



**HAL**  
open science

## Benchmark d'un modele pour sandwichs et multicouches, de type layer-wise en contrainte

D.T. Nguyen, Jean-François Caron, M. d'Ottavio

► **To cite this version:**

D.T. Nguyen, Jean-François Caron, M. d'Ottavio. Benchmark d'un modele pour sandwichs et multicouches, de type layer-wise en contrainte. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.165. hal-00597054v2

**HAL Id: hal-00597054**

**<https://hal.science/hal-00597054v2>**

Submitted on 31 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Benchmark d'un modèle pour sandwichs et multicouches, de type layer-wise en contrainte

## *Benchmark of a laminated and sandwich plates model using a layer-wise stress approach*

D.T. Nguyen<sup>1</sup>, J.F. Caron<sup>1</sup>, M.D'Ottavio<sup>2</sup>

1 : Université Paris Est, Institut Navier  
Ecole des Ponts 6-8 av Blaise Pascal, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2  
e-mail : caron@enpc.fr, nguyendu@lami.enpc.fr  
2 : LEME, UFR SITEC 50, rue de Sèvres 92410 Ville d'Avray

### Résumé

Dans cet article, le comportement des composites stratifiés est étudié en utilisant des développements d'ordres élevés ou de type layer-wise. Un modèle Layer-wise (et l'élément fini à huit noeuds qui lui est associé) a été développé en premier lieu pour l'analyse spécifique des contraintes entre les couches pour des problèmes de bords libres [8][9] ou bien pour l'étude des liaisons entre les couches. Ce modèle est au coeur des comparaisons de cet article. Il est fondé sur un modèle de type layer-wise qui considère le stratifié comme une superposition de plaques de Reissner couplées les unes aux autres par des efforts d'interfaces. Cet élément a  $5n$  degrés de liberté par noeud ( $n$  étant le nombre de couches) et donne une prédiction des contraintes d'interface. Les articles précédents se concentraient sur la précision de l'estimation de ces contraintes d'interface. Le modèle permet aussi de calculer les déplacements et les déflexions ainsi que d'extraire les contraintes dans l'épaisseur avec ou sans post-traitement. Dans cet article, la précision et la validité du calcul des déplacements et des contraintes ont été établies à partir d'un nombre important de tests classiques de benchmark en flexion pour les composites et les plaques en sandwich. Le but de cette étude est aussi de mieux positionner et de promouvoir cette approche en contraintes issue des travaux de Pagano peu utilisés et mal référencés.

### Abstract

In this paper, the behaviour of laminated composite is investigated using several high order or layer-wise finite element calculations. A Layer-wise model and its devoted finite element an  $C^0$  eight-node layer-wise finite element have been originally specifically developed for interlaminar stresses analysis in free edge problem [8][9] or for bonding study. This model is the core of the present comparisons. It is based on a typical layer-wise model that considers the laminate by a superposition of Reissner plates coupled by interfacial stresses. This element consists of  $5n$  degrees of freedom per node ( $n$  is the layer number) and is able to predict interlaminar stresses. These out-of-plane stresses are deduced directly from constitutive equations without post-processing works. The previous papers dealt with the accuracy of these estimated interface stresses. However the model permits of course to compute displacements and usual deflections but also to compute stresses through the layer thicknesses with or without postprocess. In the present paper, the accuracy and the validity of these computed displacements and stresses have been also established on a large number of classical benchmark bending examples for composites and sandwich plates. The aim is also to a better positioning and promoting of this stress approach deriving from the works of Pagano not usually studied in this way.

**Mots Clés :** composites, élément finis, multicouche, matériaux, layer-wise

**Keywords :** composites, multi-layer, material, layer-wise

## 1. Introduction

L'optimisation fine des structures composites nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués et prenant en compte les spécificités de ces matériaux-structure. Les points clés à maîtriser sont essentiellement les phénomènes d'interface, tels que les gradients de contraintes dans l'épaisseur et les délaminages, glissements ou autres endommagements. De nombreux travaux s'intéressent à ces aspects singuliers, introduction de la mécanique de l'endommagement dans les interfaces (ou dans les couches) [12], calculs des champs de contraintes singuliers, des comportements non linéaires des interfaces ([6]). Ici on va plutôt s'intéresser aux seules

distributions suivant l'épaisseur, ce que de nombreux modèles proposent en raffinant plus ou moins les champs approximés. Une revue assez complète est dans ([7], [4], [5]...). On propose l'utilisation d'un élément fini à une cinématique par couche basé sur les travaux du laboratoire Navier [6] [8] et qui s'inspire du modèle de Pagano[11]. Ce modèle nommé ici *LSI* approche chaque couche par une plaque de Reissner et intègre des efforts d'interface généralisés comme nouvelles inconnues du problème. Il rejoint ainsi la famille des modèle layerwise ([9],[10]...) tout en s'en différenciant principalement du fait que ses approximations portent sur les contraintes. La première version du code d'élément fini appelé MPFEAP (MultiParticle Finite Element Analysis Program) a été implémentée ce qui permet de réaliser ce benchmark.

