



**HAL**  
open science

## Design et formes optimales (III) : Optimisation topologique

Grégoire Allaire, François Jouve

► **To cite this version:**

Grégoire Allaire, François Jouve. Design et formes optimales (III) : Optimisation topologique. Images des Mathématiques, 2009, <http://images.math.cnrs.fr/Design-et-formes-optimales-III.html>. hal-00597641

**HAL Id: hal-00597641**

**<https://hal.science/hal-00597641>**

Submitted on 1 Jun 2011

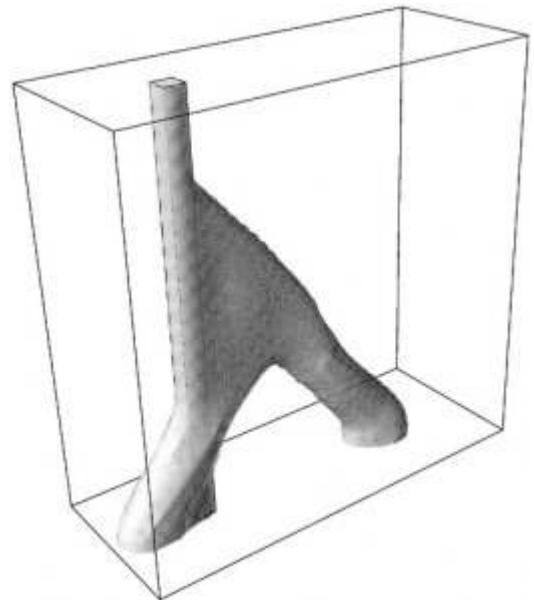
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Design et formes optimales (III)

*Optimisation topologique*

Le 21 décembre 2009, par **Grégoire Allaire** et **François Jouve**



*Cet article fait suite à [celui-ci](#). Il est consacré à des avancées récentes des mathématiques et du calcul scientifique dans le domaine de l'optimisation de formes ou « optimal design ». Ces progrès ont eu des répercussions immédiates dans l'industrie (aéronautique, automobile, génie civil) en mettant à disposition des ingénieurs des logiciels d'optimisation « automatique » de design d'objets ou de structures.*

---

## Optimisation topologique : l'innovation par les maths !

---

**O**N accuse souvent les mathématiciens de « voler au secours de la victoire », c'est-à-dire de justifier par une belle théorie des intuitions et des pratiques utilisées par les physiciens, les mécaniciens ou les ingénieurs. Cette démarche courante est parfaitement légitime et est souvent bien utile car la formalisation d'une approche scientifique permet d'en mieux comprendre les ressorts intimes et d'en améliorer l'efficacité. Mais il est aussi de nombreux exemples où les mathématiques sont pionnières et littéralement innovantes, même aux yeux des utilisateurs finaux pour qui seuls les résultats comptent et pas la manière. L'optimisation topologique de formes est un de ces exemples où l'innovation est due aux mathématiciens et s'est ensuite très rapidement propagée chez les ingénieurs spécialistes. Cette innovation est relativement jeune, puisqu'elle a 20 ans environ, et assez foudroyante dans son application puisque de nombreux logiciels commerciaux, et pas seulement académiques ou propriétés de quelques rares industriels, sont utilisés à travers le monde (voir le [site web](#) qui propose des liens vers quelques uns de ces logiciels).

Nous allons décrire deux méthodes d'optimisation topologique de forme : tout d'abord la méthode **d'homogénéisation**, puis celle des **lignes de niveau**. Ce ne sont pas les seules approches possibles mais probablement les plus populaires. Citons pour mémoire quelques autres méthodes : algorithmes évolutionnaires, gradient topologique (ce dernier peut d'ailleurs être couplé à la méthode des lignes de niveau). Pour des références à ce sujet nous renvoyons à [1].

---

## Méthode d'homogénéisation : de l'importance des matériaux composites

---

De manière grossière l'idée sous-jacente à la méthode d'homogénéisation est de transformer un problème d'optimisation de formes en un problème d'optimisation d'une densité de matière. En tout point de l'espace cette densité est une valeur entre 0 et 1, 0 correspondant à un trou ou du vide (pas de matière), 1 correspondant à du matériau plein, et les valeurs intermédiaires, par exemple 0.5, correspondant à un matériau poreux (avec plein de micro-pores ; pensez à une éponge ou de la mousse). Autrement dit, on remplace le problème original d'optimisation de formes, qui est un problème d'optimisation **discrète** du type 0/1 (vide ou matière en chaque point d'espace), par un nouveau problème d'optimisation d'une densité de matière, qui est un problème d'optimisation **continu** où la variable de densité parcourt l'intervalle complet  $[0, 1]$ . Avec cette nouvelle approche on n'est plus prisonnier de la paramétrisation des formes proposée par Hadamard (la topologie va pouvoir changer !) et, par ailleurs, les problèmes d'optimisation continue sont notoirement plus faciles à résoudre que ceux d'optimisation discrète, en particulier car il est facile de définir et d'utiliser numériquement des notions adéquates de dérivée ou gradient. Cet argument paraît lumineux et évident mais il y a un petit **hic**... Nous venons d'employer les expressions « transformer » ou « remplacer » en parlant du passage du problème original au nouveau : cela cache une difficulté fondamentale ! Est-ce bien le même problème que nous allons résoudre ou bien ne sommes nous pas en train d'inventer un autre problème, facile à résoudre, mais sans aucun lien avec celui qui nous motivait ? C'est ici que les mathématiques interviennent de manière fondamentale car il existe de nombreuses manières de transformer un problème d'optimisation, de le « généraliser » pour qu'il devienne facile à résoudre, mais en général il n'existe qu'une seule façon de le généraliser *a minima* pour qu'il soit, d'une part facile, et d'autre part (et surtout !) identique, dans un certain sens, au problème d'origine. La branche des mathématiques qui s'intéresse à ces questions d'optimisation et de calcul des variations appelle cette procédure de « généralisation au plus juste » la **relaxation** (voir bloc dépliant 5).



