

Changement d'échelles et zoom structural

L. Daridon^{1,3}, D. Dureisseix^{2,3}, S. Garcia, S. Pagano^{1,3}

¹ LMGC, Université Montpellier 2, France, {loic.daridon,stephane.pagano}@univ-montp2.fr

² LaMCoS, INSA Lyon, France, david.dureisseix@insa-lyon.fr

³ MIST, IRSN / CNRS / Université Montpellier 2

Résumé — Un outil de transfert d'informations entre maillages incompatibles, pour des champs matériels échantillonnés aux points d'intégration des modèles, est utilisé ici dans le cas du zoom structural (un modèle n'est défini que sur une partie de la structure). Cette étude a été réalisée dans le cadre du Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures (MIST), laboratoire commun IRSN / CNRS / Université Montpellier 2.

Mots clés — transfert d'information, maillages incompatibles, ré-analyse locale couplée, stratégie numérique.

1 Introduction

Les systèmes mécaniques présentent souvent des géométries localement complexes, ou des détails structuraux (raccords...), ou des zones d'intérêt particulières issues de la connaissance métier (où on sait qu'il y a risque d'amorce de fissure, ou de concentration de contraintes, par exemple), ou encore des zones particulières où un changement de modèle est intéressant (plasticité, endommagement locaux, évolution de microstructure...) Leur étude directe peut nécessiter la réalisation de modèles complexes, avec des gradients de taille d'éléments finis très importants, ce qui peut être coûteux en temps de développement, et peu modulaire à l'usage, d'autant plus que la vérification de l'intégrité des structures nécessite de tester la criticité des défauts dans un nombre potentiellement important de zones différentes. Une technique adaptée consiste à réaliser plus ou moins indépendamment une discrétisation "grossière" de la structure ainsi qu'une discrétisation "fine" du détail ou de la zone d'intérêt, avec des modèles associés potentiellement différents (FIGURE 1). Plusieurs approches dans la littérature ont déjà été proposées en ce sens [1, 2, 8, 7, 3, 5].

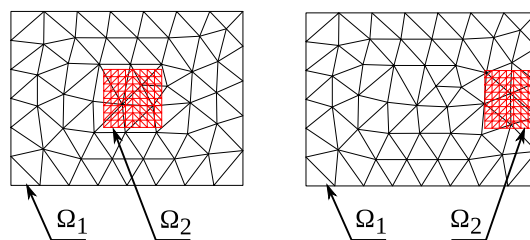


FIGURE 1 – Maillages superposés : discrétisation "grossière" Ω_1 vs discrétisation "fine" Ω_2 (à gauche : domaine recouvrant, à droite : domaines chevauchants)

On met en place ici un outil de transfert d'information entre maillages incompatibles pour des champs matériels échantillonnés aux points d'intégration des modèles. L'intérêt de cette approche est de ne pas faire intervenir de paramètre de pondération entre les champs issus de deux discrétisations différentes (celui-ci est automatiquement défini par les opérateurs de transfert), et de permettre la vérification de *patch-tests* (solutions à déformation constante ou linéaire). Le principal inconvénient est la non localité de la projection, c'est pourquoi une résolution itérative est proposée, qui permet aussi de réduire le caractère intrusif de l'approche, dans le cadre d'un futur couplage de codes [6].

2 Formulations du problème et *patch-tests*

2.1 Transfert de champ entre discrétisations incompatibles

L'outil de transfert de champ qui sous-tend cette étude suppose des informations stockées aux points d'intégration des éléments [4]. Il est illustré sur la figure 2. Les champs ε_1 , ε_2 , E_1 et E_2 sont respectivement les données aux points d'intégration et aux nœuds de chacun des deux maillages Ω_1 et Ω_2 . Le passage de l'un à l'autre de ces champs est obtenu soit à l'aide d'un opérateur \mathcal{L}_j d'extrapolation, soit à l'aide d'un opérateur \mathcal{N}_j d'interpolation. L'opérateur P_{21} prolonge les champs stockés aux nœuds du maillage Ω_1 vers le maillage Ω_2 (ceci est réalisé élément par élément, avec des fonctions test de type *mortar*) et réciproquement pour l'opérateur R_{12} . Les projecteurs complets sont notés \mathcal{P}_{21} et \mathcal{R}_{12} . De façon similaire, il est possible de définir les opérateurs \mathcal{P}_{12} et \mathcal{R}_{21} .

