hors de sa diagonale, les constantes de couplage qui expriment les éventuels couplages (entre traction, flexion et torsion) dûs aux dissymétries et à la nature composite de la section.
 - et, pour chacun des 6 efforts intérieurs X_i (effort normal, efforts tranchants, moment de torsion et moments de flexion):

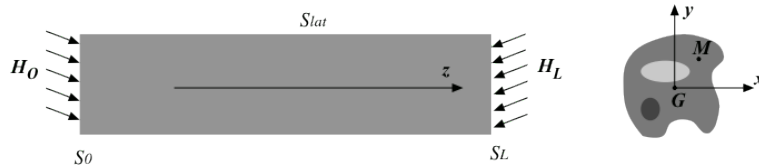


Figure 1: Problème de St Venant.

- * les modes $[M_i(x, y), \phi_i(x, y)]$ de déformation dans le plan (effets Poisson) et anti-plan (gauchissement) de la section,
 - * ainsi que les champs de contrainte $(\sigma_i(x, y))$,
- (x et y désignant les coordonnées de section).

Parce qu'elles sont intimement liées à l'expression de la solution 3D de St Venant, ces caractéristiques de section $[\Lambda, M_i, \phi_i, \sigma_i]$ constituent un ensemble d'informations *pertinentes* dont l'exploitation devrait permettre une meilleure compréhension du comportement global d'une poutre composite et donc d'aider à la conception et l'optimisation de sa section.

Pour une section composite donnée, ces caractéristiques mécaniques de section (CMS) $[\Lambda, M_i, \phi_i, \sigma_i]$ peuvent être systématiquement déterminées et pour un faible coût calcul. Dans *CSection*, ce calcul est effectué conformément à la méthode numérique proposée par El Fatmi et Zenzri [3]. Cette méthode consiste à déduire l'ensemble des CMS de la résolution, par éléments finis, d'une série de problèmes élastiques 2D posés sur la section.

Dans le présent papier, l'essentiel de la théorie (3D-1D) de St Venant est rappelée. Pour la méthode numérique utilisée par *CSection*, le lecteur est invité à consulter [3]. Après une présentation rapide de *CSection* en tant qu'outil Matlab, deux exemples de section sont traitées: (S1) une simple section rectangulaire ($h \times b$) homogène et isotrope et (S2) une section symétrique stratifiée $[0,90, -45,60]_s$ constituée de 8 couches orthotropes (le lecteur trouvera plusieurs autres exemples dans [3, 4]). Afin de souligner la qualité des résultats fournis par *CSection*, les points critiques suivants seront précisés:

-pour S1: la variation des coefficients de section réduite d'effort tranchant¹ en fonction du rapport h/b , et en fonction du coefficient de Poisson ν .

-pour S2: la variation, à travers les différentes couches, du cisaillement d'effort tranchant; ainsi que la variation des contraintes interlaminaires qui peuvent être responsables du délaminage d'un stratifié (phénomène qualifié d'*effet de bord libre*) lors d'un chargement de traction.

2 Problème, solution 3D et théorie de poutre de St Venant

Le *problème* de St Venant (Fig.1) considère l'équilibre élastique 3D d'une poutre droite Ω , d'axe z , de longueur L , de section constante (S), constituée de matériaux élastiques anisotropes (avec adhérence parfaite) et soumise uniquement aux forces surfaciques $[H_0, H_L]$ appliquées sur les sections d'extrémité $[S_0, S_L]$. On note S_{lat} la surface latérale et un point de la poutre est repéré par $M=G+GM$ où G est le centre d'inertie de la section. Les équations linéarisées de l'équilibre sont:

