



**HAL**  
open science

## Minimisation de la variabilité du comportement statique des treillis

Catherine Knopf-Lenoir, Pascal Lardeur, Roland Mandeng, Jie Wang

► **To cite this version:**

Catherine Knopf-Lenoir, Pascal Lardeur, Roland Mandeng, Jie Wang. Minimisation de la variabilité du comportement statique des treillis. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592962

**HAL Id: hal-00592962**

**<https://hal.science/hal-00592962>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Minimisation de la variabilité du comportement statique des treillis

C. Knopf-Lenoir, P. Lardeur, R. Mandeng, J. Wang

*Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, France, {pascal.lardeur,cklv}@utc.fr*

**Résumé** — Une méthodologie pour l'optimisation robuste du comportement statique des treillis est présentée. Le problème d'optimisation est formulé de manière à minimiser une réponse (déplacement) et son coefficient de variation en présence de variabilité à la fois sur les variables de conception et sur d'autres paramètres qui ne sont pas optimisés. Une méthode d'estimation rapide de la variabilité du comportement d'un treillis est développée. Les applications montrent l'intérêt de cette méthodologie qui peut être couplée de manière non intrusive avec un code de calcul standard (Abaqus...) et qui permet d'obtenir des structures optimales conciliant performance et robustesse.

**Mots clefs** — Optimisation, robustesse, variabilité, méta-modèle.

## 1 Introduction

L'optimisation avec prise en compte de la variabilité a pour objectif de trouver des solutions à la fois performantes au sens de la minimisation d'une fonction objectif et robustes, c'est-à-dire peu sensibles aux dispersions qui affectent les différents paramètres du modèle. Nous présentons ici une méthode probabiliste, appliquée au cas des treillis dans le domaine statique linéaire. La recherche d'un optimum robuste est formulée comme la minimisation d'un déplacement et de son coefficient de variation. La variabilité est prise en compte par une approche qui permet d'obtenir très rapidement une estimation de la moyenne, de l'écart-type et du coefficient de variation d'un déplacement.

## 2 Description de la méthodologie

### 2.1 Cahier des charges

La méthodologie d'optimisation robuste développée doit respecter autant que possible les exigences suivantes :

- elle doit permettre la prise en compte d'un grand nombre de paramètres incertains ;
- elle doit être valide même pour des niveaux d'incertitudes moyens ou élevés ;
- elle doit être compatible avec l'utilisation de logiciels éléments finis standard (Abaqus, MSC.Nastran, Ansys, ... ) ;
- la prise en compte de la variabilité ne doit pas être fortement pénalisante en nombre d'analyses éléments finis et donc en temps de calcul ;
- elle doit permettre de rechercher un optimum global, par opposition à des optima locaux.

Parmi ces exigences, un point important est que l'ensemble de la démarche d'optimisation doit être non intrusif et les analyses éléments finis nécessaires doivent pouvoir être réalisées avec un logiciel éléments finis standard. Un autre point majeur est que la méthodologie proposée doit permettre de traiter un problème d'optimisation non déterministe pour un coût proche de celui d'une optimisation déterministe. Ces deux exigences sont fondamentales dans la perspective du traitement de problèmes industriels.

### 2.2 Position du problème d'optimisation

La prise en compte de la variabilité dans une procédure d'optimisation peut intervenir de plusieurs manières. On peut classer les méthodes proposées en deux grandes approches, rappelées

notamment par Schüeller et Jensen [10] ou Beyer et Sendhoff [1] dans des publications qui décrivent l'état de l'art dans ce domaine. On distingue :

- l'optimisation fiabiliste (ou Reliability Based Optimization – RBO) qui utilise la notion de fonction d'état limite et de probabilité de défaillance, souvent traduite par des indices de fiabilité.
- l'optimisation robuste (ou Robust Design Optimization – RDO), dans laquelle on recherche une solution optimale très peu sensible à la variabilité des paramètres. C'est cette deuxième approche qui est appliquée ici.

La robustesse peut être abordée par trois classes de méthodes. On distingue les approches par intervalles [8], les méthodes basées sur l'approche floue [9] et les méthodes probabilistes [4]. Nous considérons ici une approche probabiliste. La mesure de la robustesse fait souvent intervenir la moyenne et/ou l'écart-type des quantités d'intérêt. Dans la méthodologie présentée, la mesure de la robustesse est caractérisée par le coefficient de variation (coefficient of variation – c.o.v.). Ainsi, si on considère le déplacement  $U$  d'un nœud de la structure, la mesure de la robustesse de  $U$  sera caractérisée par :

