



**HAL**  
open science

## Calcul analytique de multicouches composites non-d'elamin'ees et d'elamin'ees en traction uniaxiale avec des bords libres

Navid Saeedi, Karam Sab, Jean-François Caron

► **To cite this version:**

Navid Saeedi, Karam Sab, Jean-François Caron. Calcul analytique de multicouches composites non-d'elamin'ees et d'elamin'ees en traction uniaxiale avec des bords libres. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.191. hal-00597762

**HAL Id: hal-00597762**

**<https://hal.science/hal-00597762>**

Submitted on 1 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul analytique de multicouches composites non-délaminés et délaminés en traction uniaxiale avec des bords libres

## *Analytical calculation of non-delaminated and delaminated composite laminates under uniaxial tension with free edges*

Navid Saeedi<sup>1</sup>, Karam Sab<sup>1</sup>, Jean-François Caron<sup>1</sup>

<sup>1</sup>: Laboratoire UMR-Navier, École des Ponts Paristech  
Université Paris-Est, 5 boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex2, France  
e-mail: navid.saeedi@enpc.fr, karam.sab@enpc.fr, jean-francois.caron@enpc.fr

### Résumé

Le problème de bord libre est l'un des problèmes les plus importants dans la conception et l'analyse des matériaux composites. Les contraintes interlaminaires trop importantes près de bords libres, théoriquement singulières, pourraient conduire au délaminage des matériaux multicouches. La théorie classique des plaques stratifiées (CLT) n'est pas capable de prédire le champ de contraintes 3D près des bords. En raison de complexité du problème, il n'y a pas de solution exacte pour ce problème, sauf dans certains cas simples. Par conséquent, de nombreuses différentes méthodes analytiques et numériques ont été utilisées pour surmonter cette faiblesse de la théorie classique (CLT) dans le calcul des contraintes interlaminaires près des bords. La résolution 3D du problème est généralement très coûteuse au niveau du temps et du mémoire. Ce travail, en utilisant un Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches (M4), présente une alternative plus efficace aux éléments finis et autres méthodes numériques pour résoudre des problèmes de bord libre. En appliquant la théorie du modèle M4-5n, cette étude fournit une méthode d'analyse des stratifiés composites en traction uniaxiale. Les solutions analytiques du modèle M4-5n pour des multicouches composites dans les états non-délaminé et délaminé sont obtenues et comparées avec celles des éléments finis 3D. La comparaison entre les résultats du modèle M4-5n et ceux des éléments finis 3D démontre la capacité du modèle M4-5n à fournir des résultats très précis avec une efficacité beaucoup plus importante par rapport aux éléments finis 3D.

### Abstract

The free-edge problem is one of the most frequently problem in design and analysis of the laminated composites. High interfacial stresses near free edges, theoretically singular, could lead to delamination of the laminate. It has already been shown that the classical lamination theory (CLT) is not capable of predicting the three-dimensional stress field near the edges. Due to the complexity of the problem, there is no exact solution yet to this problem except in some simple cases. Consequently, many various approximate analytical and numerical methods until now have been used to overcome this lack of CLT in calculating of interfacial stresses in the vicinity of edges. The 3D-problem solving is generally very expensive in computational calculation. The present study, by using a multiparticle model of multilayered material (M4), presents a more efficient alternative to finite element and other numerical methods to solve free-edge problems. This investigation provides a method to analyse general composite laminates under uniaxial traction by means of the M4-5n model. The analytical M4 solutions of non-delaminated and delaminated composite multilayers are obtained and compared to finite element method solutions. Comparison between the results of the M4-5n model and the FEM, demonstrates the capability of the M4-5n model to give very accurate results with a much more efficiency in comparison to FEM.

**Mots Clés :** Contrainte interlaminaire, Multicouche, Modèle Multiparticulaire, Bord libre, Délaminage  
**Keywords :** Interlaminar stress, Laminate, Multiparticle model, Free edge, Delamination

## 1 Introduction

En général, les solutions analytiques sont basées soit sur des théories *monocouche équivalente* (ESL) soit sur des théories *layerwise*. Dans les deux cas, le problème d'élasticité 3D est réduit à un problème 2D. Les méthodes monocouche équivalente consistent à traiter le stratifié multicouches hétérogènes comme une couche homogène ayant un comportement équivalent. Comme le nombre d'équations est indépendant du nombre total des couches du stratifié, ces méthodes sont relativement simples et efficaces mais leurs résultats ne sont pas assez précis près des bords. Néanmoins, ces théories fournissent des résultats acceptables dans la prédiction de la réponse globale du multicouche. En revanche, dans les méthodes *layerwise* le nombre d'équations dépend du nombre des couches du stratifié. Ces méthodes sont généralement plus sophistiquées et plus coûteuses, mais elles peuvent fournir des résultats très satisfaisants.

Une des premières solutions approximatives de contraintes interlaminaires a été obtenue par Pipes

et Pagano [1] pour l'analyse des contraintes interlaminaires dans un multicouche symétrique sous l'extension uniforme. Plus tard, Pagano a appliqué une théorie d'ordre supérieur tenant compte l'énergie de cisaillement afin de calculer la contrainte d'arrachement dans un multicouche symétrique [2]. En utilisant une méthode ELS avec des approximations simples en contraintes, Whitney a évalué le champ de contraintes aux bords libres des matériaux composites [3]. Pagano a également développé une méthode analytique approchée basée sur le principe variationnel de Reissner pour prédire le champ de contraintes dans les stratifiés composites [4, 5]. Tang et Levy [6] ont utilisé une théorie de la couche limite pour analyser un stratifié symétrique sous la traction uniaxiale et évalué toutes les contraintes interlaminaires près de bords libres. En se basant sur le développement en séries complexes, Wang et Choi [7, 8] ont étudié la singularité des contraintes au voisinage des bords d'un stratifié composite. En s'inspirant du modèle de Pagano, une famille de modèles multiparticulaires a été proposée par Chabot [9], Carreira et al. [10]. Dans ces modèles, le matériau multicouche est considéré comme un objet 2D dont chaque point géométrique se compose de plusieurs particules. En effet, ces modèles sont une superposition de plaques ou membranes qui sont reliées par des efforts d'interface. Chabot a utilisé différents Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4) pour évaluer les contraintes interlaminaires dans des empilements symétriques composites sous la traction uniaxiale.

