



HAL
open science

Savez-vous pourquoi le petit Nicolas a toujours un épi ?

Christine Huyghe

► **To cite this version:**

Christine Huyghe. Savez-vous pourquoi le petit Nicolas a toujours un épi ?. Images des Mathématiques, 2011, <http://images.math.cnrs.fr/Savez-vous-pourquoi-le-petit.html>. hal-00597164

HAL Id: hal-00597164

<https://hal.science/hal-00597164>

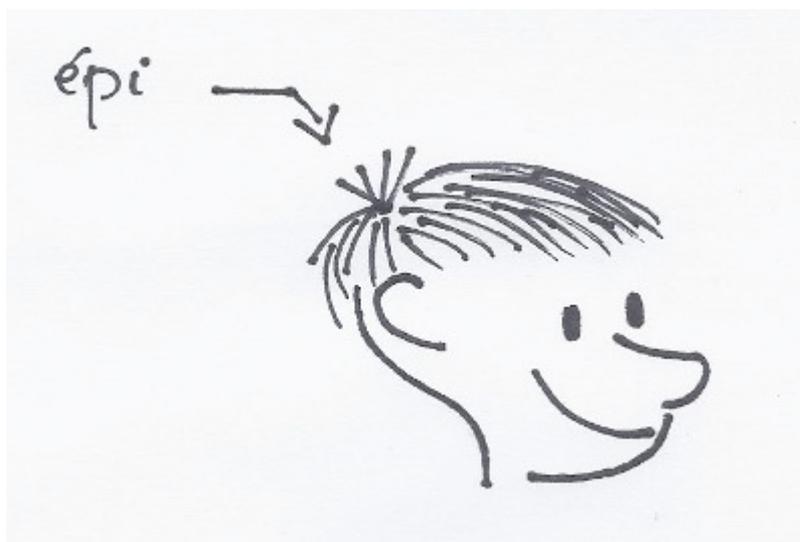
Submitted on 31 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Savez-vous pourquoi le petit Nicolas a toujours un épi ?

Le 21 mai 2011, par **Christine Huyghe**
Chargée de recherche au CNRS Université de
Strasbourg ([page web](#))



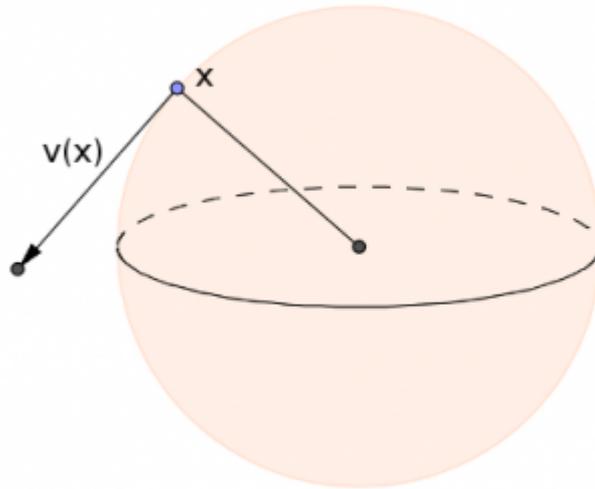
C'EST un fait, le petit Nicolas [1] ou son cousin germain [2], n'a toujours pas réussi à se coiffer sans faire d'épi. Et vous non plus d'ailleurs.

Pourquoi ?

La faute à un théorème, le théorème de la sphère chevelue, déjà connu de Poincaré et de Brouwer, et dont le tout récent **prix Abel 2011**, John Milnor, a donné [3] une démonstration très élégante [4].

Le théorème de la sphère chevelue

Le théorème parle de champs de vecteurs sur la sphère. Un champ de vecteurs sur la sphère est la donnée, en tout point de la sphère, d'un vecteur tangent, comme les cheveux sur un crâne, ou encore le vent qui souffle à la surface de la Terre ... Le théorème est vrai pour n'importe quelle sphère dans l'espace, mais ici on va fixer le rayon égal à 1. A un point x de cette sphère, on associe un vecteur $v(x)$ tangent à la sphère en x , comme sur la figure ci-dessous.