Un premier exercice est de situer cette approche dans la vision unifiée proposée par Carrera[7] et qui fait référence sur ces approches de plaques multicouches élastiques. Il y recense et organise en fonction de la méthode utilisée et du degré de raffinement choisi, les différentes approches existantes ou qu'il propose ; on y trouve ainsi les approches classiques basées sur un principe de minimum d'énergie potentielle (Principle of Virtual Displacements) et des modèles issus d'une formulation mixte basée par exemple sur un RMVT (Reissner Mixed Variational Theorem), des modèles Layer-wise, ESL (equivalent single layer) ou Zig-Zag, et différents ordre d'expansion des champs approximés en  $z$ , description allant de linéaire au 4ème ordre. La nomenclature et ainsi les sigles utilisés pour désigner les différentes théories sont expliqués en détail sur la figure Fig.1 Il n'est pas recensé de

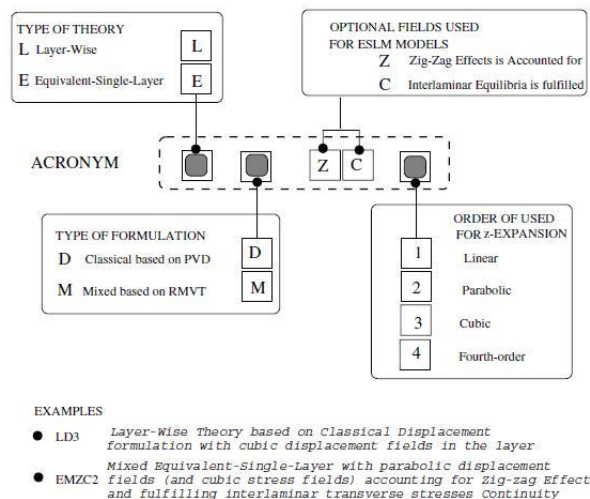


Fig. 1. Acronymes, [7]

modèles en contrainte. Ceci constitue la première originalité de la proposition présente. On se propose donc de rajouter dans la nomenclature cette distinction et donc un  $S$  pour Stress. Ainsi le modèle proposé est un modèle layerwise, en contrainte, non mixte, bien qu'utilisant la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner mais sans hypothèses sur les champs de déplacements, avec une contrainte membranaire linéaire. La dénomination  $LS1$  donc sera utilisée dans la suite. Ce modèle relativement simple est comparé avec diverses théories références (LM4, LM2, EMZC3, ED4...) présentées dans le papier de Carrera [7] et reimplantées ici dans un outil de calcul développé au LEME.

## 2. Le modèle *LSI*

La construction du modèle est détaillée dans les publications de Nguyen.V.T [8][9]. Ici, on rappelle simplement que ce modèle est obtenu à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner. Pagano [11] a proposé d'exprimer les composantes des champs de contrainte comme des polynômes en  $z$ , dont les coefficients s'expriment en fonction des efforts généralisés, par exemple tensions  $N_{\alpha\beta}^i$ ,

moments  $M_{\alpha\beta}^i$ , efforts tranchants  $Q_\alpha^i$ , dans chaque couche. Il propose des contraintes membranaires approchées de degré 1 en  $z$ .

$$\sigma_{\alpha\beta}^{app} = N_{\alpha\beta}^i \frac{P_0^i}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i P_1^i \quad (\text{Eq. 1})$$

où :  $P_0^i = 1$ ,  $P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$

Naturellement, les contraintes transverses (cisaillements transverses et contraintes normales) dans chacune des couches peuvent être harmonisées, et des expressions polynomiales proposées cohérentes avec le choix membranaire précédent. Ainsi respectant l'équilibre  $\sigma_{ij,i}$ , on propose des expressions paraboliques pour les cisaillements et du troisième ordre pour la contrainte normale.