$$\text{c.o.v.}(U) = \frac{\sigma(U)}{m(U)} \quad (1)$$

Pour l'optimisation, nous allons prendre en compte la variabilité au même niveau que l'objectif principal, et non en tant que limitation. Ainsi, dans nos applications, nous cherchons à minimiser à la fois la valeur nominale et la variabilité du déplacement d'un point, ce qui nous conduit à une formulation multiobjectif de la forme :

$$\min (U_{\text{nom}}, \text{c.o.v.}(U)) \quad (2)$$

Nous traitons des problèmes de dimensionnement optimal : les variables de conception seront associées aux aires des sections des barres constituant la structure. D'un point de vue physique il est justifié de distinguer les variables de conception et les variables aléatoires. En effet, l'influence des incertitudes sur les paramètres qui ne sont pas optimisés doit également être prise en compte dans la recherche d'une solution optimale et stable. La méthodologie développée permet de faire cette distinction. Les variables aléatoires sont constituées de l'ensemble des propriétés physiques. Pour un treillis de barres, il s'agit des aires des sections (qui sont aussi les variables de conception), ainsi que des modules d'élasticité du matériau.

La méthodologie proposée est compatible avec tout type de distribution statistique des variables aléatoires. On supposera ici que toutes ces variables suivent une loi normale. Pour éviter les valeurs non physiques, des lois Gaussiennes tronquées sont utilisées.

La résolution numérique du problème multiobjectif ainsi défini sera effectuée par un algorithme de minimisation globale (algorithme génétique ou évolutionnaire).

### **3 La Méthode des Efforts Généralisés Certains (MEGC)**

#### **3.1 Principe**

La Méthode des Efforts généralisés certains ou MEGC est dédiée aux structures minces et repose sur l'hypothèse d'indépendance des efforts généralisés vis-à-vis des variables incertaines. Elle a été proposée par Lardeur et al. [5] pour l'analyse de la variabilité du comportement statique des treillis. Elle a été appliquée par Lardeur et al. [6] aux treillis de barres hyperstatiques. L'hypothèse utilisée dans la MEGC est vérifiée exactement pour les structures isostatiques, ou quand la perturbation due aux incertitudes est uniforme sur l'ensemble de la structure. Dans ces cas particuliers, la MEGC mène à un calcul exact des déplacements et de leur variabilité. Dans le cas général, elle mène à une approximation de ces quantités. L'objectif est de vérifier la pertinence de cette hypothèse pour le cas général.

L'hypothèse des efforts généralisés certains permet de trouver une forme explicite de l'énergie interne de déformation, quelles que soient les valeurs des variables incertaines. Pendant le processus d'optimisation, deux analyses éléments finis en configuration nominale sont nécessaires pour l'évaluation d'une conception donnée, c'est-à-dire le calcul de la valeur nominale et de la variabilité d'un déplacement. Le théorème de Castigliano permet d'exprimer le déplacement d'un point sous la forme d'un méta-modèle. La moyenne et l'écart-type de ce déplacement sont ensuite obtenus analytiquement. L'évaluation de ces quantités est très rapide.

### 3.2 Formulation de la MEGC pour les treillis de barres

Pour l'élément de barre, les paramètres incertains sont le module d'élasticité  $E$  et l'aire de la section  $A$ . L'objectif est de décrire le calcul de la variabilité du déplacement. L'hypothèse est la suivante : les efforts normaux ne dépendent pas des paramètres incertains. Un treillis de  $n$  barres est discrétisé par  $n$  éléments finis et contient  $2n$  paramètres incertains. L'énergie de déformation pour le treillis s'écrit :

$$\pi_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{E_i A_i} \quad (3)$$

Pour obtenir le déplacement  $U$  d'un point  $P$ , dans une direction donnée, le théorème de Castigliano est utilisé, soit :

$$U = \frac{\partial \pi_{\text{int}}}{\partial F} \quad (4)$$

où  $F$  est l'effort appliqué au point  $P$  dans la direction d'intérêt. Si  $F$  n'existe pas physiquement, on parle alors de force fictive et après dérivation de l'énergie interne  $\pi_{\text{int}}$ , on applique  $F = 0$  dans l'expression de  $U$ . Pour utiliser l'équation (4),  $F$  doit apparaître explicitement dans l'expression de l'énergie interne. Par conséquent, dans chaque élément, l'effort normal est décomposé de la façon suivante :

$$N_i = N_i' + FN_i'' \quad (5)$$

où  $N_i'$  est l'effort normal dans l'élément  $i$ , dû aux efforts appliqués sur l'ensemble de la structure excepté au point  $P$  dans la direction d'intérêt ;  $N_i''$  est l'effort normal dans l'élément  $i$ , dû à un effort unitaire appliqué au point  $P$  dans la direction d'intérêt.  $N_i'$  et  $N_i''$  sont considérés certains et sont donc indépendants des paramètres incertains.