Le problème d'effet de bord a également été approché par différentes méthodes numériques telles que les méthodes des différences finies, méthodes des éléments finis 2D et 3D, les techniques de la couche limite, les modèles multiparticulaires, etc. Pipes et Pagano [11] ont utilisé une méthode des différences finies pour résoudre les équations gouvernantes 2D. Wang et Crossman [12, 13] ont proposé une méthode quasi-tridimensionnelle des éléments finis pour calculer les contraintes interlaminaires à proximité des bords libres dans des stratifiés symétriques soumis à traction uniaxiale et variation uniforme de température. Robbins et Reddy [14] ont présenté une méthode globale-locale des éléments finis pour la modélisation des plaques composites épaisses en utilisant une théorie layerwise. Tian et al. [15] ont appliqué une formulation hybride de type d'éléments finis pour estimer les contraintes interlaminaires dans des stratifiés symétriques équilibrés. Carreira et al. [10] ont utilisé la méthode des éléments finis afin de valider les Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4) pour la prédiction des champs de contraintes aux interfaces des empilements symétriques soumis à une extension uniaxiale.

L'objectif de ce travail est de fournir une alternative plus efficace aux éléments finis et autres méthodes numériques pour l'analyse des multicouches. Bien évidemment, afin d'utiliser un critère de rupture, il faut d'abord analyser le problème. Beaucoup de critères de rupture sont basés sur le taux de restitution d'énergie et cela nécessite parfois plusieurs analyses dans l'état délaminé; ce qui pourrait être très coûteux au niveau du temps de calcul et du mémoire. De ce fait, la présente étude tente d'utiliser un Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches (M4-5n) pour aborder des problèmes de bord libre. Chabot [9] a obtenu la solution du modèle M4 pour des multicouches symétriques en traction uniaxiale dans l'état non-délaminé. Ce travail propose une méthode générale pour l'analyse des multicouches sous traction uniaxiale par le modèle M4-5n non seulement dans l'état non-délaminé mais aussi dans le cas délaminé où il y a une ou plusieurs fissures aux différentes interfaces. Afin de valider la méthode proposée et montrer son efficacité, une comparaison est effectuée avec les résultats d'une modélisation éléments finis 3D.

## 2 Formulation du modèle M4-5n

Dans cette section, nous présentons brièvement la formulation du modèle M4-5n. Dans les sections suivantes, nous allons utiliser ce modèle pour résoudre le problème de bord libre dans des multicouches composites en extension uniaxiale. Dans la formulation suivante,  $x$  et  $y$  représentent les directions dans le plan et  $z$  est l'axe normal.  $h_-^i$ ,  $h_+^i$  et  $\bar{h}^i$  représentent les cotes inférieure, supérieure et moyenne de la couche  $i$  et  $e^i = h_+^i - h_-^i$  désigne l'épaisseur de la couche. Les indices grecs (tels que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) correspondent à  $\{x, y\}$  ou  $\{1, 2\}$ .

### 2.1 Efforts généralisés et champs de contraintes 3D

Les efforts généralisés sont choisis comme suit ( $\alpha, \beta \in \{x, y\}$ ) :

- Efforts généralisés de la couche  $i$ :

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta}^i(x, y) &= \int_{h_-^i}^{h_+^i} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \\
M_{\alpha\beta}^i(x, y) &= \int_{h_-^i}^{h_+^i} (z - \bar{h}^i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \\
Q_{\alpha}^i(x, y) &= \int_{h_-^i}^{h_+^i} \sigma_{\alpha z}(x, y, z) dz
\end{aligned} \tag{2.1}$$

- Efforts généralisés de l'interface  $i, i + 1$ :

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) &= \sigma_{\alpha z}^i(x, y, h_+^i) = \sigma_{\alpha z}^{i+1}(x, y, h_-^{i+1}) \\
\nu^{i,i+1}(x, y) &= \sigma_{zz}^i(x, y, h_+^i) = \sigma_{zz}^{i+1}(x, y, h_-^{i+1})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Les contraintes dans le plan  $\sigma_{\alpha\beta}$  sont considérées des fonctions affines en  $z$ . Selon les équations d'équilibre 3D, les contraintes de cisaillement  $\sigma_{\alpha z}$  et la contrainte d'arrachement  $\sigma_{zz}$  sont respectivement des polynômes quadratiques et cubique en  $z$ . Les composantes du champ de contraintes 3D sont exprimées en fonction des efforts généralisés.

## 2.2 Déplacements et déformations généralisés

En introduisant les champs de contraintes dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner et intégrant par rapport à  $z$ , on obtient les expressions des déplacements généralisés (3 déplacements et 2 rotations pour chaque couche):