Les constantes d'intégration qui apparaissent dans la détermination de ces contraintes hors-plans peuvent être déduites des conditions de continuité au niveau des interfaces. Pagano propose plutôt de conserver la vision 2D de la plaque et de focaliser sur les interfaces. Il définit ainsi trois outils de mesures mécaniques (efforts internes dans l'équation d'équilibre généralisé) situés précisément au niveau des positions des interfaces, nouvelles inconnues du problème évitant l'écriture de la continuité (vérifiée ici par défaut) pour le calcul des constantes d'intégration. Ces outils d'interface sont 2 contraintes de cisaillement généralisées  $\tau^{j,j+1}$  et une contrainte normale généralisée  $v^{j,j+1}$  comme suit :

$$\tau_\alpha^{j,j+1}(y) = \sigma_{\alpha 3}(y, h_j^+) \quad \text{et} \quad v^{j,j+1}(y) = \sigma_{33}(y, h_j^+). \quad (\text{Eq. 2})$$

Ces efforts internes, inconnues du problème de plaque 2D peuvent ainsi être calculés directement, sans post-traitement. Si on veut calculer les contraintes 3D dans les couches, le post-traitement peut être réalisé. On détaille alors l'expression finale de ces contraintes 3D qui permettra si on le souhaite de décrire les contraintes dans l'épaisseur et non uniquement au niveau des interfaces (à noter, on le verra dans la suite que l'on peut également discrétiser artificiellement l'épaisseur pour capter des contraintes dans les couches, ce qui évite le post-processing) :

$$\sigma_{\alpha 3}^a = Q_\alpha^i \frac{P_0^i}{e^i} + \left( \tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i} \right) P_1^i + \left( Q_\alpha^i - \frac{e^i}{2} \left( \tau_\alpha^{i,i+1} + \tau_\alpha^{i-1,i} \right) \right) \frac{P_2^i}{e^i} \quad (\text{Eq. 3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^a &= \left( \frac{v^{i,i+1} + v^{i-1,i}}{2} + \frac{e^i}{12} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) P_0^i \\ &+ \left( \frac{e^i}{10} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) - \frac{\text{div}\tilde{Q}^i}{5} + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} \right) P_1^i \\ &+ \frac{e^i}{12} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) P_2^i + \left( \frac{e^i}{2} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) - \text{div}\tilde{Q}^i \right) P_3^i. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4})$$

Où  $(P_k^i)_{0 \leq k \leq 3}$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned} P_0^i &= 1, P_1^i = \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} P_2^i = 6 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ \text{et} \quad P_3^i &= -2 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 \end{aligned}$$

En exprimant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger Reissner on trouve par dualité les déplacements et déformations généralisées associées à ces efforts de plaque, ainsi qu'équilibre et comportement généralisé de plaque (voir par exemple [8]). Il est à souligner qu'à aucun moment il n'a été

besoin de proposer une approximation des champs de déplacements 3D, en complément de l'approximation en contrainte, c'est à dire de suivre la démarche mixte classique, qui peut tendre à rigidifier le système. On cite ainsi Pagano ([11] p.389) "Note that we refrain from assuming the form of the displacement field in accordance with the objectionable features of that approach". Cette approche utilise donc une formulation mixte sans la méthode de construction mais reste une approche exclusivement en contrainte. C'est pourquoi il a été choisi de rajouter un S à la nomenclature de Carrera.

### 3. Résultats numériques et discussions

En se basant sur le modèle LS1, un élément fini est bâti. Il prend des éléments paramétriques bidimensionnels à 8 noeuds avec 4 points de Gauss. La performance de la formulation et son élément fini est démontrée dans cette section. Le calcul a été effectué pour une grande variété de stratifiés épais ou minces. Les résultats sont comparés avec la solution exacte de Pagano (problème 1, [1]) et les différents modèles proposés par Carrera [7]. Dans cet article, deux problèmes de plaques sont considérés :  
 - *Problème 1* : Plaque carrée soumise à une charge bi-sinusoidale  
 - *Problème 2* : Sandwich soumis à une pression uniforme localisée

#### 3.1. Problème 1 : Plaque carrée sous charge bi-sinusoidale

Les dimensions d'une plaque carrée (simplement appuyée) sont  $a = b$ ,  $h$  l'épaisseur, ( $S = a/h$  est la ratio). la plaque est soumise à une pression de bisinus sur la face supérieure. L'amplitude de la pression est  $q_0$ . la plaque se compose de  $N_l$  couches, l'épaisseur de chaque couche est  $h_c = h/N_l$ . Les matériaux sont définis par :

$$E_T = 1, E_L = 25 E_T, G_{LT} = 0.5 E_T, G_{TT} = 0.2 E_2, \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$$

Les deux cas considérés sont :

$$N_l = 3 : [0/90/0]; \quad N_l = 4 : [0/90]_s$$

Et sous la charge bisinusoidale  $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ .