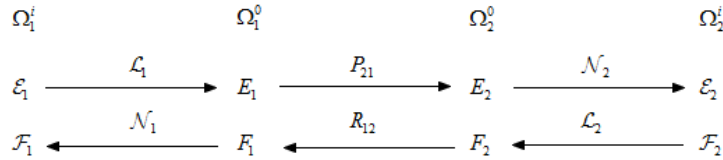


FIGURE 2 – Extrapolation et interpolation d'un champ de données

Les propriétés des couples d'opérateurs de projection ainsi définis sont les suivantes :

- symétrie de la formulation : $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{R}_{21}$ et $\mathcal{P}_{21} = \mathcal{R}_{12}$,
- dualité au sens de l'énergie : $\int_{\Omega_3^{(2)}} \sigma_2 : \mathcal{P}_{21} \varepsilon_1 d\Omega = \int_{\Omega_3^{(1)}} \mathcal{P}_{12} \sigma_2 : \varepsilon_1 d\Omega$

Deux versions différentes peuvent ainsi être utilisées, selon les choix des domaines $\Omega_3^{(1)}$ et $\Omega_3^{(2)}$: soit $\Omega_3^{(1)} = \Omega_1$ et $\Omega_3^{(2)} = \Omega_2$ (qui conduit à des raccords en moyenne sur tout le domaine) et on notera les projecteurs avec un exposant r , soit $\Omega_3^{(1)} = \Omega_3^{(2)} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ (qui conduit à des raccords sur le domaine commun) et on notera alors les projecteurs avec un exposant g .

2.2 Vérification de *patch-tests*

Avant de mettre en place une formulation adaptée du problème sur deux échelles de description, il est utile de préciser les cas tests élémentaires (ou *patch-tests*) qui vont servir à valider l'approche. Ces tests sont de deux natures différentes :

- dans le cas de deux discrétisations différentes, mais de champs solution de bas degré (par exemple : solution de traction pure, ou de flexion pure), et si ces champs sont représentables exactement sur les deux discrétisations, alors la formulation doit permettre de retrouver cette solution exactement ;
- dans le cas de champs quelconques, si la discrétisation fine est identique (dans la zone considérée) à la discrétisation grossière, alors la solution trouvée doit être celle de la discrétisation grossière.

Une situation intermédiaire avant le cas général de discrétisations quelconques est celle de l'utilisation d'une discrétisation fine et d'une discrétisation grossière emboîtées (dans la zone considérée).

Avec les opérateurs de projection précédents, la formulation utilisée est exprimée séparément pour le problème grossier et le problème fin. Sur le maillage grossier, nous avons à écrire l'équilibre du champ de contrainte σ obtenu à partir des champs de contraintes σ_1 et σ_2 définis sur les maillages grossiers et fins par :

$$\sigma = \sigma_1 - \mathcal{P}_{12}^g (\mathcal{P}_{21}^r \sigma_1 - \sigma_2) \quad (1)$$

Ce champ de contrainte sera assujéti à vérifier l'équilibre en moyenne sur le maillage grossier. Il peut être interprété comme le champ de contrainte grossier σ_1 corrigé dans la zone du *patch* : dans cette zone, on lui enlève sa propre valeur (représentée par $\mathcal{P}_{12}^g \mathcal{P}_{21}^r \sigma_1$) qui est remplacée par la contrainte fine $\mathcal{P}_{12}^g \sigma_2$. L'utilisation des projecteurs permettra de vérifier les *patch-tests* précédents. Cette formulation est inspirée de celle de la méthode Arlequin [1], pour laquelle la contrainte d'intérêt est $\sigma = (1 - \alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2$, α est un coefficient de pondération, à choisir. L'équivalent du coefficient de pondération est ici déterminé automatiquement, mais il n'est plus local.

Sur le maillage fin, nous écrivons un simple raccord en déformation :

$$\forall \sigma_2^*, \int_{\Omega_2} \sigma_2^* (\mathcal{P}_{21}^r \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0 \quad (2)$$

On pourra noter l'utilisation distincte des deux types de projecteurs. Ce choix s'avérera le plus judicieux pour traiter des cas particuliers où la zone fine Ω_2 peut déborder hors du domaine de référence Ω , maillé avec Ω_1 .