¹Ces coefficients qui apparaissent naturellement dans la théorie de St Venant correspondent aux facteurs de correction du cisaillement dans la théorie de Timoshenko.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(\nabla^t \boldsymbol{\xi} + \nabla \boldsymbol{\xi}) && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{on } S_{lat} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{z}) &= \mathbf{H}_0 && \text{on } S_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{z} &= \mathbf{H}_L && \text{on } S_L \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ est le tenseur de déformation associé au champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ (∇ , $(\cdot)^t$ et $(:)$ désignent respectivement, le gradient, la transposée et la double contraction); \mathbf{K} est le tenseur d'élasticité, $\boldsymbol{\sigma}$ le champ de contrainte et \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à S_{lat} . On appelle *solution* de St Venant, la solution 3D qui vérifie *exactement* eq.1, mais qui ne vérifient les conditions d'extrémité (eq.2) qu'en résultantes (force et moment). Cette solution 3D de St Venant s'écrit:

$$\boldsymbol{\xi}^{sv}(x, y, z) = \mathbf{u}(z) + \boldsymbol{\omega}(z) \wedge \mathbf{GM} + \sum_{i=1}^6 X_i(z) \mathbf{U}^i \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{sv}(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 X_i(z) \boldsymbol{\sigma}^i(x, y) \quad (4)$$

• où $X_i \in \{T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t\}$ représente les composantes classiques² des efforts généralisés $[\mathbf{R}, \mathbf{M}]$ définis par

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{z} dS = \mathbf{R} = [T_x, T_y, N] \quad \int_S \mathbf{GM} \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{z} dS = \mathbf{M} = [M_x, M_y, M_t]$$

et qui sont solution des équations d'équilibre (1D) ($(\cdot)'$ exprime la dérivée par rapport à z)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}' + \mathbf{z} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (5)$$

• et où les déplacement généralisés $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}]$ son reliés à $[\mathbf{R}, \mathbf{M}]$ par la loi (1D) de comportement généralisé:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}' + \mathbf{z} \wedge \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (6)$$

dans laquelle $\boldsymbol{\Lambda}$ est l'opérateur (6×6) de souplesse de la poutre; on notera $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ l'opérateur de rigidité. *Remarque.* La solution 3D de St Venant est correcte *loin* des extrémités, dans la zone *intérieure* de la poutre (Principe de St Venant).

Caractéristiques mécaniques d'une section. Une des particularités de la solution de St Venant est de faire apparaître des quantités qui *ne dépendent que de la section* (forme et matériaux):

$\boldsymbol{\Lambda}$ l'opérateur (6×6) qui décrit le comportement 1D structural de la poutre; les termes hors de la diagonale contiennent les éventuelles constantes de couplage entre extension/flexion/torsion que peut présenter une section composite quelconque.

\mathbf{U}^i décrit la déformabilité de la section associée à l'effort intérieur X_i et qui peut être décomposé en

$$\mathbf{U}^i(x, y) = \mathbf{M}^i(x, y) + \phi^i(x, y) \mathbf{z} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}^i \text{ décrit l'effet Poisson dans la section} \\ \phi^i \text{ décrit le gauchissement de la section} \end{array} \right.$$

² $(T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t)$ sont, respectivement, les efforts tranchants, l'effort normal, les moments de flexion et le moment de torsion.

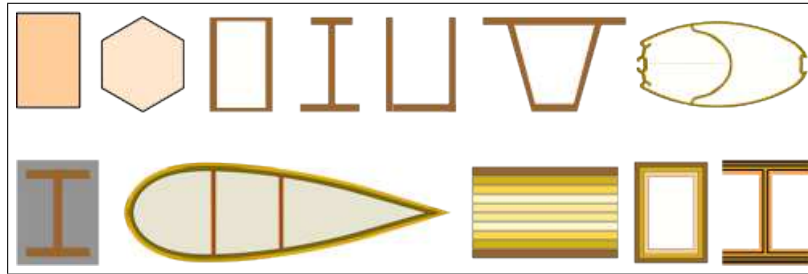


Figure 2: Sections homogènes et composites

σ^i décrit le champ de contrainte (en tout point de la section) associé à l'effort intérieur X_i .

$[\Lambda, U^i, \sigma^i]$ définissent les caractéristiques mécaniques de la section (CMS); elles sont indépendantes du problème de poutre considéré et peuvent être déterminées une fois pour toute. C'est ce qu'assure le programme *CSection*.