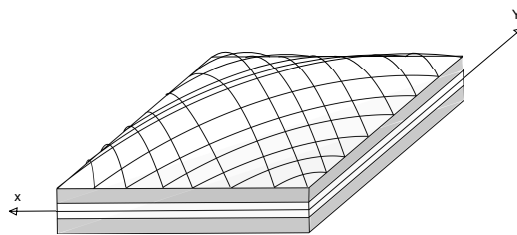


Fig. 2. Exemple 1 : Plaque carrée sous charge bi-sinus

#### Résultats numériques et discussions :

Pour étudier la convergence de l'élément finis proposé, différents maillages ont été utilisés pour la modélisation d'une plaque avec  $a/h = 10$ , chaque maillage contenant le même nombre d'éléments suivant la direction  $x$  et  $y$ . Le tableau tab. 1 donne des résultats pour l'élément présenté et qui est comparé avec la solution analytique 3D de Pagano[1]. Ce tableau montre une convergence rapide même avec un maillage grossier. Une étude concernant les aspects de verrouillage a aussi montré le très bon comportement de l'élément jusqu'à de très grands élancements.

Le tableau tab. 2 donne les erreurs (%) pour une plaque avec différents rapport S entre déplacements et contraintes calculées par différents modèles plus ou moins sophistiqués, approches simples ou mixtes (Cf Fig.1) LM4, LM2, LD4, Zig-Zag ..., le LS1 proposé et la solution analytique [1] qui constitue notre référence. LM4 est donc une solution mixte contrainte déplacement, par couche et

Mesh	dof	$\bar{W}(\%) \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$	$\bar{\sigma}_{13}(\%) \left( 0, \frac{a}{2}, \pm \frac{h}{6} \right)$	$\bar{\sigma}_{33}(\%) \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \pm \frac{h}{6} \right)$
$1 \times 1$	120	-2,29	-13,13 -13,40	-10,71 -10,30
$2 \times 2$	315	0,21	-2,57 -2,87	-2,84 -2,67
$3 \times 3$	600	0,33	-0,93 -1,24	-1,22 -1,14
$4 \times 4$	975	0,35	-0,31 -0,62	-0,67 -0,38
$5 \times 5$	1440	0,37	0 0	-0,40 -0,38
$6 \times 6$	1995	0,37	0,19 -0,14	-0,27 0

Tab. 1. Test de convergence : Erreur(%) entre LS1 et la solution analytique [1]  $N_l = 3$  ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) sous la charge bisinus,  $a/h = 10$

avec des approximations du 4ème ordre. C'est donc un outil très raffiné et qui est très proche de la solution analytique comme on le voit sur le tableau 2. Sur ce tableau on a mis en gras les modèles qui ont des erreurs inférieures à 5% sur l'ensemble des grandeurs considérées. Ainsi en plus de LM4, seuls LS1 et LD3 peuvent revendiquer cette précision. On note que LS1 est moins raffiné que LD3, mais approchant directement les contraintes et non les déplacements, il est, à raffinement donné, plus efficace. LM2 plus proche en raffinement de LS1 "décroche" pour le calcul de  $\bar{\sigma}_{23}$ , avec une erreur de 16.46%). Les autres modèles LD1, EDZ4, ED4, ED2 sont bien moins précis. Les résultats dans le cas  $N_l = 3$  sont présentés dans le tableau tab. 3 avec des conclusions identiques.

Sur la figure suivante il a été testé le principe proposé plus haut, à savoir prévoir l'état de contrainte ponctuellement dans une couche (et non à l'interface) sans pour autant utiliser de post-processing et donc les équations Eq. 3 et Eq. 4. Pour cela l'empilement a été artificiellement raffiné, le nombre de couche virtuellement augmenté par segmentation de celles existantes afin qu'une interface artificielle existe à l'endroit où l'on veut mesurer la contrainte. Deux points sont intéressants à regarder :

- la correspondance entre les valeurs ainsi trouvées et celles calculées par les équations Eq. 3 et Eq. 4.
- la dépendance vis à vis du raffinement, qui serait problématique.

C'est ce qui a été fait sur la courbe suivante fig. 3 pour les contraintes transverses et normales dans le cas  $N=4$ . On y voit que le degré de raffinement ne change pas les points obtenus qui se superposent tous sur les courbes représentant les équations Eq. 3 et Eq. 4 : Ainsi l'outil proposé permet bien sans post processing de capter les valeurs internes aux couches, ce qui peut permettre des vérifications directes mais locales et des itérations lors d'un calcul de structure.

