

CPOD2 : Réduction de modèles par POD contrainte pour l'optimisation de forme en mécanique

M. Xiao¹, P. Breittkopf¹, R. Filomeno Coelho², C. Knopf-Lenoir¹, P. Villon¹

¹Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, France, {manyu.xiao,piotr.breittkopf}@utc.fr

²BATir, Université Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium, rfilomen@batir.ulb.ac.be

Résumé — Un métamodèle original basé sur la méthode de décomposition aux valeurs propres contrainte (CPOD2) est proposé. L'idée principale est de modifier non seulement les coefficients (ce qui a été proposé précédemment par les auteurs sous le nom de CPOD1), mais également la base vectorielle de la décomposition. Cette approche est comparée, sur un exemple de l'aile 2D, aux méthodes POD et CPOD1.

Mots clefs — décomposition aux valeurs propres (POD), base orthonormée.

1 Instructions générales

Pour l'optimisation de systèmes mécaniques, les simulations numériques « haute fidélité » (par exemple : éléments finis) permettent de modéliser des phénomènes physiques complexes ; cependant, le calcul des réponses est souvent coûteux en temps CPU. Même si l'utilisation de plates-formes de calcul parallèle diminue le volume de calcul, celui-ci reste encore trop élevé à cause du nombre de simulations et il existe deux difficultés : l'équilibrage des tâches de tous les utilisateurs et l'augmentation de l'efficacité relative du calcul parallèle. De plus, des contraintes informatiques peuvent également entrer en considération (par exemple : gestion des licences).

Il reste donc indispensable de développer des modèles réduits pour remplacer le modèle « haute fidélité ». Une large gamme de méthodes d'approximation associant les réponses \mathbf{f} aux variables de conception \mathbf{y} a été proposée à cet effet [1], parmi lesquelles on peut citer les surfaces de réponse polynomiales, le Krigeage, l'approximation diffuse ou moindres carrés mobiles, les réseaux de neurones, les réseaux de fonctions à base radiale et la régression par vecteurs supports.

Néanmoins, cette approche présente l'inconvénient de ne pas utiliser l'information « physique » générée par le code de calcul « haute fidélité ». La méthode de décomposition aux valeurs propres (POD – *Proper Orthogonal Decomposition*) est utilisée à cet effet [2]. L'idée principale consiste à décomposer un champ vectoriel en une combinaison linéaire de modes restreints, ceux-ci étant calculés à partir de la matrice de covariance construite sur des clichés obtenus par la simulation « haute fidélité ». Mais la troncation de la base vectorielle produit une erreur dans le calcul des quantités globales pour l'optimisation. Pour pallier cette limitation, une nouvelle méthode basée sur la décomposition aux valeurs propres contrainte (CPOD) [3] a été développée, en imposant que les coefficients de la décomposition soient tels que des grandeurs scalaires obtenues par intégration des vecteurs satisfassent des contraintes d'égalité strictes (au moins pour les points du plan d'expériences).

Toutefois, la CPOD garde la même base modale que la POD, ce qui en limite l'utilité pratique car le système projeté reste le même qu'avec la POD. Pour cette raison, une nouvelle approche intitulée CPOD2(*Constrained Proper Orthogonal Decomposition – Version 2*) est proposée dans ce travail. Par rapport aux méthodes précédentes (POD/CPOD), cette approche consiste à prendre en compte les contraintes scalaires, via une modification non seulement des coefficients, mais également des modes orthonormés.

2 Définition d'un projecteur orthogonal contraint

On se place dans l'espace Affine Euclidien \mathbf{E} attaché à l'espace vectoriel $\mathbf{E} = \mathfrak{R}^n$ muni d'un repère $(0, B)$, avec $B = (e^1, \dots, e^n)$ la base canonique de \mathbf{E} et \mathbf{u}_0 un point origine dans \mathbf{E} , et muni du

produit scalaire habituel. Soit \mathbf{F} un sous-espace affine de \mathbf{E} , passant par \mathbf{u}_0 et attaché au sous espace vectoriel \mathbf{F} tel que $\dim(\mathbf{F}) = m$ ($m \leq N$). Soit $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_m\}$ une base orthonormée de \mathbf{F} ; \mathbf{F} est engendré par une base Φ et passe par le point \mathbf{u}_0 :