$$\begin{aligned}
U_{\alpha}^i(x, y) &= \frac{1}{e^i} \int_{h_-^i}^{h_+^i} U_{\alpha}(x, y, z) dz \\
U_z^i(x, y) &= \frac{1}{e^i} \int_{h_-^i}^{h_+^i} U_z(x, y, z) dz \\
\Phi_{\alpha}^i(x, y) &= \frac{12}{(e^i)^2} \int_{h_-^i}^{h_+^i} \frac{z - \bar{h}^i}{e^i} U_{\alpha}(x, y, z) dz
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Les déformations généralisées, déduites à partir des déplacements généralisés, sont associées aux efforts généralisés:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i + U_{\beta,\alpha}^i) \\
\chi_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} (\Phi_{\alpha,\beta}^i + \Phi_{\beta,\alpha}^i) \\
d_{\Phi_{\alpha}}^i &= \Phi_{\alpha}^i + U_{z,\alpha}^i \\
D_{\alpha}^{i,i+1} &= U_{\alpha}^{i+1} - U_{\alpha}^i - \left( \frac{e^i}{2} \Phi_{\alpha}^i + \frac{e^{i+1}}{2} \Phi_{\alpha}^{i+1} \right) \\
D_z^{i,i+1} &= U_z^{i+1} - U_z^i
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Les déformations généralisées  $\varepsilon_{\alpha\beta}^i$ ,  $\chi_{\alpha\beta}^i$ ,  $d_{\Phi_{\alpha}}^i$ ,  $D_{\alpha}^{i,i+1}$  et  $D_z^{i,i+1}$  sont associées respectivement aux efforts généralisés  $N_{\alpha\beta}^i$ ,  $M_{\alpha\beta}^i$ ,  $Q_{\alpha}^i$ ,  $\tau_{\alpha}^{i,i+1}$  et  $\nu^{i,i+1}$ .

## 2.3 Loi de comportement et équations d'équilibre

La dérivé de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport aux efforts généralisés rend les relations de comportement du modèle.

Comportement de la couche  $i$  :

- Membrane et Cisaillement dans le plan:  $\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e^i} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\gamma\delta}^i$  (2.5)

- Flexion et Torsion:  $\chi_{\alpha\beta}^i = \frac{12}{(e^i)^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i M_{\gamma\delta}^i$  (2.6)

- Cisaillement hors plan:  $d_{\Phi_\alpha}^i = \frac{6}{5e^i} S_{Q_{\alpha\beta}}^i Q_\beta^i - \frac{1}{10} S_{Q_{\alpha\beta}}^i (\tau_\beta^{i-1,i} + \tau_\beta^{i,i+1})$  (2.7)

Comportement de l'interface  $i, i + 1$  :

- Cisaillement:

$$D_\alpha^{i,i+1} = -\frac{1}{10} (S_{Q_{\alpha\beta}}^i Q_\beta^i + S_{Q_{\alpha\beta}}^{i+1} Q_\beta^{i+1}) - \frac{1}{30} (e^i S_{Q_{\alpha\beta}}^i \tau_\beta^{i-1,i} + e^{i+1} S_{Q_{\alpha\beta}}^{i+1} \tau_\beta^{i+1,i+2}) + \frac{2}{15} (e^i S_{Q_{\alpha\beta}}^i + e^{i+1} S_{Q_{\alpha\beta}}^{i+1}) \tau_\beta^{i,i+1}$$
 (2.8)

- Arrachement:

$$D_z^{i,i+1} = \frac{9}{70} (e^i S_\nu^i \nu^{i-1,i} + e^{i+1} S_\nu^{i+1} \nu^{i+1,i+2}) + \frac{13}{35} (e^i S_\nu^i + e^{i+1} S_\nu^{i+1}) \nu^{i,i+1}$$
 (2.9)

La dérivé de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport aux déplacements généralisés donne les équations d'équilibre. Comme il y a 5 déplacements généralisés, on obtient 5 équations d'équilibre par couche:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i} &= 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta}^i + \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i}) - Q_\alpha^i &= 0 \\ Q_{\beta,\beta}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} &= 0 \end{aligned}$$
 (2.10)

### 3 Analyse du problème non-délaminé

#### 3.1 Description du problème

On considère une éprouvette multicouche  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  de longueur  $2l$ , de largeur  $2b$  et d'épaisseur  $2h$  occupant le domaine  $\Omega = [-l, l] \times [-b, b] \times [-h, h]$ . L'éprouvette est soumise à une extension uniaxiale de telle sorte que des déplacements longitudinaux moyens  $+\Delta$  et  $-\Delta$  sont imposés respectivement sur les bords  $x = +l$  et  $x = -l$ . Les autres bords sont libres (Fig.1). En supposant que l'éprouvette soit assez longue suivant  $x$ , les déformations généralisées ne dépendent que de  $y$ .

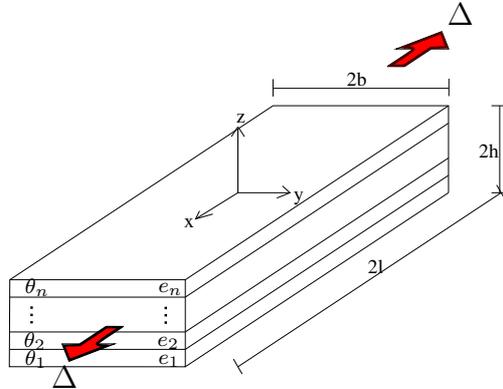


Figure 1: Géométrie du multicouche, déplacements imposés

### 3.2 Formulation M4-5n du Problème

Sachant que le champ de déformations est indépendant de  $x$ , on peut écrire les champs des déplacements généralisés sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} U_x^i(x, y) &= \frac{\Delta}{l}x + u_x^i(y) & ; & & U_y^i(x, y) &= u_y^i(y) & ; & & U_z^i(x, y) &= u_z^i(y) \\ \Phi_x^i(x, y) &= \phi_x^i(y) & ; & & \Phi_y^i(x, y) &= \phi_y^i(y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En introduisant ces déplacements dans les équations 2.4, nous obtenons les déformations généralisées comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= \frac{\Delta}{l} & ; & & \varepsilon_{yy}^i &= u_y^{i'} & ; & & \varepsilon_{xy}^i &= \frac{1}{2}u_x^{i'} \\ \chi_{xx}^i &= 0 & ; & & \chi_{yy}^i &= \phi_y^{i'} & ; & & \chi_{xy}^i &= \frac{1}{2}\phi_x^{i'} \\ d_x^i &= \phi_x^i & ; & & d_y^i &= \phi_y^i + u_z^{i'} \\ D_x^{i,i+1} &= u_x^{i+1} - u_x^i - \left( \frac{e^i}{2}\phi_x^i + \frac{e^{i+1}}{2}\phi_x^{i+1} \right) \\ D_y^{i,i+1} &= u_y^{i+1} - u_y^i - \left( \frac{e^i}{2}\phi_y^i + \frac{e^{i+1}}{2}\phi_y^{i+1} \right) \\ D_z^{i,i+1} &= u_z^{i+1} - u_z^i \end{aligned} \quad (3.2)$$