### 3.2. Problème 2 : Sandwich soumis à une pression uniforme localisée

Le problème considéré ici a été proposé précédemment par Meyer-Piening [2]. Les dimensions de cette plaque sont  $a = 100\text{mm}$  suivant  $x$ ,  $b = 200\text{mm}$  suivant  $y$  et l'épaisseur est égale  $h = 12\text{mm}$ . Les caractéristiques des matériaux dans les couches sont présentées dans le tableau tab. 4. L'épaisseur de la couche supérieure est  $h_3 = 0.1\text{mm}$ , et celle de la couche inférieure est  $h_1 = 0.5\text{mm}$ .

Par ailleurs, les positions des surfaces sont identifiées le long de la coordonnée  $z \in [-h/2, h/2]$  :  $z_b = -6\text{mm}$ ,  $z_1 = -5.5\text{mm}$ ,  $z_0 = 0\text{mm}$ ,  $z_2 = 5.9\text{mm}$ ,  $z_t = 6\text{mm}$ . La plaque simplement appuyées est soumise à une pression uniforme  $P = 1\text{MPa}$  sur la face supérieure sur une région de  $5 \times 20\text{ mm}$  localisée au centre de la plaque  $x = a/2, y = b/2$ . Le maillage  $12 \times 24$  est utilisé pour LS1. Les résultats CUF et Meyer-Piening 3D sont obtenus avec Navier et la série de Fourier en utilisant  $101 \times 101$  termes

S	Source	$\bar{w}(\%) \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$	$\bar{\sigma}_{13}(\%) \left( 0, \frac{a}{2}, 0 \right)$	$\bar{\sigma}_{23}(\%) \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$	$\bar{\sigma}_{33}(\%) \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0 \right)$
4	<b>LM4</b>	0	0.09	0.03	0
	<b>LS1</b>	1.42	0	-0.44	-0.40
	LM2	-0.82	6.79	16.46	0.48
	<b>LD3</b>	0	-0.04	-1.06	-1.17
	LD1	-3.24	-3.78	-24.28	23.8
	EDZ4	-3.36	-3.87	-15.43	5.71
	ED4	-3.40	-3.23	-15.54	0.060
	ED2	-23.07	-46.3	-46.00	-0.70
10	<b>LM4</b>	0	0	0.05	-0.02
	<b>LS1</b>	0.32	-0.29	-0.61	-0.4
	LM2	-0.36	10.8	16.59	0.08
	<b>LD3</b>	0	0	-0.15	-0.78
	LD1	-1.34	-1.45	-26.59	-34.84
	EDZ4	-2.59	-5.93	-18.42	3.6
	ED4	-2.59	-5.83	-18.42	-0.02
	ED2	-15.27	-53.35	-46.14	-0.2
100	<b>LM4</b>	0	0	0	0
	<b>LS1</b>	0	-0.56	-0.71	0
	LM2	0	11.80	17.56	0
	<b>LD3</b>	0	0	0	-0.54
	LD1	-0.09	-0.88	-26.06	-
	EDZ4	-0.046	-6.90	-16.99	2.42
	ED4	-0.046	-6.90	-16.99	0
	ED2	-0.299	-55.99	-38.73	0

Tab. 2. Problème de Pagano : Erreur (%) entre la solution analytique [1]  $N_l = 4$  ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) et LS1 et les autres modèles

S	Model	$\bar{w}(\%)(z=0)$	$\bar{\sigma}_{13}(\%)(z=\frac{h}{6}^+)$	$\bar{\sigma}_{23}(\%)(z=\frac{h}{6}^+)$	$\sigma_{zz}(\%)(z=\frac{h}{6}^+)$
4	<b>LM4</b>	0	0,35	0,44	0,013
	<b>LS1</b>	1,54	2,10	-3,52	-0,16
	LM2	-0,40	13,42	25	0,68
	EDZ4	-0,45	26,44	-0,78	-14,64
10	<b>LM4</b>	-	0	0	0,094
	<b>LS1</b>	-	-0,53	2,38	0
	LM2	-	4,07	22,91	15,18
	EDZ4	-	-0,051	3,27	-22,93

Tab. 3. Problème de Pagano : Erreur (%) entre la solution analytique [1] pour  $N_l = 3$  ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) et LS1 et les autres modèles