On ne regarde pas n'importe quel champ de vecteurs sur la sphère mais ceux qui sont continus, c'est-à-dire varient de façon raisonnable. Avec cette condition, si une suite de points (x_n) sur la sphère converge vers un point x , alors $v(x_n)$ converge aussi vers $v(x)$. De plus, les champs de vecteurs considérés sont différentiables [5]. L'énoncé est alors le suivant

Théorème (de la sphère chevelue) : Tout champ de vecteurs différentiable sur la sphère s'annule quelque part.

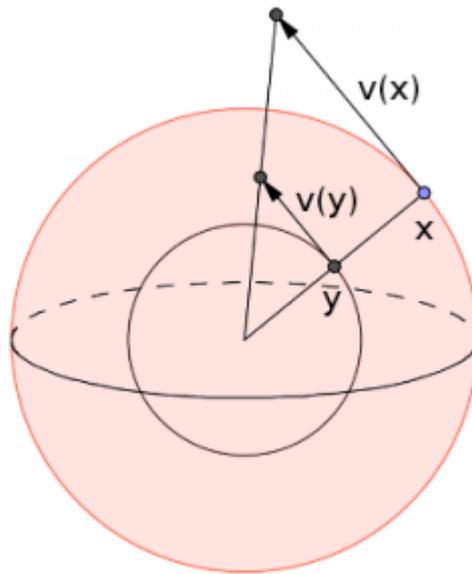
Il y a donc, à la surface de la Terre toujours un endroit sans vent et il y a toujours un épi quand on se coiffe.

Première étape de la démonstration

Nous procédons par l'absurde : supposons qu'il existe un champ de vecteurs v sur la sphère qui ne s'annule pas. On commence par remplacer ce champ de vecteurs par un champ de vecteurs tel que pour tout x , la longueur de $v(x)$ vaut 1 (on l'appelle alors unitaire). En effet, il suffit de remplacer $v(x)$ par $v(x)$ divisé par sa longueur. Le champ de vecteurs ainsi obtenu est unitaire et garde les mêmes propriétés que le champ de vecteurs de départ, il est continu et différentiable. Nous voilà donc ramenés au cas d'un champ de vecteurs v tel que pour tout x , la longueur de $v(x)$ est égale à 1.

L'idée de Milnor est d'utiliser ce champ de vecteurs pour déformer la couronne sphérique (C) délimitée par les sphères de rayon $1/2$ et 1. En quelque sorte, on va déformer la couronne le long de ce champ de vecteurs.

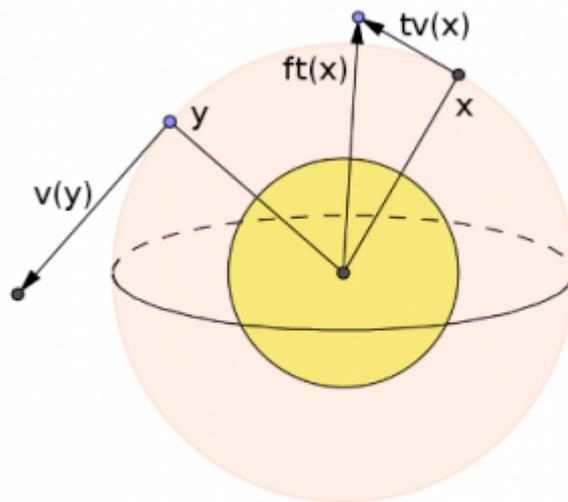
Pour cela, on prolonge le champ de vecteurs v à l'intérieur de la sphère, ce qu'on appelle la boule, privée de l'origine. Si y est un point à l'intérieur de la boule unité, on trace la droite Oy , elle coupe la sphère unité en un point x . L'homothétie de centre O qui envoie x sur y , transforme le vecteur $v(x)$ en un vecteur $v(y)$, qui est tangent à la sphère de centre O passant par y . De cette façon, à chaque point y à l'intérieur de la boule unité différent de l'origine, on a associé un vecteur $v(y)$ tangent à la sphère. C'est la figure ci-dessous.