où le signe prime signifie la dérivé par rapport à  $y$ . En utilisant les relations de comportement 2.5 à 2.9, les équations d'équilibre 2.10, on obtient  $16n - 3$  champs inconnus ainsi le même nombre d'équations dont  $6n - 3$  sont algébriques et  $10n$  sont différentielles du premier ordre. En condensant ce système d'équations, on extrait un système de  $5n$  équations différentielles du second ordre sous la forme suivante:

$$\underline{X}'' = \underline{M} \cdot \underline{X} \quad (3.3)$$

où  $\underline{X}$  est un vecteur inconnu de dimension  $5n$  et  $\underline{M}$  est une matrice de dimensions  $5n \times 5n$  qui dépend des propriétés mécaniques des matériaux, des orientations et des épaisseurs des couches. Comme il n'y a  $5n$  équations différentielles du second ordre, il faut  $10n$  conditions aux limites pour résoudre le système. Ces conditions s'obtiennent en appliquant les conditions de bord libre en  $y = \pm b$ . Pour chaque couche de  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) on a 10 conditions:

$$N_{xy}^i(\pm b) = 0 \quad , \quad N_{yy}^i(\pm b) = 0 \quad , \quad M_{xy}^i(\pm b) = 0 \quad , \quad M_{yy}^i(\pm b) = 0 \quad , \quad Q_y^i(\pm b) = 0 \quad (3.4)$$

La solution analytique de ce système d'équations s'obtient sous la forme des fonctions exponentielles, trigonométriques et polynomiales.

## 4 Analyse du problème délaminé

### 4.1 Multicouche avec une interface délaminée

Dans cette section, on s'intéresse à l'état délaminé. On considère le même problème sauf que cette fois-ci il y a une ou plusieurs fissures interlaminaires. Dans un premier temps, on suppose qu'il y a une seule fissure à une interface quelconque comme  $k, k + 1$ . L'interface est supposée complètement délaminée à partir du bord libre  $y = b$  jusqu'à  $y = b - a$  tout au long du multicouche dans la direction  $x$  (Fig.2). En admettant l'invariance dans la direction  $x$ , on distingue deux zones:

$$\begin{aligned} \text{Zone I} & : -b \leq y \leq (b - a) \quad \text{zone non-délaminée} \\ \text{Zone II} & : (b - a) \leq y \leq b \quad \text{zone délaminée} \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, on trouve les expressions des champs inconnus sur la zone I (non-délaminée) et II (délaminée) séparément, puis en imposant les continuités et les conditions aux limites,

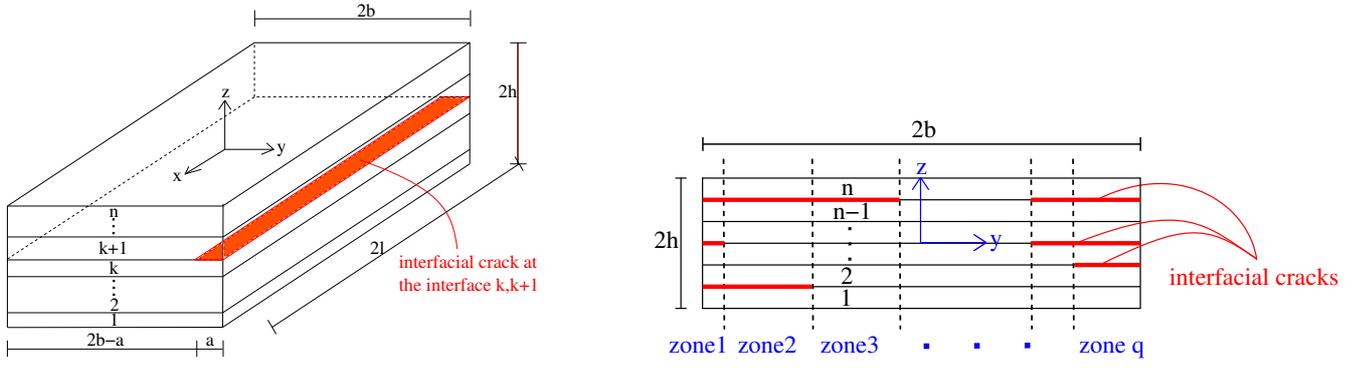


Figure 2: Multicouche avec une fissure de longueur  $a$  à l'interface  $k, k + 1$  (à gauche) - Multicouche avec plusieurs interfaces délaminées; la méthode de résolution (à droite)

on obtient la solution générale du problème. La solution du problème non-délaminé (zone I) est déjà obtenue dans la section précédente. Il faut trouver la solution du problème délaminé (zone II). On suppose que le stratifié est complètement délaminé à l'interface  $k, k + 1$  sur la zone II:

$$\tau_x^{k,k+1} = 0 \quad , \quad \tau_y^{k,k+1} = 0 \quad , \quad \nu^{k,k+1} = 0 \quad ; \quad (b - a) \leq y \leq b \quad (4.1)$$

On a 3 équations en plus ; en revanche il y a trois discontinuités de déplacement à l'interface délaminée. En écrivant les équations du modèle M4-5N et en appliquant la même méthode utilisée pour le problème non-délaminé, un système similaire de  $5n$  équations différentielles du second ordre s'obtient comme suit:

$$\underline{X}'' = \underline{M}_d \cdot \underline{X} \quad (4.2)$$

où  $\underline{M}_d$  est une matrice  $5n \times 5n$  qui dépend non seulement des propriétés des matériaux, des orientations et des épaisseurs des couches, mais aussi de la position de la fissure.