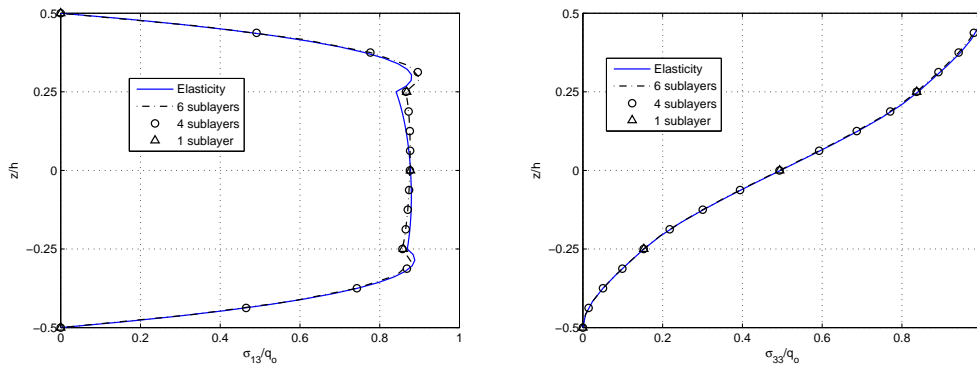


Fig. 3. plaque carrée :  $N_1 = 4$ , la distribution des contraintes de cisaillement  $\sigma_{13} = S\bar{\sigma}_{13}$  (à gauche), et contrainte normale  $\sigma_{33}$  (à droite) ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) avec  $S=a/h = 4$  pour différents raffinements dans l'épaisseur

pour l'expansion en série.

Résultats numériques et discussions :

Face sheet material	$E_1 = 70 \times 10^3$ MPa	$E_2 = 71 \times 10^3$ MPa		
	$E_3 = 69 \times 10^3$ MPa	$G = 26 \times 10^3$ MPa	$\nu = 0.3$	
Core material	$E_1 = E_2 = 3$ MPa	$E_3 = 2.8$ MPa	$G = 1$ MPa	$\nu = 0.25$

Tab. 4. Exemple 2 : plaque chargée localement

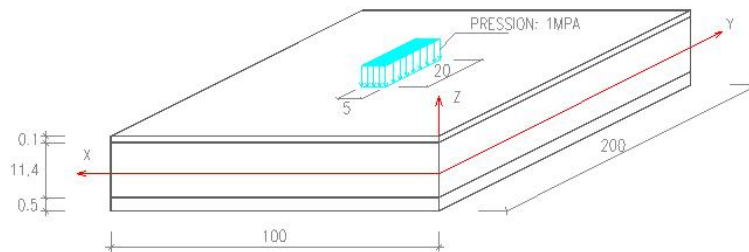


Fig. 4. Exemple 2 : Description géométrique cas 2

Les déplacements  $W$ , les contraintes planes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  sur la face supérieure sont présentés dans le tableau tab.5. On constate que notre modèle (LS1) est le seul en excellent accord avec la solution analytique 3D, celle obtenue par éléments finis 3D Nastran et LM4. Le calcul des contraintes avec notre modèle s'avère plus précis qu'avec un modèle pourtant relativement riche comme le LM2. Les deux modèles EMZC3 et EDZ4 sont en revanche inefficaces pour résoudre ce problème. Ainsi, l'erreur de  $\sigma_{xx}$  par rapport la solution analytique 3D sur la face supérieure est de 1.66% pour le calcul par éléments finis 3D (Nastran), 0,83% avec notre modèle(LS1),  $-7,08\%$  et  $-49,13\%$  pour LM2[7] et EMZC3. Les erreurs sur la face inférieure sont respectivement : 0.0% obtenue par éléments finis 3D de Nastran, 0.8% pour le modèle LS1, les modèles LM2, EMZC3 présentent des erreurs de 1.6% et 57.6%.

On peut aussi regarder l'évolution des contraintes planes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  suivant la direction  $x$  sur les faces supérieure et inférieure. Ceci est représenté en figures Figs.5. On constate que par rapport au LM4, qui constitue notre référence, le modèle LS1 se comporte bien.



Analysis	z	$U_z$ (%)	$\sigma_{yy}$ (%)	$\sigma_{xx}$ (%)	$\sigma_{xy}$ (%)
NASTRAN5 (3D) [2]	Top	1,59	-1,66	0,64	0
	Bottom		-51,66	0,34	0
LM4	Top	-0,05	-0,08	-0,24	0
	Bottom		-0,14	-0,24	0
LS1	Top	-0,26	-0,83	0,16	0
	Bottom		-1,84	-1,38	0
LM2	Top	-0,63	-2,37	-3,61	0
	Bottom		-2,42	-3,50	0
LM2 [7]	Top	-0,46	-7,08	-4,56	0
	Bottom		-6,93	-4,14	0
EDZ4	Top	-17,09	62,28	10,58	0
	Bottom		73,13	11,98	0
EMZC3 [7]	Top	-45,81	-49,13	-65,66	0
	Bottom		-43,89	-82,82	0