### **5. Relaxation en calcul des variations.**

*Sans rentrer dans les détails techniques de la relaxation, essayons d'en expliquer les enjeux concrets dans le cas qui nous intéresse ici. Nous l'avons dit plus haut, les densités intermédiaires correspondent à un matériau poreux ou plus précisément à un matériau composite obtenu par micro-perforation du matériau original. Bien sûr, la densité de ce matériau composite est proportionnelle au volume de matière, par rapport aux volumes de trous, à une échelle microscopique. Mais la seule densité ne suffit pas à caractériser ce matériau composite : il existe une infinité de type de trous pour la même densité et leur forme est essentielle car elle gouverne en particulier l'isotropie ou l'anisotropie du matériau composite (on dit qu'un matériau est isotrope s'il répond aux sollicitations extérieures de la même manière quelque soit son orientation dans l'espace). Ainsi des trous allongés suivant une direction privilégiée produisent un matériau composite anisotrope, plus résistant dans la direction de l'allongement des trous que dans les directions perpendiculaires (pensez aux fibres du bois qui en font un exemple parfait de matériau anisotrope). On appelle cela les propriétés effectives, ou macroscopiques, des matériaux composites. C'est ici qu'entre en jeu la théorie de l'**homogénéisation** dont un des buts est justement de donner une définition précise de ce que sont ces propriétés effectives, de les déterminer en fonction de la microstructure des trous et enfin de caractériser l'ensemble des matériaux composites que l'on peut construire par micro-perforation du matériau original. L'homogénéisation a eu de nombreuses autres applications, notamment dans tout ce qui concerne les problèmes multi-échelles où l'on souhaite trouver des correspondances entre un modèle microscopique et un modèle **moyenné** macroscopique. Mais il est remarquable historiquement de voir que cette théorie a été développée dans les années 1970-1980 précisément dans le but d'obtenir la relaxation de problèmes d'optimisation de formes. Les grands acteurs de ce développement sont principalement F. Murat et L. Tartar en France, mais aussi A. Cherkaev et K. Lurie en Russie, ainsi que R. Kohn et G. Strang aux États-Unis. En conclusion, il est remarquable de constater que la détermination de la relaxation de notre problème d'optimisation de formes est équivalente à la caractérisation d'un ensemble de matériaux composites micro-perforés obtenus à partir du matériau original, et tout aussi remarquable que ces deux questions aient obtenues des réponses complètes et élégantes !*

Nous pouvons maintenant décrire la méthode d'homogénéisation en optimisation topologique de formes. Il s'agit d'optimiser, non plus une forme, mais une densité de matière **et** une microstructure

de matériau composite. On peut montrer que ces deux variables s'optimisent de manière presque indépendantes : la microstructure optimale est connue explicitement et **localement** en chaque point de l'espace, pourvu que l'on connaisse la déformation ou la contrainte subie, tandis que la densité s'optimise numériquement et **globalement**, encore une fois par un algorithme de type gradient. Ce type d'approche **micro-macro** ou local/global est extrêmement efficace et populaire en optimisation de formes mais aussi dans de nombreux autres domaines de la mécanique. La méthode d'homogénéisation est très rapide car, d'une part, l'optimisation locale de la microstructure est analytique (donc immédiate), et d'autre part, il n'est plus besoin de remailler puisqu'on ne suit pas une forme qui bouge mais on capture une densité de matière sur un maillage fixe. Évidemment, il n'y a plus aucune contrainte topologique : les trous peuvent apparaître ou disparaître au gré des variations de la densité. Il s'agit donc bien d'un algorithme qui permet de changer et d'optimiser la topologie.

Pour illustrer la méthode nous présentons deux cas test sous forme de film, ci-dessous, qui correspondent à des consoles optimales, courte ou longue (rappelons que le bord de gauche est fixé tandis qu'une force verticale est appliquée au milieu du bord de droite). Nous traçons la densité de matière, représentée par un niveau de gris, noir correspondant à du matériau plein, blanc correspondant à du vide. Si le premier exemple (console optimale courte) conduit bien, dans un premier temps, à une forme assez clairement dessinée (deux barres se joignant à angle droit au point d'application de la force), le deuxième exemple (console optimale longue) est un peu déroutant puisqu'il contient de larges zones de gris, indiquant la présence de matériau composite. L'utilisation de matériaux composites est courante de nos jours, mais pour d'autres raisons (faisabilité, coût, autres propriétés) il peut être souhaitable d'obtenir une solution optimale qui soit vraiment une forme (densité 0 ou 1 seulement) et pas un matériau composite (densité prenant toutes les valeurs entre 0 et 1). C'est à nouveau la notion de relaxation qui va permettre de contourner cette dernière difficulté. En effet, la théorie mathématique de la relaxation affirme que, près de toute solution optimale « relaxée » (c'est-à-dire un matériau composite), on peut trouver une forme classique, solution quasi-optimale, aussi proche que l'on veut de l'optimum absolu. L'idée pour retrouver cette forme classique proche de notre forme composite est de **pénaliser** les matériaux composites à la fin de l'optimisation numérique. Il suffit pour cela d'ajouter à la fonction objectif un terme proportionnel au volume de composite. On ne fait cela qu'après avoir convergé préalablement vers une solution composite optimale pour éviter de rester « coincé » dans un optimum local. On applique cette procédure de pénalisation aux deux consoles optimales et les films ci-dessous se terminent par une étape de pénalisation qui s'enchaîne immédiatement après l'obtention d'une forme composite optimale.