Pour trouver la solution générale du problème il faut appliquer les conditions aux limites. Puisqu'il y a 2 systèmes de  $5n$  équations du second ordre, il faut  $2 \times 10n$  conditions. Il y a  $10n$  conditions aux limites sur les bords libres  $y = \pm b$  (équations 3.4). Les  $10n$  autres conditions sont déduites de la continuité des déplacements et des efforts généralisés entre les zones I et II. Il y a 5 relations de continuité de déplacement par couche comme suit:

$$\begin{aligned} [u_x^i(y_p)]^I &= [u_x^i(y_p)]^{II} \quad , \quad [u_y^i(y_p)]^I = [u_y^i(y_p)]^{II} \quad , \quad [u_z^i(y_p)]^I = [u_z^i(y_p)]^{II} \\ [\phi_x^i(y_p)]^I &= [\phi_x^i(y_p)]^{II} \quad , \quad [\phi_y^i(y_p)]^I = [\phi_y^i(y_p)]^{II} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Concernant les efforts généralisés aussi, il y a 5 conditions de continuité:

$$\begin{aligned} [N_{xy}^i(y_p)]^I &= [N_{xy}^i(y_p)]^{II} \quad , \quad [N_{yy}^i(y_p)]^I = [N_{yy}^i(y_p)]^{II} \\ [M_{xy}^i(y_p)]^I &= [M_{xy}^i(y_p)]^{II} \quad , \quad [M_{yy}^i(y_p)]^I = [M_{yy}^i(y_p)]^{II} \\ [Q_y^i(y_p)]^I &= [Q_y^i(y_p)]^{II} \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.2 Multicouche avec plusieurs interfaces délaminées

Maintenant, on s'intéresse à une configuration quelconque de délaminage où l'on peut avoir plusieurs fissures avec différentes longueurs (Fig.2). L'approche proposée consiste à généraliser la méthode appliquée précédemment. En effet, dans le cas d'une seule fissure, le stratifié a été divisée en deux zones en pointe de la fissure. De même, en présence de plusieurs fissures, on segmente la section du stratifié suivant la direction  $y$  à chaque pointe de fissure de sorte qu'on trouve plusieurs zones (Fig.2). La solution du problème sur chaque zone est sous la forme 3.3 pour les zones non-délaminées ou sous la forme 4.2 pour les zones délaminées. Après avoir trouvé la solution de chaque zone, en écrivant les relations de continuité et les conditions aux limites on obtient la solution globale du multicouche.

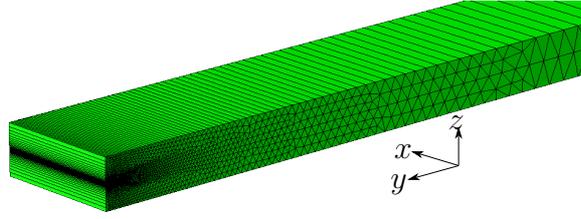


Figure 3: Modèle éléments finis 3D du multicouche

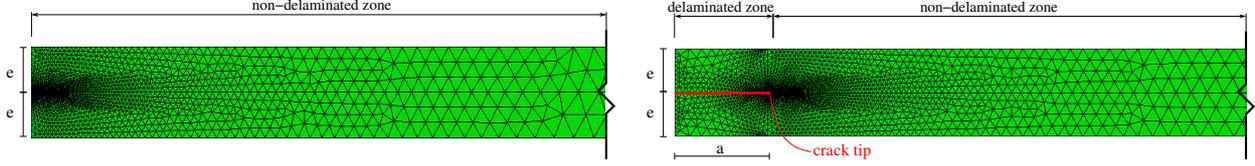


Figure 4: Maillage EF dans le plan  $yz$  : état non-délaminé (à gauche); état délaminé (à droite)

## 5 Validation du modèle M4-5n en comparaison avec la méthode des éléments finis

### 5.1 Multicouche non-délaminé

Afin d'évaluer la précision et l'efficacité du modèle M4-5n, les résultats du modèle M4-5n sont comparés avec ceux des éléments finis 3D obtenus par le code commercial ABAQUS. On considère des plaques multicouches rectangulaires  $(10^\circ, -10^\circ)_s$  and  $(20^\circ, -20^\circ)_s$  avec des couches carbone/epoxy (G947/M18) et (CTE1/T700) dont les propriétés mécaniques sont présentées au tableau 1. La déformation uniaxiale  $\varepsilon_{xx} = 0,001$  est imposée aux bords  $x = \pm l$ . Il est supposé que le stratifié est long donc il n'y a pas de variation dans le sens  $x$ . Grâce à la symétrie de l'empilement, on ne modélise que la moitié de l'éprouvette. Pour le modèle éléments finis 3D, en raison de l'invariance

	G947/M18	CTE1/T700
$E_L$ (Gpa)	97.6	153.82
$E_T$ (Gpa)	8.0	10.61
$E_N$ (Gpa)	8.0	10.61
$G_{LT}$ (Gpa)	3.1	5.58
$G_{LN}$ (Gpa)	3.1	5.58
$G_{TN}$ (Gpa)	2.7	5.58
$\nu_{LT}$	0.37	0.315
$\nu_{LN}$	0.37	0.315
$\nu_{TN}$	0.5	0.315
$e$ (mm)	0.19	0.13