Tab. 5. Problème de Meyer-Piening : Erreur (%) entre LS1 et les autres modèles par rapport à la solution analytique [2] ( $x = a/2, y = b/2$ ) (sur la face supérieure)

La précision et la stabilité de l'approche est bien mieux en évidence par l'étude de l'évolution de la

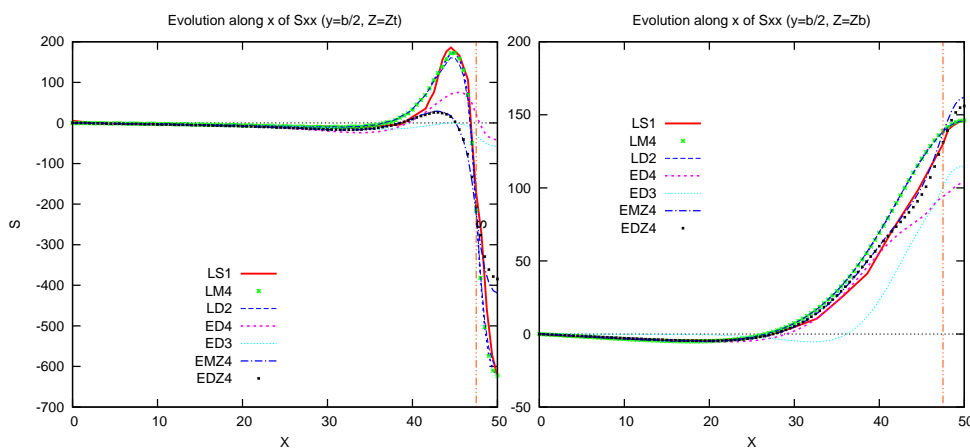


Fig. 5. problème de Meyer-Piening : L'évolution de contraintes planes  $\sigma_{xx}$  suivant la direction x

contrainte de cisaillement  $\sigma_{13}$  suivant la direction x sur l'interface entre les couches (position  $z_1 = -5.5\text{mm}$ ,  $z_2 = 5.9\text{mm}$ ) Figs.6 et sur la distribution de contraintes normales  $\sigma_{33}$  suivant l'épaisseur Figs.7. On trouve une très bonne concordance avec le LM4 référent, là où les autres modèles proposent des solutions très dispersées et très différentes.

#### 4. Conclusions

L'objectif de ce présent article était double, à savoir positionner une approche dérivant des travaux de Pagano peu explorés, et en éprouver sur des exemples de benchmarks reconnus la pertinence et la précision. Ce modèle avait auparavant fait ses preuves sur le traitement de singularités et d'effets de bords. Cette approche en contrainte permet sans hypothèses sur les déplacements 3D de bien approcher les contraintes transverses aux interfaces et à l'intérieur des couches sans opérations de post-processing puisque ces contraintes sont introduites comme inconnues dans les équations du pro-

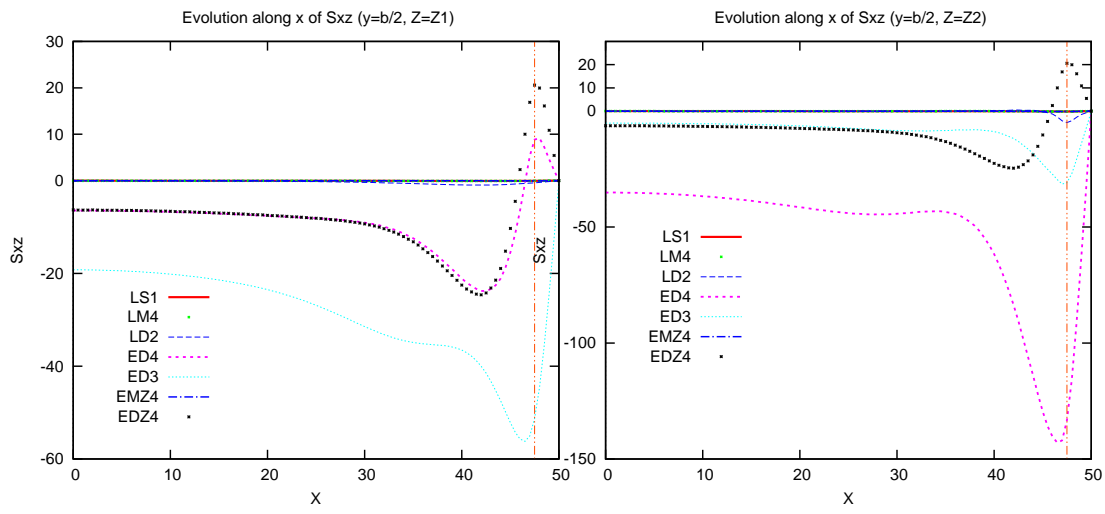


Fig. 6. problème de Meyer-Piening : L'évolution de contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$  suivant la direction  $x$