Théorie de poutre et solution 3D de St Venant. Revenons au problème de St Venant. Pour peu que les caractéristiques d'une section $[\Lambda, U^i, \sigma^i]$ soient préalablement déterminées, la *génération* de la solution 3D de St Venant peut alors s'obtenir en deux étapes:

1- utiliser Λ pour résoudre *le problème 1D* défini par les équations:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}' + z \wedge \mathbf{R} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad + \text{Cond. aux limites en } [S_0, S_L] \quad (7)$$

2- utiliser la solution 1D $[\mathbf{u}(z), \omega(z), \mathbf{R}(z), \mathbf{M}(z)]$ de (7) et les quantités $[U^i(x, y), \sigma^i(x, y)]$ pour *générer* la solution 3D de St Venant en déplacement et en contrainte en utilisant les formules eqs.3-4. Cette deuxième étape devient donc systématique et ne nécessite aucun calcul.

Ce qu'on entend par théorie de poutre de St Venant (TP-SV) se résume ainsi:

(TP-SV) $\left\{ \begin{array}{l} \text{-les équations (eq.7) qui définissent la théorie 1D de poutre} \\ \text{-les formules eqs-3-4 qui conduisent à la solution 3D de St Venant.} \end{array} \right.$

Remarque. Pratiquement, la TP-SV est utilisée pour traiter d'autres types³ de condition aux limites que celles de St Venant.

3 La version Matlab de *CSection*

Pour une section composite donnée (forme et matériaux) (Fig.2), *CSection* calcule, de manière systématique, les caractéristiques de section $[\Lambda, U^i, \sigma^i]$, conformément à la méthode numérique proposée par [3]. Deux étapes:

1- Il existe dans Matlab un outil permettant de définir la géométrie 2D d'une section (avec plusieurs sous-domaines) et de la mailler; les matériaux sont ensuite définis pour chaque sous-domaine.

³Exemple: un encastrement est modélisé par $[\mathbf{u}=\mathbf{0}, \omega=\mathbf{0}]$; dans ce cas, l'effet d'encastrement peut s'étendre dans la poutre et conduire à une solution 3D de St Venant valable dans une plus petite zone intérieure de la poutre.

	nb d'éléments	nb de noeuds	nb de degrés de liberté	temps cpu (s)
Section-1	664	1389	4171	4
Section-2	2304	4781	14347	12

Table 1: Tailles de problème et temps calcul.

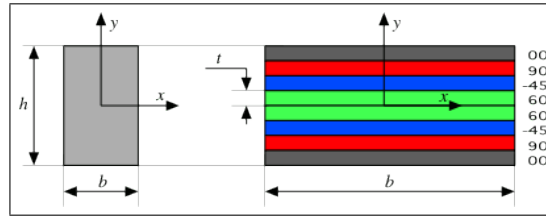


Figure 3: Section homogène isotrope et section stratifiée

- 2- L'outil *CSection* (*boîte noire*) utilise ces données (maillage+matériaux) pour calculer systématiquement les caractéristiques de section $[\Lambda$ ou Γ , U^i , σ^i]. Les résultats peuvent être imprimés, visualisés ou exportés à d'autres fins.

$$[\text{Section 2D maillée+Matériaux}] \rightarrow \boxed{\text{CSection}} \rightarrow [\Lambda, U^i, \sigma^i]$$

Les éléments finis utilisés sont des triangles à 6 noeuds. Le traitement complet d'une section est de quelques secondes (Tab.1) sur un PC courant (PC muni du processeur Intel Duo 2.53MHz et 4Go de Ram).

4 Deux exemples significatifs

Pour illustrer les performances de *CSection*, deux exemples de section (Fig.3), S1 and S2, sont présentés: [S1] une section homogène rectangulaire $[h, b=h/2]$ isotrope $[E=1000, \nu=0.3]$; et [S2] une section symétrique stratifiée $[0, 90, -45, 60]$ s formée par 8 couches isotropes transverses de même épaisseur $[b, h=0.8b, t=0.1b]$ dont les constantes élastiques sont $[E_X=137.6 \text{ GPa}, E_Y=E_Z=14.448 \text{ GPa}, \nu_{XY}=\nu_{XZ}=\nu_{YZ}=0.21, G_{XY}=G_{XZ}=G_{YZ}=5.48 \text{ Gpa}]$, où (X, Y, Z) sont les axes d'orthotropie du matériau].