**Optimisation par la méthode d'homogénéisation d'une console courte**



### Optimisation par la méthode d'homogénéisation d'une console longue

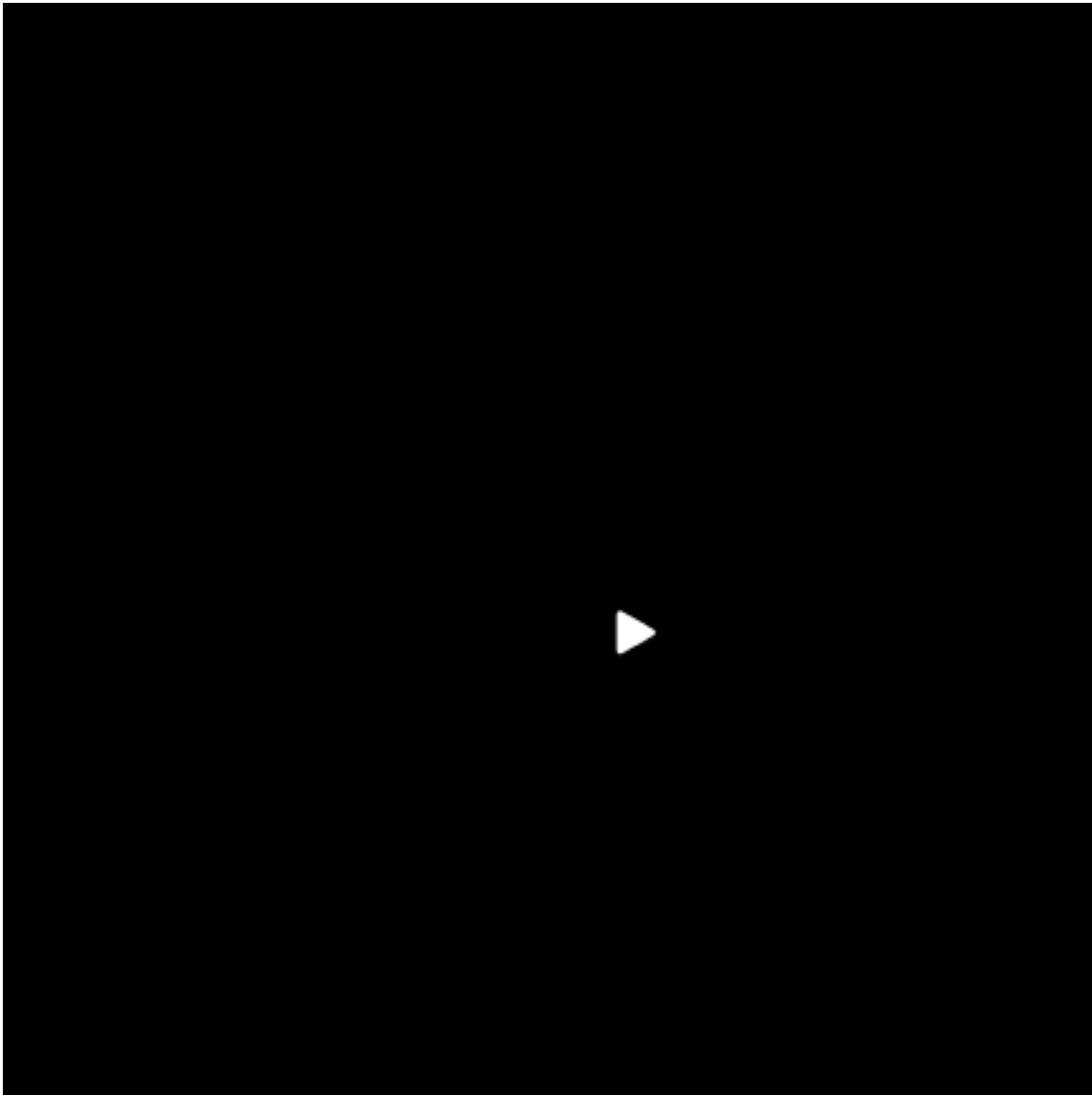
Si la console optimale courte ne change pas beaucoup, il n'en est pas de même pour la console optimale longue qui se transforme en un treillis de barres, réminiscent de nombreuses structures en génie civil ou mécanique. **Comme par magie** diraient certains, mais rappelons encore une fois que çà n'est pas de la magie et seulement la conséquence logique du théorème de relaxation évoqué plus haut. Insistons aussi sur le fait que les matériaux composites utilisés dans la méthode d'homogénéisation ne sont pas décrits uniquement par une densité de matière mais aussi par une microstructure de trous : la pénalisation ne fait que révéler à l'échelle (visible) du maillage cette microstructure essentielle mais restée cachée à une échelle **sous-maille**.