Table 1: Propriétés mécaniques des couches carbone/epoxy G947/M18 et CTE1/T700

dans la direction  $x$ , il suffit de considérer un seul élément dans ce sens avec les conditions suivantes (Fig.3):

$$\begin{aligned}
 U_x(x_1, y, z) &= U_x(x_0, y, z) + (x_1 - x_0)\varepsilon_{xx} \\
 U_y(x_1, y, z) &= U_y(x_0, y, z) \\
 U_z(x_1, y, z) &= U_z(x_0, y, z)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Afin d'obtenir des résultats précis, il faut énormément raffiner le maillage à l'interface correspondante près du bord libre (Fig.4). Dans la modélisation par le modèle M4-5n, il faut faire un choix sur le maillage multiparticulaire; c'est-à-dire le nombre et l'épaisseur de chaque couche dans le modèle. Diaz-Diaz et Caron [16] ont proposé un maillage multiparticulaire régulier dans lequel chaque couche *physique* est modélisée par certaines couches *modèles* ayant la même épaisseur. Par conséquent, le maillage multiparticulaire est régulier suivant l'épaisseur du multicouche. Ici, en améliorant la méthode proposée par Diaz-Diaz et Caron, on propose un maillage irrégulier qui est beaucoup plus efficace pour capter les effets de bord. Donc, pour la comparaison on construit 3 modèles: un modèle

éléments finis 3D, un modèle M4-5n avec un maillage régulier et un modèle M4-5n avec un maillage irrégulier. Pour pouvoir comparer les deux maillages, on fixe le nombre total des couches (et donc le nombre total des équations) en considérant 3 couches modèles par couche physique. La notion du maillage irrégulier consiste à raffiner le maillage multiparticulaire près des interfaces pour pouvoir capter des contraintes précises aux interfaces (Fig.5). Dans cette étude, l'épaisseur des couches supérieure et inférieure à l'interface physique est égale à 1/200 de l'épaisseur d'un pli physique. Puisque on s'intéresse au problème de bord libre, on se concentre sur la distribution des contraintes

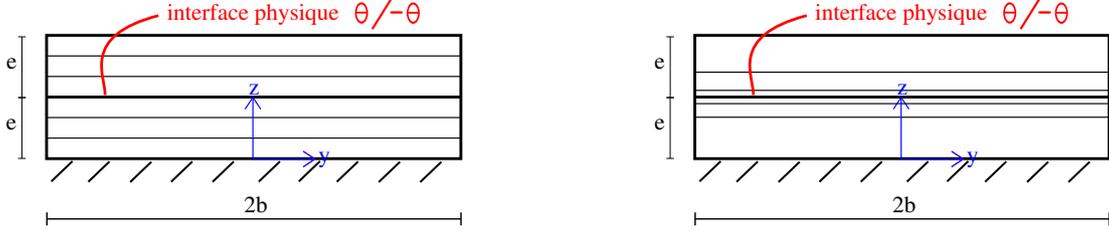


Figure 5: Maillage multiparticulaire : régulier (à gauche) ; irrégulier (à droite)

interlaminaires. Pour ce problème, la contrainte de cisaillement  $\sigma_{13}$  est toujours dominante. Par conséquent, on se limite à la distribution de la contrainte interlaminaire  $\sigma_{13}$ . La Fig.6 montre la

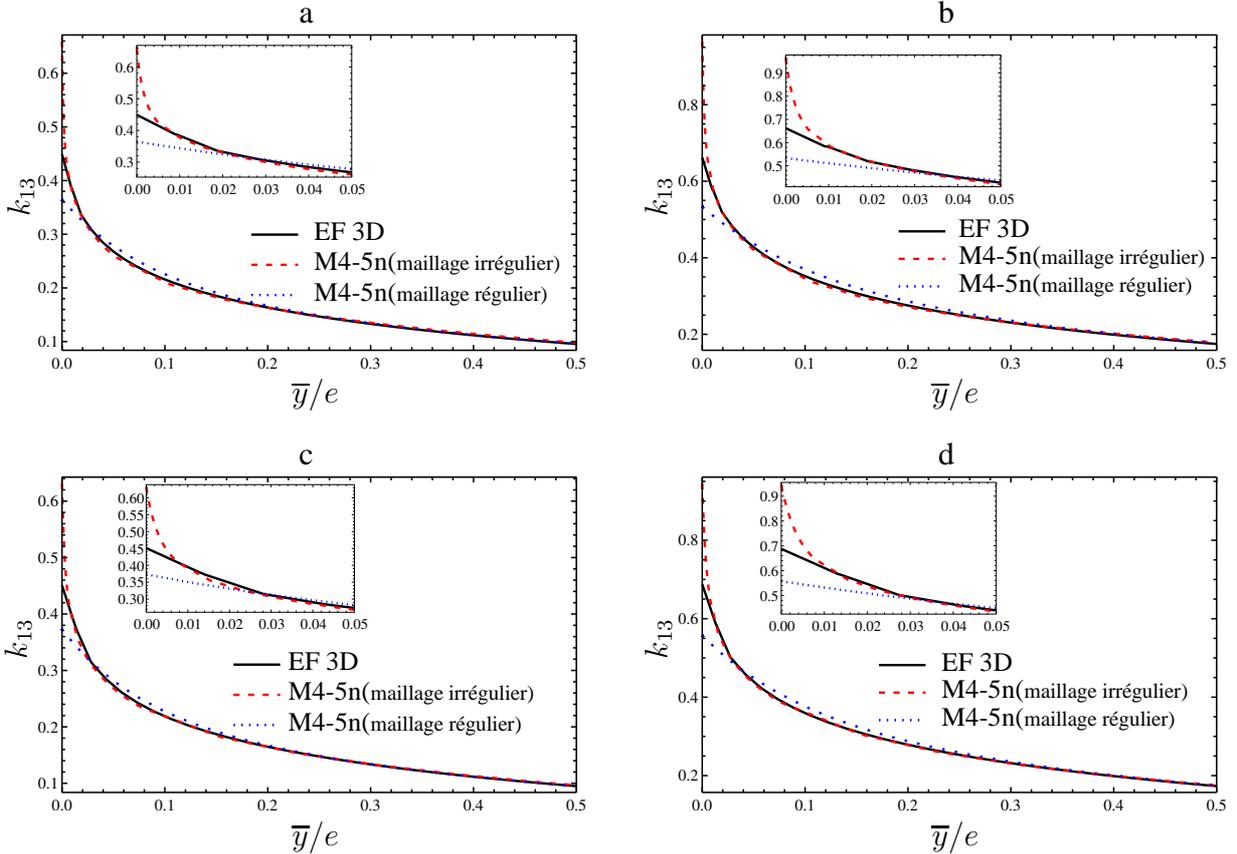


Figure 6: Distribution de la contrainte interlaminaire  $\sigma_{13}$  à l'interface  $\theta/ - \theta$  des empilements  $(\theta, -\theta)_s$  : (a) G947/M18 ;  $\theta = 10^\circ$  (b) G947/M18 ;  $\theta = 20^\circ$  (c) CTE1/T700 ;  $\theta = 10^\circ$  (d) CTE1/T700 ;  $\theta = 20^\circ$