4.1 Section homogène

Comportement (1D). Pour S1, qui est isotrope et x - y -symétrique, la matrice de rigidité Γ est diagonale et donnée pour $h=1$ par:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 150.8542 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 160.1812 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 500.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 41.6667 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 10.4167 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 10.9945 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Modes de déformation de section (Fig.4, gauche). Les effets Poisson sont uniquement dûs à l'effort normal (N) et les moments de flexion (M_x, M_y). Les gauchissements sont uniquement dûs aux efforts tranchants (T_x, T_y) et au moment de torsion (M_t).

ν	0.00	0.15	0.30	0.45	h/b	1	2	5	10
k_x	0.8333	0.8171	0.7844	0.7489	k_x	0.8282	0.7844	0.4781	0.1791
k_y	0.8333	0.8332	0.8329	0.8326	k_y	0.8282	0.8329	0.8333	0.8333

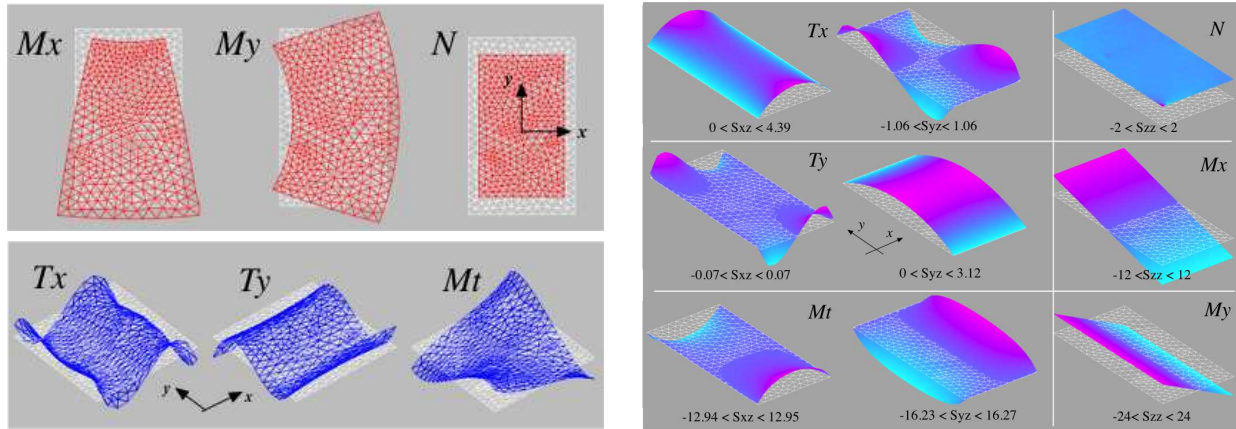
Table 2: $[k_x, k_y]$ en fonction du rapport h/b ($\nu=0.3$), et en fonction du coefficient de Poisson ν ($h/b=2$)

Figure 4: Effets Poisson, gauchissements et champ de contraintes pour la section homogène isotrope S1

Contraintes de section (Fig.4, droite). Les champs 3D de contraintes σ^i présentés sont associés à chaque effort intérieur (unitaire). Les contraintes se réduisent à σ_{zz} pour l'effort normal (N) et les moments de flexion (M_x, M_y); et elles se réduisent aux contraintes de cisaillement (τ_{xz}, τ_{yz}) pour les efforts tranchants (T_x, T_y) et le moment de torsion (M_t) (Les composantes ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz}$) sont notées ($S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}, S_{zz}$) dans les figures).

Les coefficients de section réduite. On peut déduire⁴ des calculs de Γ , pour différents rapports h/b et différent coefficient de Poisson's ν , différentes valeurs de (k_x, k_y) ; les résultats sont donnés dans Tab.2. La valeur communément utilisée, pour une section rectangulaire, est, pour tout rapport h/b , $k_x=k_y=5/6=0.833$; cette valeur n'est en fait correcte que si $\nu=0$. Pour une valeur fixe de h/b , les coefficients $[k_x, k_y]$ dépendent légèrement de ν ; et, pour $\nu \neq 0$, $[k_x, k_y]$ peuvent dépendre fortement du rapport h/b .