Les premiers *patch-tests* proposés concernent une structure élastique homogène. La zone de zoom est alors soit totalement incluse dans le domaine, soit débordante, figure 2. Le chargement proposé est ensuite soit un cas de traction pure, soit de flexion pure.

Pour fermer le problème en partie décrit par (1) et (2), il reste à préciser les deux modèles, en l'occurrence des cas élastiques. Si on note $D_1 = D_2 = D$ l'opérateur de Hooke associé, on propose, après discrétisation par éléments finis, d'écrire l'équilibre de la contrainte σ en moyenne sur le maillage grossier, ce qui conduit au système linéaire

$$K_1 u_1 = f_1 + B_{\sigma_1}^T \mathcal{P}_{12}^g (\mathcal{P}_{21}^r \sigma_1 - \sigma_2)$$

Le raccord en déformation conduit quant à lui, en choisissant des fonctions tests de la forme $\sigma_2^* = D_2 \varepsilon(u_2^*)$, au système linéaire

$$K_2 u_2 = B_{\sigma_2}^T \mathcal{P}_{21}^r \sigma_1$$

Les vecteurs colonnes u_i désignent les valeurs nodales des déplacements associés à chaque modèle, et $\sigma_i = D_i \varepsilon(u_i)$, $i = 1, 2$. La résolution simultanée de ces deux systèmes est réalisée de façon itérative par un point fixe. L'initialisation se fait par la résolution du système macro $K_1 u_1^{(0)} = f_1$, et $\sigma_1^{(0)} = D_1 \varepsilon(u_1^{(0)})$. L'itération courante consiste à résoudre les systèmes : $K_2 u_2^{(k)} = B_{\sigma_2}^T \mathcal{P}_{21}^r \sigma_1^{(k-1)}$ et $K_1 u_1^{(k)} = f_1 + B_{\sigma_1}^T \mathcal{P}_{12}^g (\mathcal{P}_{21}^r \sigma_1^{(k-1)} - \sigma_2^{(k)})$ avec $\sigma_2^{(k)} = D_2 \varepsilon(u_2^{(k)})$ et $\sigma_1^{(k)} = D_1 \varepsilon(u_1^{(k)})$. Le critère d'arrêt est basé (entre autres) sur l'indicateur d'erreur $\eta = \|\sigma_2^{(k)} - \sigma_2^{(k-1)}\| / \|\sigma_2^{(k)}\|$.

À convergence, les solutions sont bien celles attendues, figure 3 ; les champs de contrainte tracés correspondent à la composante de von Mises de σ donnée par (1) à laquelle est superposée la composante de von Mises de σ_2 sur la zone d'intérêt. Concernant le taux de convergence, l'erreur η est tracée en fonction des itérations pour le cas de flexion (le cas de traction pure converge en 1 itération et sur le cas de flexion, 0,3 % d'erreur sont obtenus en 3 itérations) sur la figure 3 (à droite).

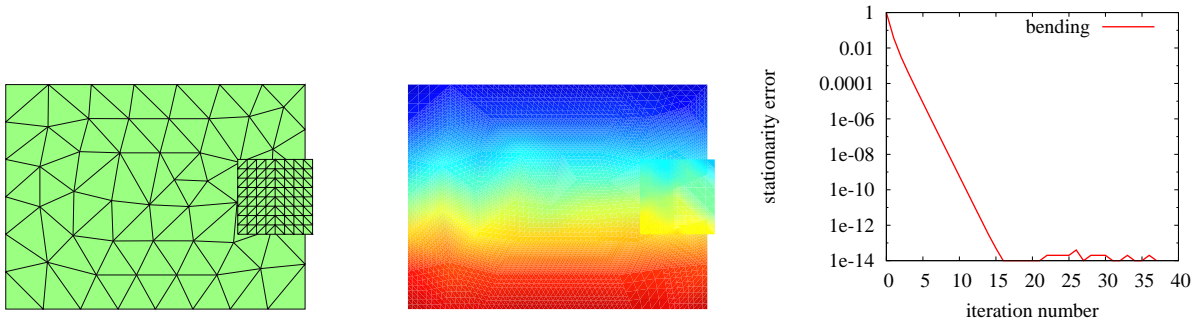


FIGURE 3 – Contraintes à la solution pour les domaines chevauchants ; à gauche (avec les maillages) : traction pure, au centre : flexion pure. À droite : convergence sur le cas de la flexion (évolution de η au cours des itérations)