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{u}_0 + \Phi \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{R}^m\} \quad (1)$$

Soit \mathbf{y} la variable de conception et $\mathbf{y}^{(k)}$, $k = 1, \dots, N_{snap}$ (nombre de clichés (ou *snapshots*)), un plan d'expériences. Les clichés $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{y})$ une famille de points de \mathbf{E} correspondant à des champs $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ calculés par éléments finis sur le même maillage, qu'on écrira simplement $\mathbf{u}^{(k)}$, $k=1, \dots, N_{snap}$, et soit \mathbf{C} une matrice $N \times p$ de rang p ($p < N$) définissant la relation linéaire à conserver sur \mathbf{F} . On définit le projecteur contraint sur \mathbf{F} par :

$$P_C : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \underset{\mathbf{v} \in \mathbf{F}_C(\mathbf{u})}{\text{Arg min}} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \right\} \text{ avec } \mathbf{F}_C(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{F} / \mathbf{C}^T \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{v}\}, \quad (2)$$

3 L'idée principale de la méthode CPOD2

Soit un plan d'expériences $\{\mathbf{u}^{(k)} = (u_1^{(k)}, \dots, u_N^{(k)})^T; k = 1, \dots, N_{snap}\}$ déterminé par exécution d'un modèle « haute fidélité » pour un échantillon représentatif de points dans l'espace de conception. N correspond à la taille d'un cliché (typiquement : le nombre de degrés de liberté associé à un calcul haute fidélité).

On cherche \mathbf{F} , donc une base orthogonale $\Phi = \{\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_m\}$, ($\Phi^T \Phi = \mathbf{I}_m$), et des coefficients $\boldsymbol{\alpha}^{opt} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ tels que :

- $\dim(\mathbf{F}) = m$;

- $\sum_k \|\mathbf{u}^{(k)} - P_C(\mathbf{u}^{(k)})\|^2$ soit minimal

- $\mathbf{u}^{CPOD 2, (k)} = P_C(\mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(k)} \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{u}_0 + \Phi \boldsymbol{\alpha}^{opt}$, $k = 1, \dots, N_{snap}$, $m \ll N_{snap}$, (3)

Cette stratégie portera le nom de CPOD2 (*Constrained Proper Orthogonal Decomposition 2*).

Sur le plan algorithmique, on obtient les sous-espaces des modes via une décomposition QR de l'opérateur \mathbf{C} liant vecteurs physiques et valeurs scalaires des contraintes. On présentera **le calcul des modes Φ , des coefficients $\boldsymbol{\alpha}^{opt}$ et de la valeur \mathbf{u}_0** dans l'article complet.

Dans la partie applicative, on analyse et compare sur un exemple académique de l'aile 2D les performances des trois approches : POD, CPOD et CPOD2. Le champ physique correspond à la fonction potentielle d'écoulement fluide (dont dérivent les vitesses) avec des contraintes sur la portance et la traînée. Les résultats obtenus sur ce démonstrateur montrent que cette approche permet de contrôler les erreurs sur le champ physique et sur les contraintes scalaires, et constitue donc une bonne alternative aux méthodes POD et CPOD. Un deuxième exemple concerne le conduit d'admission d'un moteur thermique avec des contraintes sur la vorticité et la perte de charge.

Remerciements : Ce travail a été soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche / Réseau National en Technologies Logicielles (ANR/RNTL), dans le cadre du projet ANR-05-RNTL-009 intitulé OMD2 ("Optimisation Multi-Disciplinaire Distribuée").

Références

- [1] P. Breitkopf and R. Filomeno Coelho. Multidisciplinary Design Optimization in Computational Mechanics. ISTE/John Wiley & Sons, Chippenham, UK, April 2010.
- [2] G. Berkooz, P. Holmes, J. L. Lumley. The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows. Annual Reviews of Fluid Mechanics, vol. 25, pp. 593–575, 1993.
- [3] M. Xiao, P. Breitkopf, R. Filomeno Coelho, C. Knopf-Lenoir, M. Sidorkiewicz, P. Villon. Model reduction by CPOD and Kriging - Application to the shape optimization of an intake port. Struct Multidisc Optim: doi 10.1007/s00158-009-0434-9, 2009.