Un des grands atouts de la méthode d'homogénéisation est qu'elle fonctionne aussi bien en dimension trois d'espace qu'en dimension deux (ce qui n'est pas le cas, en pratique et à l'heure actuelle, de la méthode d'optimisation géométrique d'Hadamard). Ainsi nous proposons dans le film ci-dessous la forme d'un pilone optimal dont seul les trois quarts sont tracés pour mieux en apprécier la structure.



### **Optimisation par la méthode d'homogénéisation d'un pilone**

Le film ci-dessous présente un pont optimal pour lequel seuls les renforts latéraux sont optimisables (mais pas le tablier qui est fixe). Dans les deux films précédents on enchaîne encore les phases d'optimisation de la forme composite et de pénalisation.



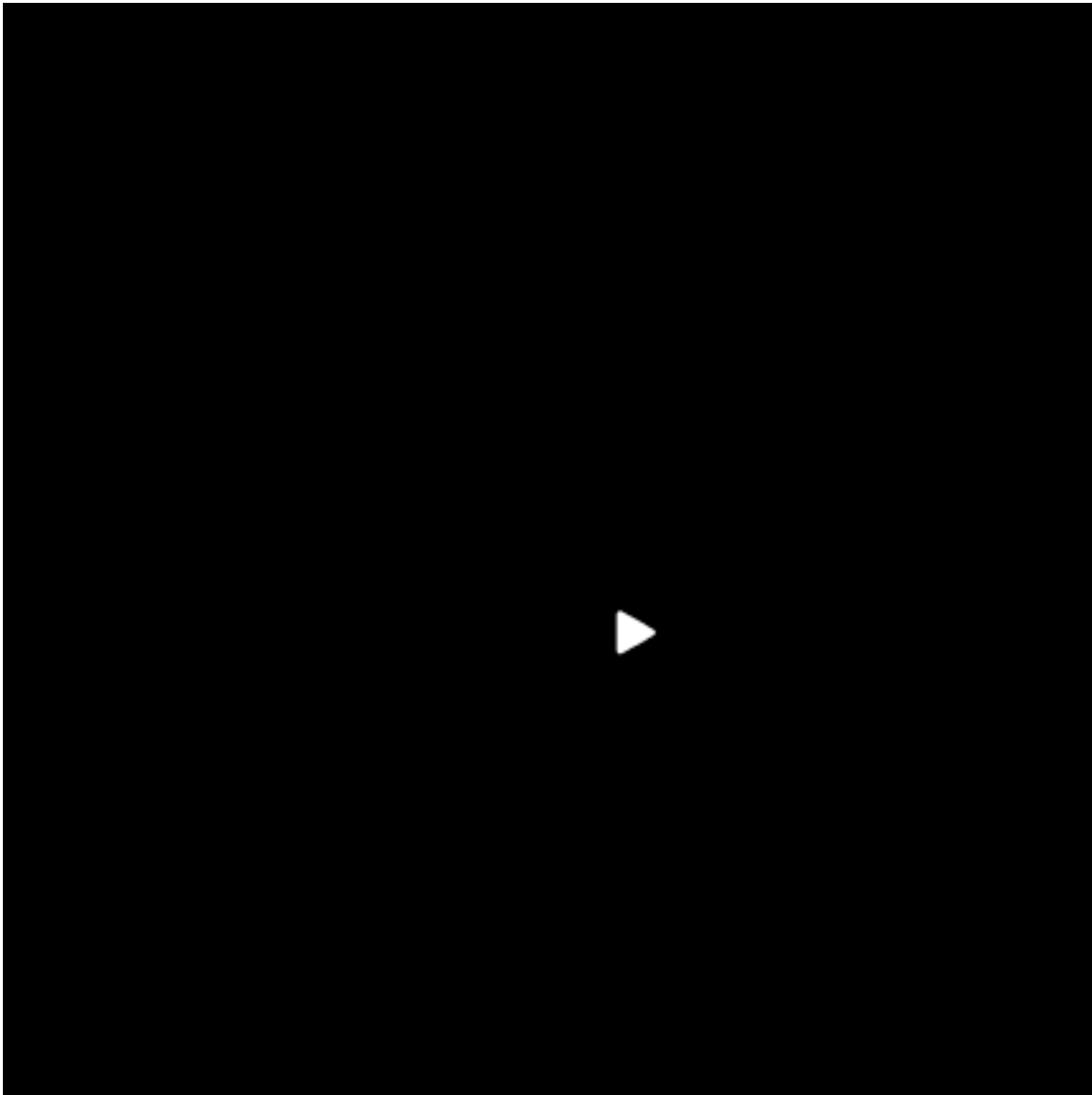
### **Optimisation par la méthode d'homogénéisation d'un pont**

Finissons cette brève description en disant que l'expérience montre qu'en général cette méthode converge vers des optima globaux et non pas locaux. En effet, si on change les initialisations on obtient les mêmes résultats : c'est manifeste sur les exemples ci-dessous qui reprennent le cas test de la console optimale longue avec deux initialisations « étranges », d'une part la structure optimale « à l'envers », et d'autre part le portrait célèbre d'un héros révolutionnaire qui, quoi qu'on en pense, n'a aucune raison d'être de forme optimale !