4.2 Section composite stratifiée

Comportement (1D). Pour S2, la matrice de rigidité Γ n'est pas diagonale; elle est donnée par:

$$\Gamma = 10^9 \times \begin{bmatrix} 6.1657 & 0.0000 & -\mathbf{1.8607} & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -\mathbf{1.8607} & 0.0000 & 38.3708 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 3.7226 & 0.0000 & \mathbf{0.0645} \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 3.0925 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \mathbf{0.0645} & 0.0000 & 0.5722 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Les constantes, hors de la diagonale, Γ_{13} et Γ_{46} témoignent respectivement du couplage *extension-flexion* et *flexion-torsion* présents dans cette section stratifiée symétrique.

⁴ $k_x = 2(1 + \nu) \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{33}}$ $k_y = 2(1 + \nu) \frac{\Gamma_{22}}{\Gamma_{33}}$

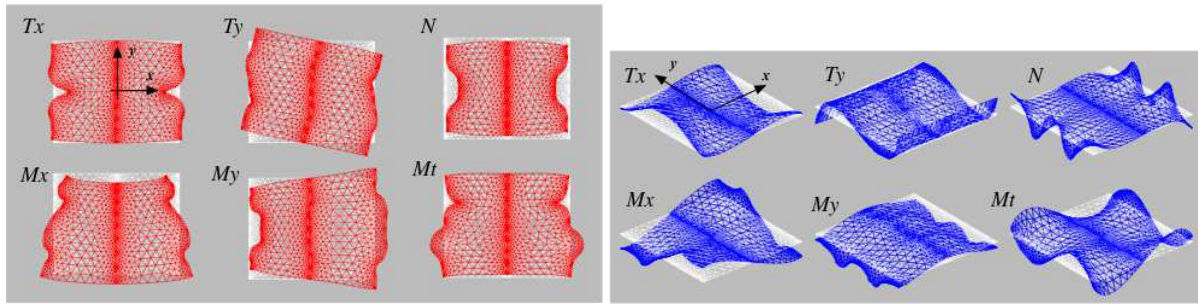


Figure 5: Effets Poisson et gauchissements pour la section stratifiée S2

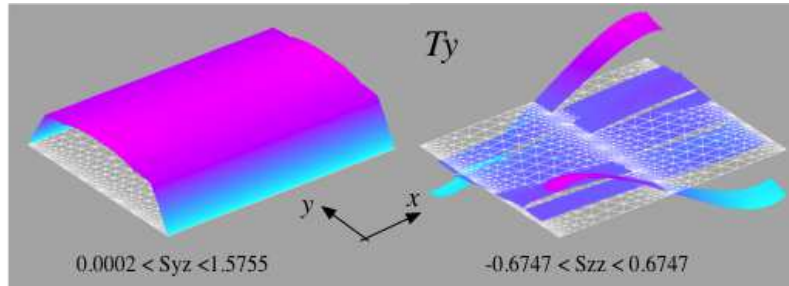


Figure 6: Les principaux champs de contraintes associés à (T_y) pour la section stratifiée S2.

Deformations de section (Fig.5). Contrairement au cas isotrope homogène, *chaque* effort intérieur $(T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t)$ contribue aux effets Poisson et aux gauchissements; cela est dû à la nature composite de la section.

Contraintes de section. Il est tout d'abord important de préciser que, dans *CSection*, les champs de contraintes sont visualisés par sous domaine (ici par couche). Par ailleurs, au niveau de l'interface (perpendiculaire à \mathbf{y}) entre deux couches (1 and 2), seules les composantes du vecteur contrainte $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{y} = [\tau_{xy}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}])$ ont théoriquement à être continues $(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{y})$. Il est ainsi normal de voir au niveau des interfaces des *discontinuités* pour $(\sigma_{xx}, \tau_{xz}, \sigma_{zz})$. Par contre, quand les champs $(\tau_{xy}, \sigma_{yy}, \tau_{yz})$ *coincident* au niveau des interfaces, cela est significatif de la qualité des résultats numériques obtenus. On notera, par exemple dans la Fig.6, les discontinuités pour σ_{zz} , et comment τ_{yz} coincide aux niveaux des interfaces.