On considère maintenant une déformation de la couronne sphérique (C), en rose dans la figure ci-dessous, pour t petit. Si x est un vecteur de longueur 1, définissant donc un point de la sphère, on lui associe le point

$$f_t(x) = x + tv(x).$$

Pour t petit, $f_t(x)$ est un point proche de x . Pour $t = 0$, notre transformation f_0 vaut l'identité.



Un premier calcul de volume de la couronne déformée

En fait, pour t petit, notre déformation f_t possède de bonnes propriétés de régularité et elle est bijective [6], i.e. tout élément de $f_t(C)$ a un unique antécédent par f_t . Ces propriétés ne sont pas

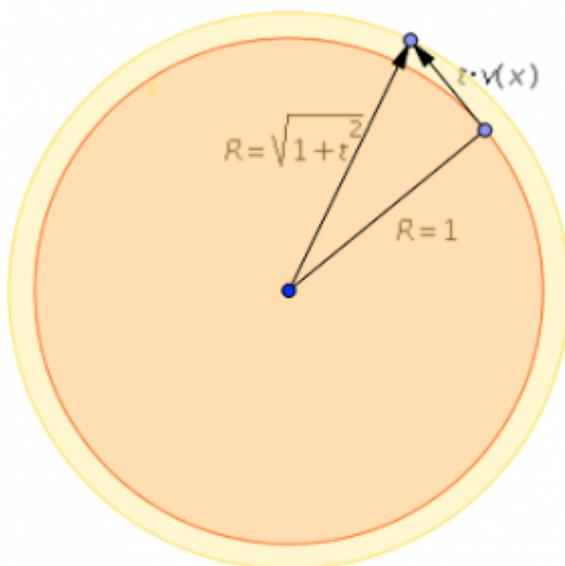
très faciles à montrer et sont liées d'une part à celles de la sphère [7] et d'autre part au fait que f_t est proche de l'identité pour t petit. Un théorème de changement de variables pour les intégrales [8] permet alors de calculer le volume $Vol(t)$ de la déformation par f_t de couronne sphérique (C) pour t petit. Comme la formule définissant f_t est un polynôme en t (de degré 1) le calcul [9] montre

pour t petit, le volume $Vol(t)$ de la déformation par f_t de la couronne sphérique de (C) est un polynôme en t de degré ≤ 3 .

$$Vol(t) = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

Un deuxième calcul du volume de la couronne déformée et fin de la démonstration

En réalité, on peut être encore plus précis sur ce qu'est cette déformation de la couronne (C) en appliquant le théorème de Pythagore. Si x est de longueur 1, comme $tv(x)$ est de longueur $|t|$ (la valeur absolue de t) et que x et $tv(x)$ sont orthogonaux (voir la figure), la longueur de $f_t(x)$ est $\sqrt{1+t^2}$. Par déformation par f_t la sphère unité est envoyée dans la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$.



Plus généralement, si x est sur la sphère de rayon r , $f_t(x)$ est sur la sphère de rayon $r\sqrt{1+t^2}$. Milnor montre alors que la déformation par f_t de la sphère de rayon r est toute la sphère de rayon $r\sqrt{1+t^2}$. Cela nécessite un argument de topologie [10] et un argument de calcul différentiel [11] pour employer des termes techniques. Autrement dit, la déformation par f_t de (C) est la couronne sphérique délimitée par les sphères de rayon $\sqrt{1+t^2}/2$ et $\sqrt{1+t^2}$.