**Console optimale obtenue à partir d'une forme inversée**



Console optimale obtenue à partir du portrait de Che Guevara

---

## Méthode des lignes de niveaux : Hadamard ressuscité !

---

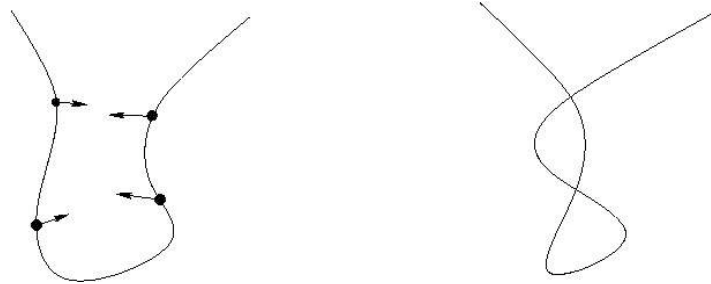
La méthode d'homogénéisation est un grand succès pour l'optimisation topologique de formes. La plupart des logiciels industriels et commerciaux en utilisent une version simplifiée, appelée SIMP (pour « solid isotropic material with penalization »). Néanmoins, la théorie mathématique n'est vraiment complète que pour des fonctions objectifs du type de la compliance et, de même, la pratique numérique est plus délicate pour des fonctions objectifs quelconques (différentes de la compliance), notamment la phase de pénalisation qui peut devenir délicate à piloter. Pour cette raison les chercheurs ont continué à travailler sur de nouvelles pistes en optimisation topologique. Au début des années 2000 est apparu une nouvelle approche à la fois simple et puissante : **la méthode des lignes de niveaux**. Celle-ci repose sur deux ingrédients : d'une part l'algorithme des lignes de niveaux, mis au point par S. Osher et J. Sethian à la fin des années 1980 pour la propagation de fronts (en combustion, croissance de cristaux, mécanique des fluides, imagerie, etc.), et d'autre part la dérivation par rapport au domaine, au sens d'Hadamard. Cette approche a remis au goût du jour les travaux d'Hadamard et les a fait découvrir par toute une communauté d'ingénieurs : on peut

vraiment parler de résurrection ! En deux mots, l'algorithme des lignes de niveaux consiste à repérer le bord d'une forme comme la ligne de niveau 0 d'une certaine fonction  $\psi$  (voir bloc dépliant 6).



## 6. Méthode des lignes de niveaux.

Expliquons l'ingrédient nouveau dans ce cadre, c'est-à-dire l'algorithme des lignes de niveaux. Pour fixer les idées, plaçons nous dans le plan et considérons une forme dont le bord est une ligne fermée. Pour faire évoluer ou déplacer cette ligne deux approches sont possibles : une lagrangienne et une eulérienne. Cette dualité ou opposition entre **Lagrange** et **Euler** est classique dans de nombreux domaines des mathématiques. D'une certaine manière l'approche la plus naturelle est lagrangienne. Elle consiste à repérer cette ligne par un certain nombre de points ou marqueurs que l'on déplace, indépendamment les uns des autres, suivant une certaine direction ou vitesse. Après les avoir déplacés on reconstruit la ligne en reliant les points dans leur ordre initial. Cette façon de faire est illustrée sur la figure ci-dessous.

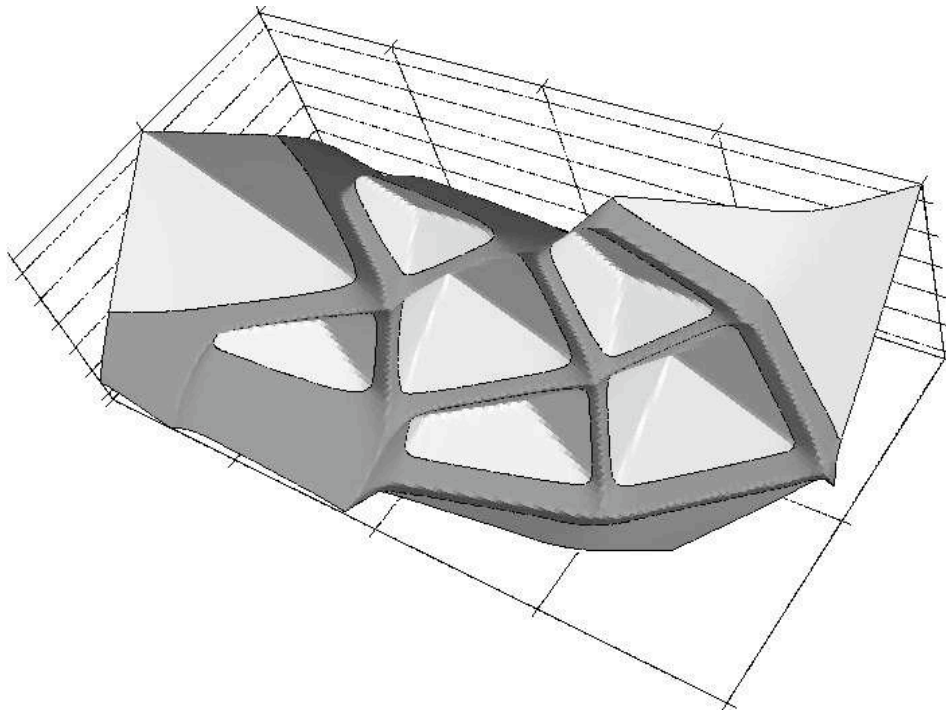


### **Approche Lagrangienne du mouvement d'une ligne**

*Lors du déplacement des « marqueurs » d'une ligne dans le plan, cette ligne peut se croiser avec elle-même ce qui rend délicat la notion d'intérieur ou d'extérieur si la ligne est fermée.*