3 Cas d'une inclusion

On considère ici des cas plus intéressants en pratique correspondant à une hétérogénéité localisée de structure : une inclusion ou une perforation. Contrairement à une microstructure périodique, il s'agit plus ici d'analyser l'effet d'un défaut local. On construit donc le *patch* de façon à bien représenter les

champs perturbés issus de ce défaut localisé. La détermination de cette zone est pour l'instant décidée par l'utilisateur. Le premier test consiste à comparer une solution obtenue à partir de maillages totalement incompatibles à une solution de référence. La solution de référence est obtenue en utilisant des maillages identiques dans la zone de recouvrement pour les deux discrétisations .

3.1 Cas d'une inclusion

Ce test est réalisé de la façon suivante : l'inclusion est considérée comme un détail structural, c'est-à-dire comme une zone où le module d'young E_0 est différent de celui du reste de la structure, E_1 . Le maillage grossier Ω_1 de l'ensemble de la structure n'est donc pas censé résoudre les champs locaux associés, et il n'utilise que la raideur E_1 . Le maillage fin du détail contient quant à lui un bimatériau : inclusion de module d'Young E_0 and une matrice de module d'Young E_1 . La formulation précédente est alors inchangée, le calcul du zoom étant alors un calcul de structure hétérogène. Le résultat est présenté sur les figure 4 et 6, pour $E_0/E_1 = 0,5$.

Des critères de choix de discrétisation devront être proposés et validés pour ce type d'exemple, en particulier vis à vis de la convergence en maillage dépendant de deux tailles de mailles différentes (une sur chaque échelle).

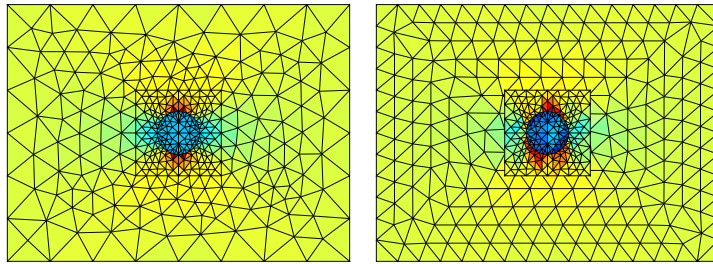


FIGURE 4 – Contraintes (longitudinales) pour le cas de l'inclusion en traction ; à gauche : problème de référence (contrainte maximale 1.44), à droite : solution obtenue avec des maillages incompatibles (inclusion non représentée dans le maillage de Ω_1 , contrainte maximale 1.41)

3.2 Cas d'une perforation

Ce test peut être traité de façon similaire en faisant tendre le module d'Young E_0 vers zéro. Cependant, une raideur résiduelle doit être maintenue pour éviter une singularité de la matrice de rigidité, voire un mauvais conditionnement de celle-ci. Une autre proposition est de changer la formulation afin de traiter le problème sans régularisation, c'est-à-dire pour lequel $E_0 = 0$.

On doit alors adapter le problème à traiter sur Ω_2 : si on continue à mailler l'intérieur de la perforation (un ouvert noté Ω_{2i}), les degrés de liberté correspondants u_{2i} doivent être bloqués pour éviter d'avoir un opérateur singulier. Ensuite, on impose l'équilibre sur la frontière Γ de la perforation ($\sigma_2 n |_{\Gamma} = 0$) en écrivant, avec une formulation en déplacement, $CK_2u_2 = 0$, où C est une matrice booléenne sélectionnant les degrés de liberté de Γ . Le problème consiste alors à minimiser le raccord en déformation sous cette contrainte d'équilibre, soit

$$\min_{CK_2u_2=0} \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} (\mathcal{P}_{21}^r \varepsilon_1 - \varepsilon_2) D_2 (\mathcal{P}_{21}^r \varepsilon_1 - \varepsilon_2) d\Omega$$