distribution de la fonction  $k_{13} = \frac{\sigma_{13}}{E_x \varepsilon_{xx}}$  (contrainte interlaminaire normalisée) pour les 3 modèles correspondants ( $e$  est l'épaisseur d'un pli). On constate qu'à partir d'une distance  $0.2e$  du bord libre, tous les modèles donnent presque les mêmes résultats; ce qui confirme la précision du modèle M4-5n (même avec un maillage régulier) assez proche du bord libre. Par contre, en s'approchant du bord on s'aperçoit que les résultats des éléments finis sont plus précis par rapport à ceux du modèle M4-5n avec le maillage régulier. Par contre, on constate que le modèle M4-5n avec un maillage irrégulier

(plus raffiné près de l'interface) capte mieux la singularité de contrainte par rapport aux éléments finis; c'est-à-dire le modèle M4-5n avec ce maillage est plus précis que des éléments finis. On garde à l'esprit que dans le modèle éléments finis utilisé il y a des milliers d'éléments 3D alors que pour le modèle M4-5n proposé au total il y a une trentaine d'équations. Cela montre bien la forte efficacité du modèle M4-5n pour l'analyse des problème de bord libre.

## 5.2 Multicouche délaminé

Plusieurs types de problèmes (comme la propagation de fissure, les critères énergétiques de rupture,...) consistent à analyser des multicouches dans l'état délaminé. Par exemple, le double critère d'initiation de délaminage proposé par Leguillon et al.[17] nécessite l'analyse du multicouche non seulement dans l'état non-délaminé pour l'obtention du profil de contrainte interlaminaire mais aussi plusieurs fois dans l'état délaminé afin d'obtenir la courbe de taux de restitution d'énergie incrémental. Dans cette étude, on montre que le modèle M4-5n est une alternative très efficace pour ce type de problème donnant des résultats très précis comme éléments finis 3D.

On considère les mêmes quadricouches qu'avant avec 4 fissures de longueur  $a$  aux interfaces  $\theta/ - \theta$ . En faisant varier la longueur  $a$ , on obtient la courbe du taux de restitution d'énergie incrémental en fonction de la longueur des fissures. Comme avant on considère 3 modèles: éléments finis 3D (Fig 4), M4-5n avec un maillage régulier et M4-5n avec un maillage irrégulier. La fonction