Tant que l'on ne déplace pas beaucoup la ligne elle fonctionne très bien, mais dès que la ligne se croise (ce qui correspond à un changement de topologie de la forme) alors se pose la question cruciale de définir l'intérieur de cette ligne, c'est-à-dire la forme. C'est exactement l'approche suivie dans la méthode d'optimisation géométrique de formes d'Hadamard et cette dernière, pour des raisons numériques comme théoriques, se « bloque » avant tout croisement : on ne pouvait pas changer la topologie. Le point de vue eulérien adopté dans l'algorithme des lignes de niveaux est radicalement différent : il s'agit de représenter le bord de la forme, la ligne, par une fonction définie dans **tout le plan**. Cela peut sembler augmenter la complexité puisqu'une ligne peut être paramétrée par une seule variable (l'abscisse curviligne) alors qu'une fonction dans le plan est définie par deux variables (abscisse et ordonnée), mais ce que l'on perd de ce côté est largement compensé par le fait que c'est cette fonction qui va désormais évoluer, sans avoir besoin de connaître la position de la ligne !

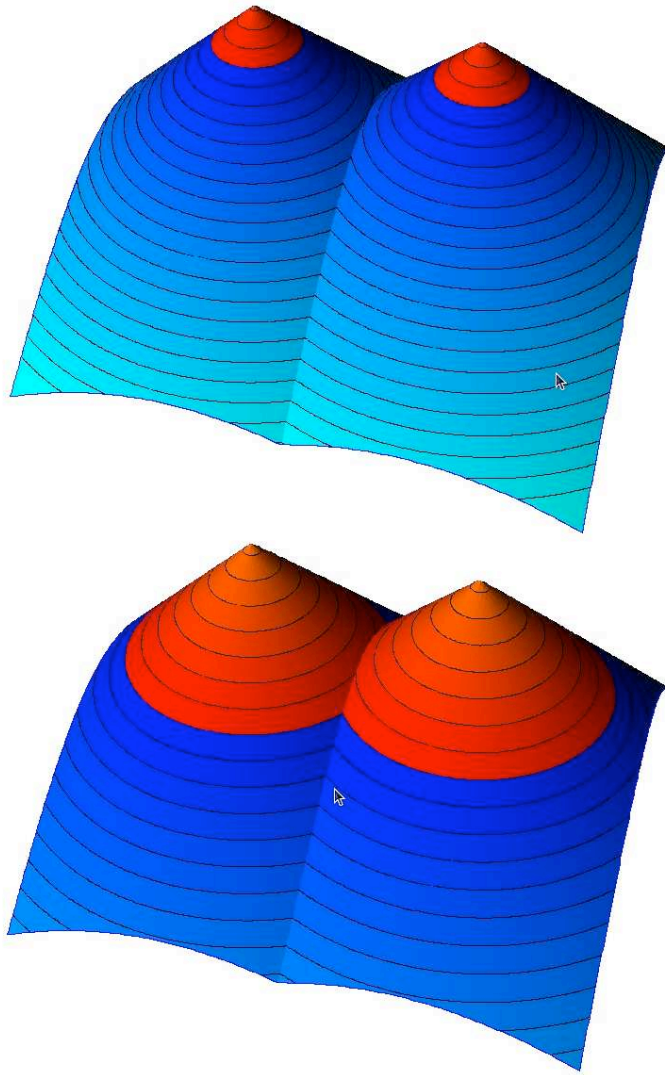
On introduit donc une fonction, dite de lignes de niveau,  $\psi(\vec{x})$ , définie et continue de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $\psi(\vec{x}) < 0$  si  $\vec{x}$  est à l'intérieur de la forme,  $\psi(\vec{x}) > 0$  si  $\vec{x}$  est à l'extérieur de la forme, et  $\psi(\vec{x}) = 0$  si  $\vec{x}$  est sur le bord de la forme. Autrement dit, le bord de la forme est défini comme la ligne de niveau 0 de cette fonction  $\psi$  : voir la figure ci-dessous pour un exemple.