On calcule le volume de cette couronne sphérique en prenant la différence du volume d'une boule de rayon $\sqrt{1+t^2}$ et du volume d'une boule de rayon $\sqrt{1+t^2}/2$. Ainsi

$$\text{Vol}(t) = \frac{4}{3} \pi(1+t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \pi(1+t^2)^{\frac{3}{2}},$$

soit

$$\text{Vol}(t) = \frac{7}{6} \pi(1+t^2)\sqrt{1+t^2}$$

... ce qui n'est pas un polynôme en la variable t , pour t petit ! Supposons que tel soit le cas, alors il existe un polynôme $P(t)$ tel que $P(t) = (1+t^2)\sqrt{1+t^2}$ tel que $P(t)^2 = (1+t^2)^3$, pour t petit. Mais comme il y a une infinité de t petits, et que l'on compare deux polynômes, cette égalité est en fait vérifiée pour tout t , de sorte que P est de degré 3. Toujours à cause de cette relation, le terme constant de P et le terme de degré 3 de P valent 1. Ainsi $P(t) = 1 + ut + vt^2 + t^3$ où u, v sont des constantes à déterminer. En développant, on voit que le terme de degré 1 de $P(t)^2$ est $2u$, et que le terme de degré 5 de $P(t)^2$ est $2v$. Par identification, ces termes u et v doivent donc être nuls. Finalement, si $(1+t^2)\sqrt{1+t^2}$ était un polynôme $P(t)$, on aurait $P(t) = 1 + t^3$. Or

$$(1+t^3)^2 = 1 + 2t^3 + t^6 \neq 1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6.$$

[12]

Nous avons ainsi trouvé une contradiction et démontré le théorème.

Conclusion

Ce théorème permet de montrer que tout champ de vecteurs continu sur la sphère s'annule.

Ce théorème permet de montrer d'autres théorèmes importants de topologie, comme ce théorème de Brouwer

Toute application continue de la boule dans elle-même possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un point x de la sphère tel que $f(x) = x$, (autrement dit x est fixé par f).

L'idée est, étant donnée une telle application continue de la boule dans elle-même, de procéder par l'absurde. Si $f(x) \neq x$ pour tout point de la boule, on exhibe alors un champ de vecteurs tangents à la sphère qui ne s'annule pas.

La recherche est encore très active en mathématiques pour comprendre pourquoi le personnage de Tintin a une houpe.

Je tiens à remercier ici M. Bernard Raymond qui nous a expliqué ce théorème de la sphère chevelue

en maths spé au lycée Faidherbe de Lille [13]. Un très grand moment, de quoi, en tout cas, susciter des vocations.

P.S. :

L'auteur remercie M. François Raymond des informations sur son frère, citées dans cet article.

La rédaction d'Images des maths, ainsi que l'auteur, remercient pour leur relecture attentive, les relecteurs suivants : Guillaume Pontier, Emeric Bouin, Paul Laurain et Jacqueline Struffi.

Notes

[▲1] Personnage créé par René Goscinny et Jean-Jacques Sempé.

[▲2] dessiné ici par l'auteur de cet article en imitant pâlement les dessins de Jean-Jacques Sempé.

[▲3] cf, de John Milnor. **Analytic proofs of the « Hairy Ball theorem » and the Brouwer fixed point theorem. The American Mathematical Monthly. 1978. 85**

[▲4] Pour un panorama (en anglais) des travaux de Milnor, on pourra consulter **ce compte-rendu** de Timothy Gowers.

[▲5] dérivables au sens des fonctions de plusieurs variables, ce qui est un peu technique à expliquer et que nous ne ferons pas ici.

[▲6] De façon précise c'est un difféomorphisme de la couronne sphérique (C) sur son image, pour t petit.

[▲7] qui est compacte.

[▲8] détaillé **ici**.

[▲9] qui fait intervenir le déterminant jacobien de f_t , qui est un polynôme de degré 3, pour les lecteurs connaissant le calcul différentiel.

[▲10] La sphère est compacte et connexe.

[▲11] La déformation f_t est une application ouverte.

[▲12] On peut aussi constater que les racines complexes de $(1 + t^2)^3$ sont i et $-i$ et sont d'ordre impair égal à 3.

[▲13] M. Bernard Raymond, décédé en 1997, y fut professeur de 1978 à 1991.

Pour citer cet article : **Christine Huyghe**, « **Savez-vous pourquoi le petit Nicolas a toujours un épi ?** » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2011. En ligne, URL : <http://images.math.cnrs.fr/Savez-vous-pourquoi-le-petit.html>