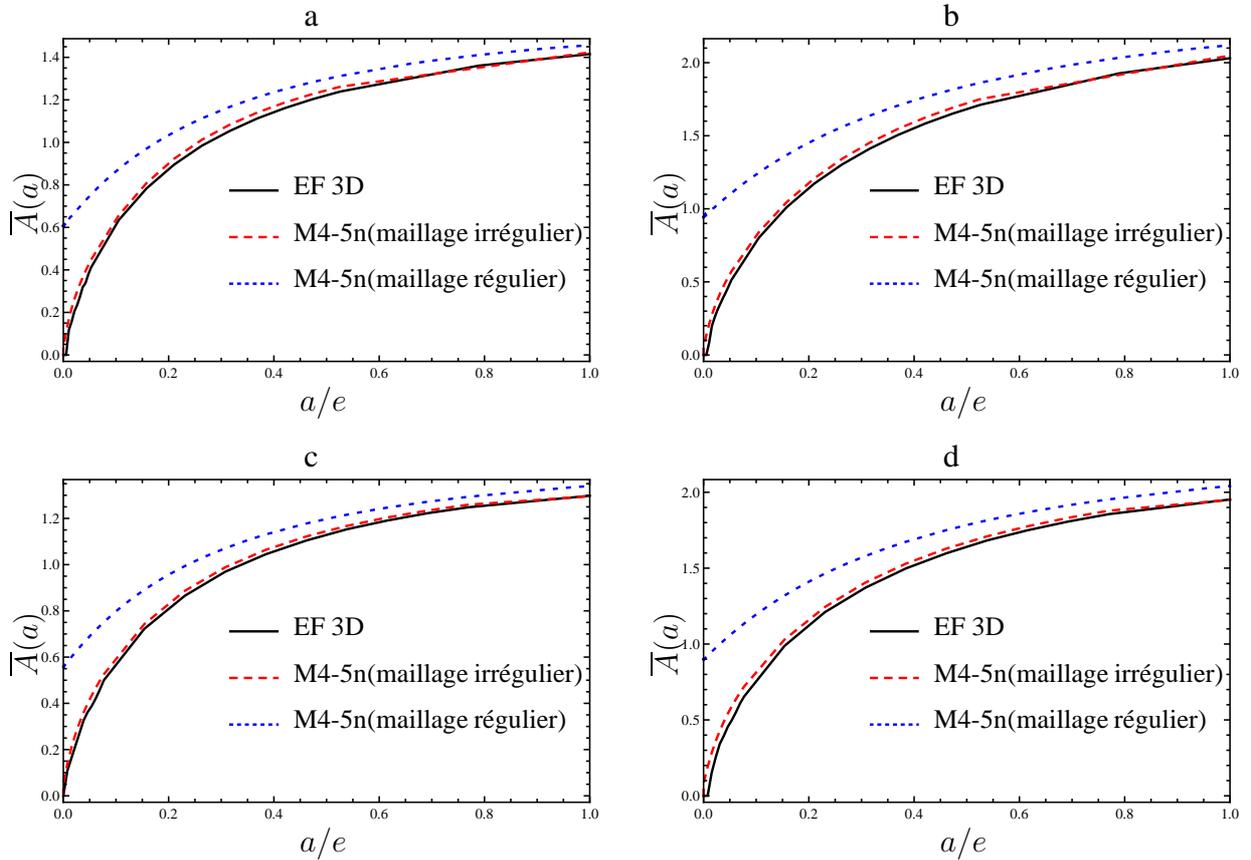


Figure 7: Taux de restitution d'énergie incrémental normalisé en fonction de la taille de fissure : (a) G947/M18 ;  $\theta = 10^\circ$  (b) G947/M18 ;  $\theta = 20^\circ$  (c) CTE1/T700 ;  $\theta = 10^\circ$  (d) CTE1/T700 ;  $\theta = 20^\circ$

$\bar{A}(a) = \frac{G^{inc}(a)}{e E_x \varepsilon_{xx}^2} = \frac{W(a=0) - W(a)}{a L e E_x \varepsilon_{xx}^2}$  est en fait le taux de restitution d'énergie normalisé (voir [17] pour plus de détails). En comparant les courbes des 3 modèles on voit très bien l'influence du maillage multiparticulaire du modèle M4-5n sur le taux de restitution d'énergie. En fait, si on utilise un maillage régulier, la courbe ne passe pas par zéro et les valeurs du taux de restitution d'énergie ne sont pas satisfaisantes pour les petites fissures; sauf qu'on raffine énormément le maillage et dans ce cas-là on perd l'efficacité du calcul. En revanche, en utilisant la méthode proposé dans cette étude avec un maillage progressif on capte très bien la solution 3D. On note que pour obtenir des courbes précises, on a considéré une cinquantaines de valeurs pour  $a$  et donc une cinquantaine d'analyse du multicouche

dans l'état délaminé; ce qui nécessite un temps de calcul énorme pour le modèle éléments finis par rapport au modèle M4-5n.

## 6 Conclusion

Dans ce travail en utilisant le modèle multiparticulaire M4-5n, on a proposé une méthode analytique pour l'analyse des multicouches délaminés et non-délaminés soumis à la traction uniaxiale. Au moyen de ce modèle, on peut analyser des multicouches symétrique et non-symétrique avec une configuration quelconque de fissuration interlaminaire. Vu le nombre total des équations est égal à  $5n$ , la méthode est très efficace en ce qui concerne le temps de calcul et la taille de mémoire. Une stratégie de maillage multiparticulaire pour ce modèle a été proposé qui est beaucoup plus adapté aux problèmes de délaminage par rapport au maillage régulier précédemment proposé par Diaz Diaz et Caron. Une comparaison avec un modèle éléments finis 3D a montré la précision et l'efficacité du modèle M4-5n en évaluant le champ de contraintes interlaminaires et le taux de restitution d'énergie. Cela signifie que le modèle M4-5n peuvent être utilisé comme une bonne alternative aux éléments finis 3D dans des problèmes de délaminage des matériaux multicouches en utilisant les critères en contrainte ainsi que les critères énergétiques. Bien évidemment dans les cas où il faut faire plusieurs calculs, l'avantage de ce modèle par rapport à la modélisation des éléments finis 3D est très considérable; ce qui permet d'aborder des problèmes lourds comme calculs de propagation de fissure, problèmes d'optimisation, etc.

## References

- [1] Pagano N.J. Pipes R.B. Interlaminar stresses in composite laminates - an approximate elasticity solution. *J. Applied Mechanics*, 41:668–72, 1974.
- [2] Pagano N.J. On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate. *J. Composite Materials*, 8:65–81, 1974.
- [3] Sun C.T. Whitney J.M. A higher-order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound and Vibration*, 30:85–97, 1973.
- [4] Pagano N.J. Stress fields in composite laminates. *Int. J. Solids and Structures*, 14:385–400, 1978.
- [5] Pagano N.J. Free edge stress fields in composite laminates. *Int. J. Solids and Structures*, 14:401–6, 1978.
- [6] Levy A. Tang S. A boundary layer theory. part ii: Extension of laminated finite strip. *J. Composite Materials*, 9:42–52, 1975.
- [7] Choi I. Wang S.S. Boundary-layer effects in composite laminates. part i: Free-edge stress singularities. *J. Applied Mechanics*, 49:541–8, 1982.
- [8] Choi I. Wang S.S. Boundary layer effects in composite laminates. part ii: Free-edge stress solutions and basic characteristic. *J. Applied Mechanics*, 49:549–60, 1982.
- [9] Chabot A. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 1997.
- [10] Diaz Diaz A. Carreira R.P., Caron J.F. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials*, 34:217–230, 2002.
- [11] Pagano N.J. Pipes R.B. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *J. Composite Materials*, 4:538–48, 1970.
- [12] Crossman F.W. Wang A.S.D. Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. *J. Composite Materials*, 11:92–106, 1977.
- [13] Crossman F.W. Wang A.S.D. Edge-effect on thermally induced stresses in composite laminates. *J. Composite Materials*, 11:300–12, 1977.
- [14] Reddy J.N. Robbins D.H. Modeling of thick composites using a layerwise laminate theory. *Int. J. for numerical methods in engineering*, 36:655–77, 1993.
- [15] Yang Q. Tian Z., Zhao F. Straight free-edge effects in laminated composites. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41:1–14, 2004.
- [16] Caron J.F. Diaz Diaz A. Prediction of the onset of mode iii delamination in carbon-epoxy laminates. *Composite Structures*, 72:438–445, 2006.
- [17] Carrère N. Martin E., Leguillon D. A twofold strength and toughness criterion for the onset of free-edge shear delamination in angle-ply laminates. *Int. J. Solids and Structures*, 47:1297–1305, 2010.