Après quelques manipulations (utilisation d'un multiplicateur de Lagrange, et condensation du problème), et en partitionnant les degrés de liberté avec les blocs correspondant d'abord aux degrés de liberté de Ω_{2i} puis ceux de Γ , on a

$$F = B_{\sigma_2}^T D_2 \mathcal{P}_{21}^r \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} F_i \\ F_{\Gamma} \end{bmatrix}$$

et le problème à résoudre sur Ω_2 :

$$K_2 u_2 = F - K_2 C^T (CK_2 C^T)^{-1} C F = \begin{bmatrix} F_i^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

où $F_i^* = F_i - K_{i\Gamma} K_{\Gamma\Gamma}^{-1} F_\Gamma$ et $K_{\Gamma\Gamma} = CK_2 C^T$, $K_{i\Gamma} = K_2 C^T$. Le même algorithme de point fixe peut alors être utilisé et permet d'obtenir les solutions de la figure 5.

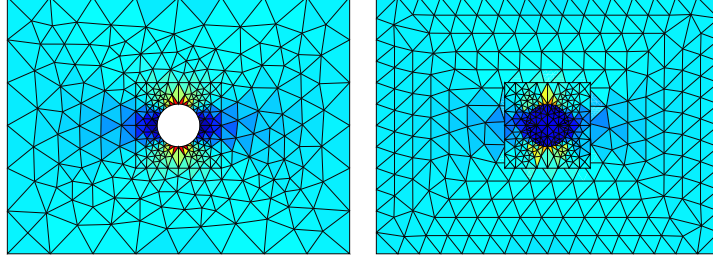


FIGURE 5 – Contraintes (longitudinales) pour le cas de la perforation en traction ; à gauche : problème de référence (contrainte maximale 2.7), à droite : solution obtenue avec des maillages incompatibles (perforation non représentée dans le maillage de Ω_1 , contrainte maximale 2.2)

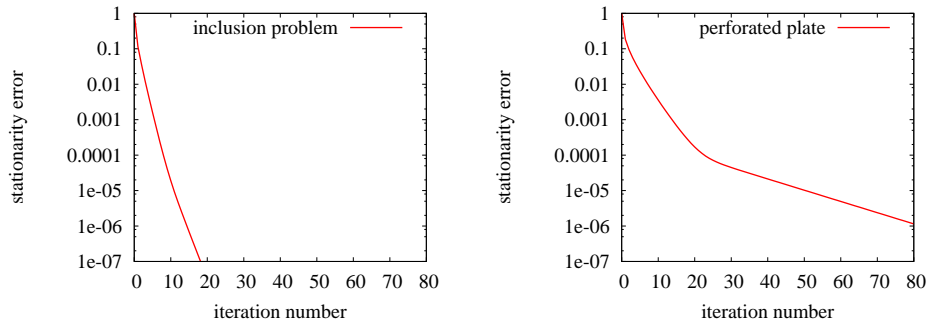


FIGURE 6 – Convergence sur le problème de l'inclusion (à gauche) et de la perforation (à droite) : évolution de η au cours des itérations

4 Interprétation en terme d'homogénéisation numérique

Considérons le *patch* comme une cellule particulière du domaine étudié, figure 7. Le maillage grossier sous-tendant supporte des champs de bas degré, σ_1 et ε_1 , tandis que le maillage fin est censé décrire avec σ_2 et ε_2 , la microstructure, l'hétérogénéité...

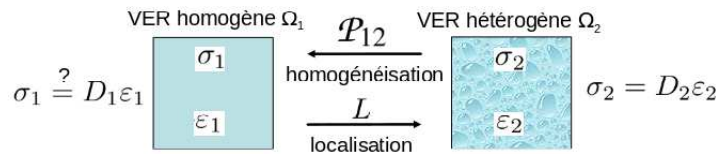


FIGURE 7 – Principe de l'homogénéisation d'un volume élémentaire représentatif (identifié ici à une zone de zoom)

Écrire que $\sigma_2 = \mathcal{P}_{21}^g \sigma_1$ signifie [4] :

$$\forall \varepsilon_1^*, \int_{\Omega_3^{(1)}} \sigma_1 : \varepsilon_1^* d\Omega = \int_{\Omega_3^{(2)}} \sigma_2 : \varepsilon_1^* d\Omega$$