Figs.6-7-8 présentent les champs de contraintes associés à chacun des efforts intérieurs pour S2 (seuls les principaux champs sont présentés).

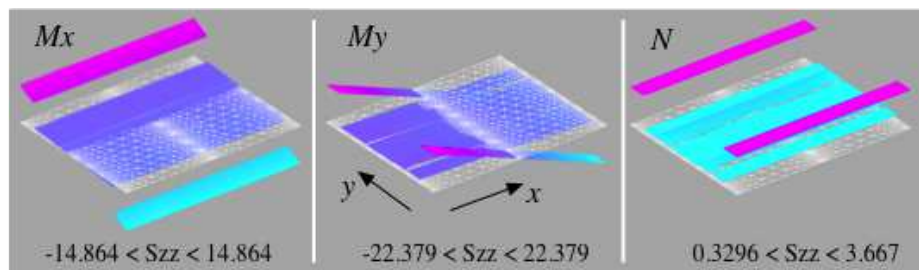


Figure 7: Les principaux champs de contraintes associés (M_x, M_y, N) pour la section stratifiée S2.

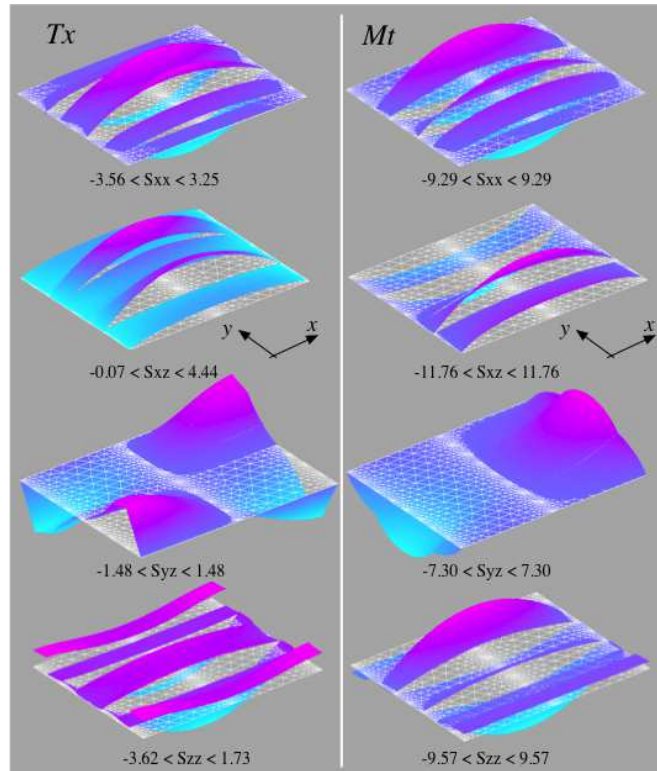


Figure 8: Les principaux champs de contraintes associés (T_x , M_t) pour la section stratifiée S2

Le cisaillement à travers les couches et contraintes interlaminaires. la Fig.9 donne:

- la variation, à travers les différentes couches, du cisaillement d'effort tranchant T_y . On notera la continuité du cisaillement à travers les couches et sa nullité aux bords inférieur et supérieur.
- la variation, sur l'interface 0/90, des contraintes interlaminaires σ_{yy} , pour un effort normal N . La concentration de contraintes (de traction, arrachement) explique *l'effet dit de bord libre* qui peut initier le délaminage des couches.

5 L'utilité de CSection

La théorie de Saint Venant (étendue aux sections composites à phases anisotropes) est probablement difficile d'accès pour le commun des ingénieurs ou des techniciens. C'est pourquoi CSection a été développé. La présente version fonctionne sous Matlab, mais son implémentation est possible dans les codes de calculs standards. Il s'agit d'un outil dont l'utilisation est systématique (boîte noire) et économique en temps calcul sur un PC courant. Evidemment, c'est dans le traitement des sections composites que cet outil offrira le plus grand service: aéronautique, automobile, équipements de sport de compétition, Les caractéristiques d'une section composite associées à la théorie de St Venant offrent à l'ingénieur un ensemble d'informations sur la mécanique de la section qui peut constituer une aide à la conception d'une section composite, son optimisation, ainsi qu'à la simulation du comportement mécanique de la poutre composite qu'elle engendre (interprétation des essais).