### **Fonction ligne de niveaux**

*Il s'agit de la fonction ligne de niveaux, définie ici comme la distance signée au bord d'une console optimale (plane) à 7 trous.*

*L'immense avantage de cette approche est que, après avoir fait évoluer cette fonction  $\psi$  partout dans l'espace, sans savoir a priori où est le bord de la forme, on trace a posteriori sa ligne de niveau 0 pour obtenir le bord de la forme. Cela permet de gérer de manière automatique les changements de topologie de la forme, ou les croisements de la ligne de son bord. Imaginez la mer descendant sur un paysage de montagne, un col en particulier : le bord de mer dessine initialement une ligne composée de deux morceaux, puis lorsqu'elle atteint le col, cette ligne n'est plus que d'un seul tenant (voir la figure ci-dessous avec la mer en bleu et la montagne en rouge). On peut démontrer mathématiquement, sous des hypothèses raisonnables sur la vitesse d'avancement du bord, que cette évolution est bien posée, c'est-à-dire que pour tout temps on peut reconstruire de manière unique le bord d'une forme (sans plus aucun obstacle de nature topologique). Nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus (et compétent !) au livre [2].*

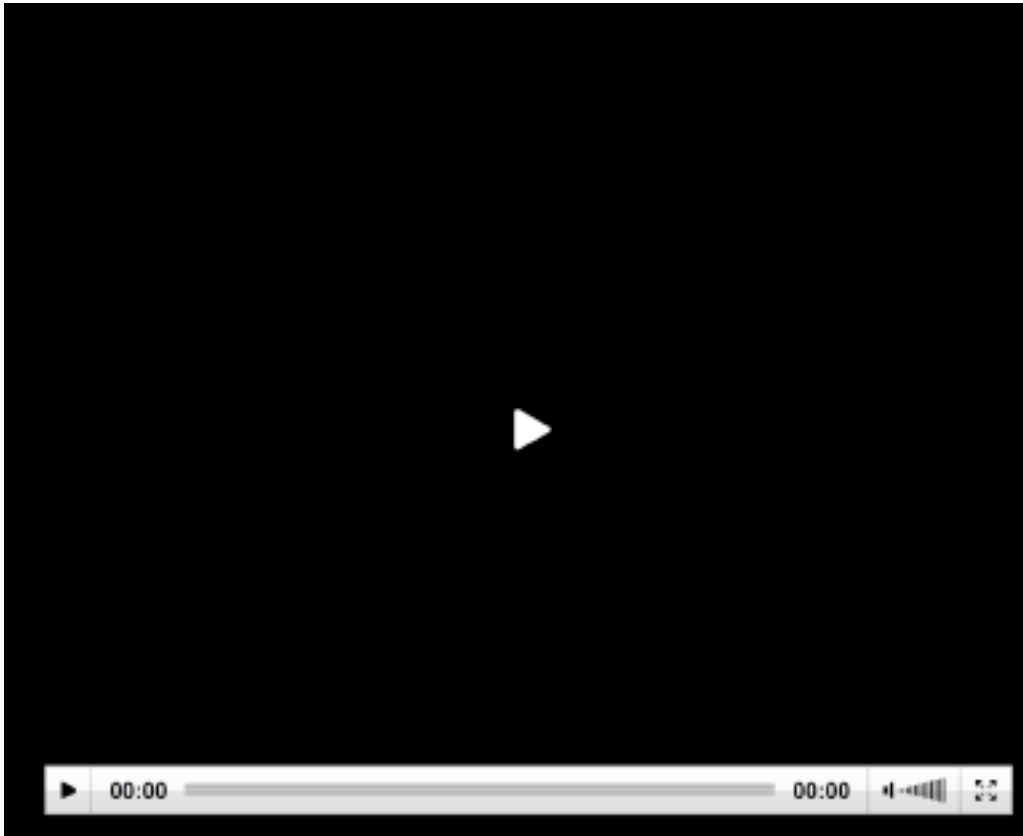


**Changement de topologie avec une fonction ligne de niveaux**

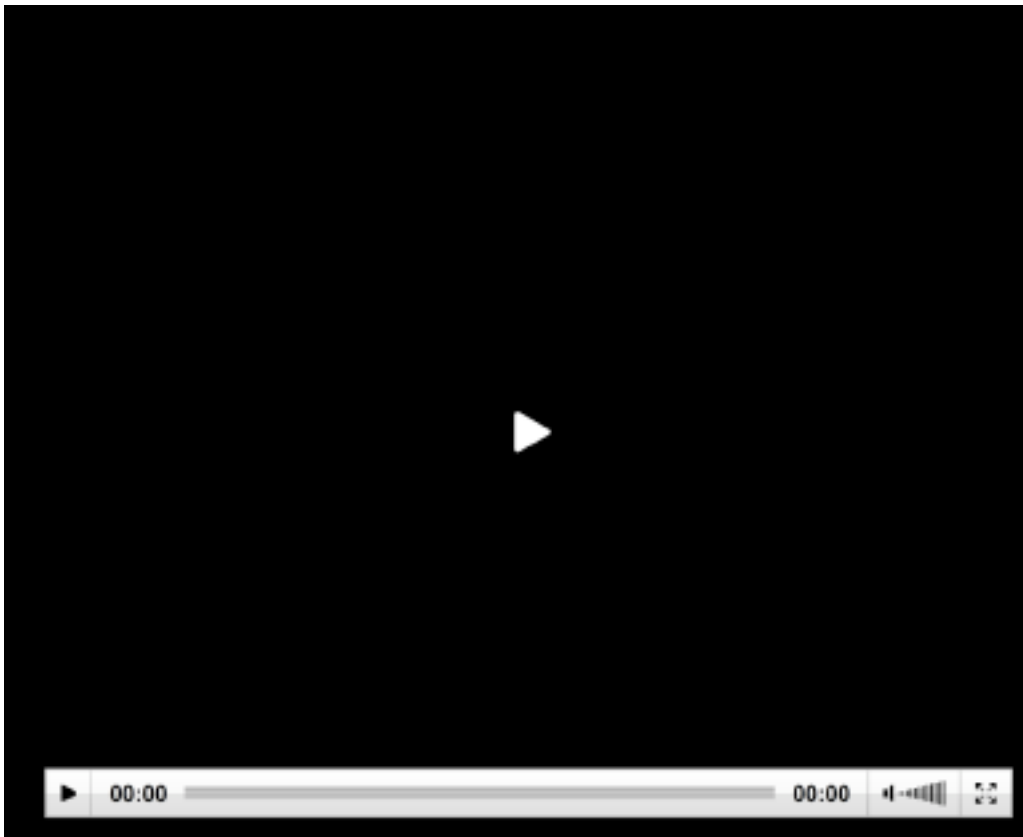
*Deux isovaleurs différentes de la même fonction ligne de niveaux (la distance signée à l'union de disques disjoints) conduisent à deux zones rouges de topologie différente.*