Il s'agit donc d'une prise de moyenne au sens des fonctions tests ε_1^* sur l'élément de volume. Pour des fonctions tests homogènes, on peut alors noter $\sigma_2 = \langle \sigma_1 \rangle$, qui correspond à une opération d'homogénéisation. Réciproquement, le raccord en déformation (2), avec les champs tests $\sigma_2^* = D\varepsilon_2^*$, conduit

à

$$\forall \varepsilon_2^*, \int_{\Omega_2} \varepsilon_2^* : D\varepsilon_2 d\Omega = \int_{\Omega_2} \varepsilon_2^* : D\mathcal{P}'_{21} \varepsilon_1 d\Omega$$

ce qui définit l'opérateur de localisation $L : \varepsilon_2 = L\varepsilon_1$. Enfin, l'équivalence en énergie qui s'écrit

$$\int_{\Omega_3^{(1)}} \sigma_1 : \varepsilon'_1 d\Omega = \int_{\Omega_3^{(2)}} \sigma_2 : \varepsilon'_2 d\Omega$$

donne avec $\varepsilon'_2 = L\varepsilon'_1$ et $\varepsilon_2 = L\varepsilon_1$ (dans le cas du zoom sans domaine débordant, et sans présence de perforation, $\Omega_3^{(2)} = \Omega_2$) :

$$\int_{\Omega_3^{(1)}} \varepsilon_1 : D_1 \varepsilon'_1 d\Omega = \int_{\Omega_3^{(2)}} \varepsilon_1 : L^T D_2 L \varepsilon'_1 d\Omega$$

qui redonne, dans le cas de déformations macro homogènes, $D_1 = \langle L^T D_2 L \rangle$.

La méthode proposée peut donc s'interpréter comme une méthode homogénéisation et de relocalisation numérique dans la zone d'intérêt, où les champs macros sont des champs de bas degré couvrant toute la structure, et où les champs fins décrivant l'hétérogénéité sont définis dans la seule zone d'intérêt.

5 Conclusions et perspectives

Une méthode de zoom structural a été présentée, qui permet de faire un calcul couplé avec deux discrétisations différentes, celle de la structure globale et celle d'une zone particulière d'intérêt. Cette méthode n'utilise pas de paramètre additionnel, et vérifie les *patch-tests*. La contre-partie est l'utilisation de projections non-locales ; c'est pourquoi une résolution itérative est proposée. Dans les applications présentées, il s'agit d'une méthode simple de point fixe, mais d'autres solveurs peuvent être envisagés, comme par exemple, une méthode d'Uzawa. Les applications visées à plus long terme concernent les cas non-linéaires avec fissures, éventuellement débouchantes, dans une micro-structure particulière. Le cas de la dynamique sera aussi un domaine d'application à aborder. D'autre part, la finesse de discrétisation ainsi que la taille de la zone d'intérêt restent des paramètres à étudier en vue de leur choix *a priori*.

Remerciements

Les auteurs tiennent à souligner le support à cette étude fourni par le laboratoire commun MIST (Micro-mécanique et Intégrité des Structures, IRSN / CNRS / Université Montpellier 2).

Références

- [1] H. Ben Dhia, Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série Iib, 326, 899-904, 1998.
- [2] H. Ben Dhia, Numerical modelling of multiscale problems : the Arlequin method, Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics, 1999.
- [3] F. Brezzi, J.-L. Lions and O. Pironneau. Analysis of a Chimera method, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series I – Mathematics, 332(7) :655-660, 2001.
- [4] D. Dureisseix, H. Bavestrello. Information transfer between incompatible finite element meshes : application to coupled thermo-viscoelasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195 :6523-6541, 2006.
- [5] J. Fish, V. Belsky and M. Pandheeradi. Composite grid method for hybrid systems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 135 :307-325, 1996.
- [6] L. Gendre, O. Allix and P. Gosselet, A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling, to appear in International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011.
- [7] J. W. Park, J. W. Hwang and Y. H. Kim, Efficient finite element analysis using mesh superposition technique, Finite Elements in Analysis and Design, 39 :619-638, 2003.
- [8] J. D. Whitcomb, Iterative global/local finite element analysis, Computers & Structures, 40 :1027-1031, 1991.