Développement de théories de poutre d'ordre supérieur. Pour améliorer ou raffiner les théories classiques de poutre qui supposent un mouvement rigide de section, le développement des théories de poutre dites *d'ordre supérieur* consiste à *enrichir* le modèle de déplacement en permettant certaines déformations de

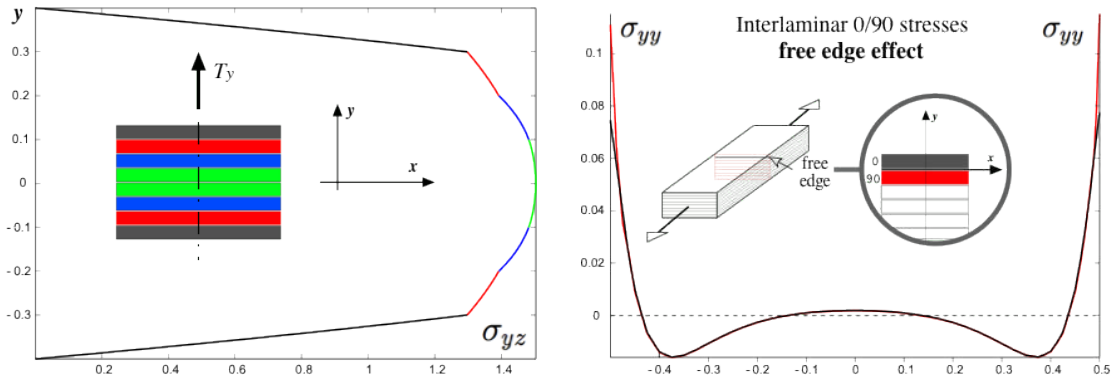


Figure 9: (gauche) à travers les différentes couches du cisaillement τ_{yz} d'effort tranchant T_y et (droite) variation, sur l'interface 0/90, des contraintes interlaminaires σ_{yy} , pour un effort normal N .

la section. Ces théories se basent sur un champ de déplacement dont la forme est la suivante:

$$\xi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \eta_i, \dots) = \underbrace{\mathbf{u}(z) + \boldsymbol{\omega}(z) \wedge \mathbf{GM}}_{\text{mouv. rigide de section}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \eta_i(z) \Psi^i(x, y)}_{\text{enrichissement}} \quad (10)$$

où les paramètres cinématiques supplémentaires η_i sont associés à des *modes* de déformation de section Ψ^i *supposés connus*. Les paramètres η_i qui varient selon l'axe z de la poutre, permettent, tout en enrichissant les quantités cinématiques d'enrichir (par dualité) ceux statiques et ainsi de mieux *vérifier* les conditions aux limites.

Les caractéristiques $\{[\mathbf{M}^i, \psi^i]\}$ qui rendent compte de la manière *naturelle* dont la section se déforme (dans ou hors de son plan) sont d'excellents candidats pour être utilisés comme modes de déformations de section, afin de développer de telles théories (voir la théorie récemment proposée par [5, 6]).

References

- [1] D. Iesan *St-Venant's problem for inhomogeneous and anisotropic elastic bodies*. J. Elast. (6) 277-94. 1976.
- [2] P. Ladevèze, J. Simmonds. *New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading*, European Journal of Mechanics, 17 (3) 377-402, 1998.
- [3] R. El Fatmi, H. Zenzri. *A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams*. Comp. & Struct. ,41, 25212537. 2004.
- [4] R. El Fatmi, H. Zenzri. *A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite beams*. Int. J. Solids. Struct. ,41, 25212537. 2004.
- [5] R. El Fatmi, N. Ghazouani. *Higher order composite beam theory built on St-Venant's solution. Part-I: Theoretical developments*, Composite Structures, (93) 557-566, 2011.
- [6] N. Ghazouani, R. El Fatmi. *Higher order composite beam theory built on St-Venant's solution. Part-II: Built-in effects influence on the behavior of end-loaded cantilever beams*, Composite Structures, (93) 567-581, 2011.