L'algorithme numérique que nous en déduisons apparaît comme une combinaison des deux précédents. Comme pour le premier algorithme d'optimisation géométrique de formes (voir la deuxième partie de cet article en trois parties), il repose sur la dérivée par rapport au domaine d'Hadamard qui donne la vitesse d'avancement du bord de la forme. Comme pour le deuxième algorithme d'optimisation topologique de formes par la méthode d'homogénéisation, il n'utilise pas un maillage exact, et donc mobile, de la forme mais plutôt un maillage fixe sur lequel on capture une forme représentée par la fonction de lignes de niveau  $\psi$ . C'est donc un algorithme très peu coûteux en temps de calcul qui permet à nouveau d'optimiser la topologie des formes.

Nous reprenons dans les films ci-dessous les deux exemples de minimisation de la compliance pour une console, courte ou longue, calculés par cette nouvelle méthode.



**Optimisation par la méthode des lignes de niveaux d'une console courte**



**Optimisation par la méthode des lignes de niveaux d'une console longue**

Comme précédemment le code couleur est noir pour du matériau plein à l'intérieur de la forme, blanc pour du vide à l'extérieur de la forme, et gris pour les cellules du maillage coupées par le bord de la forme. Ici cette zone de gris est strictement limitée au bord de la forme, ne peut pas s'étaler et n'a rien à voir avec du matériau composite... On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode d'homogénéisation. Comme pour celle-ci un des grands atouts de la méthode des lignes de niveaux est qu'elle fonctionne aussi bien en dimension trois d'espace qu'en dimension deux. Ainsi le film qui suit montre la forme optimale d'une chaise reposant sur ces quatre pieds et avec appui sur l'assise et le dossier.



#### **Optimisation par la méthode des lignes de niveaux d'une chaise**

Le film ci-dessous donne la forme optimale d'un dôme « sous-marin » fixé en cinq points sur sa base et dont la surface, ou le bord, est soumis à une force de pression uniforme.



#### **Optimisation par la méthode des lignes de niveaux d'un dome sous-marin**

Le film suivant représente la forme optimale d'une « micro-pince » qui, étant fixée aux quatre coins de sa base, pince en fermant ses « mâchoires » sur la face supérieure lorsqu'on tire latéralement sur des actionneurs en bas des faces avant et arrière (le film est plus parlant que le commentaire !).





**Forme optimale d'une micro-pince obtenue par la méthode des lignes de niveaux**

L'influence de l'initialisation est ici un peu plus importante que pour la méthode d'homogénéisation : c'est pourquoi nous initialisons nos calculs avec beaucoup de trous, ou bien nous utilisons un ingrédient supplémentaire, appelé gradient topologique, pour permettre la nucléation de nouveaux trous. Néanmoins, dans ces cas l'expérience numérique montre à nouveau qu'en général la méthode converge vers des optima globaux dont la topologie est inconnue *a priori* lors de l'initialisation. Pour s'en convaincre, nous proposons ci-dessous le film d'une expérience numérique « politiquement correcte » qui consiste à optimiser la solidité du président Obama, considéré comme une console verticale (transmettant une force horizontale appliquée au milieu du bord supérieur à un mur de soutien sur le bord inférieur). Les Etats-Unis ont besoin d'un président fort !



### Un président "optimal" pour les Etats-Unis ? Yes, we can !

Au delà de son aspect ludique, ce dernier exemple montre la versatilité et la robustesse de la méthode des lignes de niveau en optimisation de formes qui devrait être promise à un bel avenir comme son aînée, la méthode d'homogénéisation. Concluons ce long article en renvoyant le lecteur curieux d'en connaître plus à la [page web](#) de notre équipe de recherche [3] où l'on peut trouver d'autres films, des publications, des logiciels et des liens vers d'autres sites internet consacrés à l'optimisation de formes.

### Notes

[▲1] G. Allaire, *Conception optimale de structures*, Collection Mathématiques et Applications, Vol. 58, Springer Verlag (2007)

[▲2] S. Osher, R. Fedkiw, *Level set methods and dynamic implicit surfaces* . Applied mathematical sciences, Vol. 153, Springer Verlag (2003)

[▲3] G. Allaire, F. Jouve, O. Pantz et al., *Groupe d'optimisation de formes du CMAP*, Ecole Polytechnique.

---

Pour citer cet article : **Grégoire Allaire** et **François Jouve**, « Design et formes optimales (III) » —