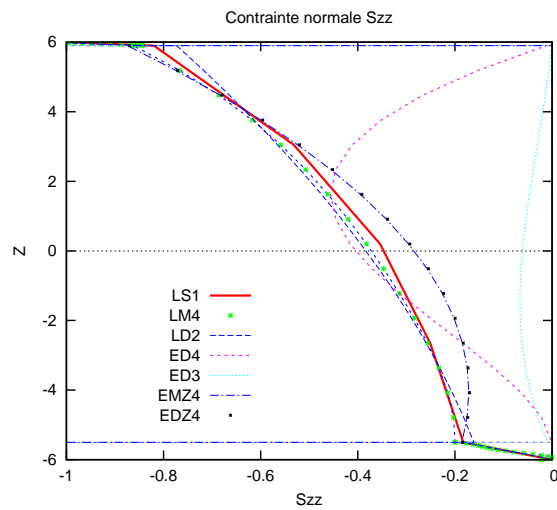


Fig. 7. problème de Meyer-Piening : L'évolution de contraintes normales  $\sigma_{zz}$  suivant l'épaisseur

blème. Cela peut autoriser des calculs plus rapides et de l'optimisation par itération directe.

La qualité du calcul des contraintes transverses a été montrée sur 2 exemples classiques, et comparée à plusieurs autres approches références. Malgré des approximations assez simples (polynômes de degré 1 pour les contraintes membranaires, de degré 2 et 3 pour respectivement, cisaillements transverses et contrainte normale), les résultats sont proches de modélisations mixtes sophistiquées, qui utilisent par exemple (LM4) des déplacements (et donc implicitement des contraintes membranaires) d'ordre 4 plus des approximations sur les contraintes. Les simulations sont meilleures qu'avec les autres modèles testés moins raffinés que le LM4.

Un autre intérêt de la méthode est d'exhiber des déplacements généralisés par couche, associés aux approximations en contraintes, de type Reissner-Mindlin, 3 déplacements et deux rotations de section, et ainsi de bien s'adapter à des formulations EF en déplacement classiques. Une implémentation Abaqus est en cours.

## Références

- [1] N.J. Pagano "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *J. Compos. Mater.*, 4, 20-34, 1970.
- [2] H.-R. Meyer-Piening. "Experiences with exact linear sandwich beam and plate analyses regarding bending, instability and frequency investigations", *In Proceedings of the Fifth International Conference on Sandwich Constructions*, volume 2, pages 705-716, Zurich, Switzerland, September 5-7 2000.
- [3] E.Carrera, L.Demasi "Two benchmarks to assess two dimensional theories of sandwich", *AIAA Journal*, Vol.41,No.7, July 2003.
- [4] O. Polit, M. Touratier, A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses, *Composites Structures*, vol.58, pp.121-128, 2002.
- [5] M. D'Ottavio, D. Ballhause, T. Wallmeiersperger, B. Kröplin, Considerations on higher-order finite elements for multilayered plates based on a Unified Formulation, *Computers and Structures*, vol.84, pp.1222-1235, 2006.
- [6] F. Lebon, R. Rizzoni, S. Ronel, Analysis of non-linear soft thin interfaces, *Computers and Structures*, vol. 82, pp.1929-1938, 2004.
- [7] E. Carrera, A. Ciuffreda "A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems", *Composite Structures*, 69, 271-293, 2004.
- [8] V.T.Nguyen, J.F.Caron "A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites", *Computers and Structures*, Volume 84, Issues 22-23, September 2006, Pages 1538-1546
- [9] V.T.Nguyen, J.F.Caron "Finite element analysis of free-edge stresses in composite laminates under mechanical and thermal loading", *Composites Science and Technology*, doi :10.1016/ paper in press, 2007.
- [10] S.Chataigner, J.F.Caron, V.A.Duong " Experimental and numerical investigation of shear strain along an elasto-plastic bonded lap joint", *Construction and Building Materials*, In Press, Corrected Proof. Available online 20 June 2010
- [11] N.J. Pagano, "Stresses fields in composite laminates", *Int. J. Solids Struct.*, 14, 385-400, 1978.
- [12] P. Ladevèze, G. Lubineau, D. Marsal, "Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites" *Composites Science and Technology*, Volume 66, Issue 6, Pages 698-712, 2006