En tenant compte des équations (3) et (5), l'équation (4) mène au déplacement :

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i'' l_i (N_i' + FN_i'')}{E_i A_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{E_i A_i} \quad (6)$$

où  $a_i$  est un coefficient déterministe et dépend de  $l_i$ ,  $N_i'$ ,  $N_i''$  et  $F$  ;  $E_i$  et  $A_i$  sont les paramètres incertains de l'élément  $i$ .

L'équation (6) montre que le déplacement d'un point est obtenu sous la forme d'un méta-modèle. Une première analyse éléments finis en configuration nominale, avec un logiciel éléments finis standard (ex : Abaqus, MSC.Nastran, Ansys...), permet de calculer les valeurs de  $N_i'$ , élément par élément. De même, une seconde analyse permet le calcul des  $N_i''$ . Quand les efforts normaux  $N_i'$  et  $N_i''$  sont identifiés,  $U$  peut être évalué pour n'importe quelle combinaison des paramètres incertains.

Une évaluation analytique de  $m(U)$  et  $\sigma(U)$  est possible. En considérant que les  $2n$  paramètres sont indépendants, on obtient d'après l'équation (6) :

$$m(U) = \sum_{i=1}^n a_i m\left(\frac{1}{E_i A_i}\right) \quad (7)$$

$$\sigma^2(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma^2\left(\frac{1}{E_i A_i}\right) \quad (8)$$

Pour calculer efficacement  $m\left(\frac{1}{E_i A_i}\right)$  et  $\sigma^2\left(\frac{1}{E_i A_i}\right)$ , des variables centrées réduites sont introduites pour les paramètres incertains :

$$X_{\text{red}} = \frac{X_i - m(X_i)}{\sigma(X_i)} \quad \text{ou} \quad X_i = m(X_i)(X_{\text{red}} \text{c.o.v.}(X_i) + 1) \quad (9)$$

où  $X_i$  est un paramètre physique de type  $E_i$  ou  $A_i$  et  $X_{\text{red}}$  est la variable centrée réduite  $E_{\text{red}}$  ou  $A_{\text{red}}$ .

Les équations (7) et (9) mènent au déplacement moyen :

$$m(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{m(E_i) m(A_i)} m\left(\frac{1}{(E_{\text{red}} \text{c.o.v.}(E_i) + 1)(A_{\text{red}} \text{c.o.v.}(A_i) + 1)}\right) \right) \quad (10)$$

De la même façon, les équations (8) et (9) permettent le calcul de la variance du déplacement :

$$\sigma^2(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{a_i}{m(E_i) m(A_i)} \right)^2 \sigma^2\left(\frac{1}{(E_{\text{red}} \text{c.o.v.}(E_i) + 1)(A_{\text{red}} \text{c.o.v.}(A_i) + 1)}\right) \right) \quad (11)$$

où  $m\left(\frac{1}{(E_{\text{red}} \text{c.o.v.}(E_i) + 1)(A_{\text{red}} \text{c.o.v.}(A_i) + 1)}\right)$  et  $\sigma^2\left(\frac{1}{(E_{\text{red}} \text{c.o.v.}(E_i) + 1)(A_{\text{red}} \text{c.o.v.}(A_i) + 1)}\right)$  sont respectivement la moyenne et la variance de termes dépendant des variables réduites  $E_{\text{red}}$  et  $A_{\text{red}}$ , ainsi que des coefficients de variation des paramètres d'entrée. Ces termes peuvent être calculés pour différentes valeurs de coefficients de variation, indépendamment des problèmes traités, et stockés dans une base de données. Les équations (10) et (11) mènent à un calcul très rapide du déplacement moyen et de la variance. Quand  $m(\mathbf{U})$  et  $\sigma(\mathbf{U})$  sont évalués, on déduit la valeur de  $\text{c.o.v.}(\mathbf{U})$ . Ces quantités seront calculées pour l'ensemble des configurations évaluées au cours du processus d'optimisation.

### 3.3 Mise en œuvre

Quel que soit l'algorithme d'optimisation, il est nécessaire de calculer les différentes quantités d'intérêt (fonction objectif, contraintes), pour un certain nombre de configurations. La Figure 1 montre l'organigramme de la MEGC, à appliquer pour chacune de ces configurations.

Les efforts généralisés  $N_i'$  et  $N_i''$  sont d'abord calculés dans la configuration nominale. En exploitant l'hypothèse mécanique, il est possible de calculer l'énergie interne du système, pour toutes les combinaisons des paramètres incertains, sans analyse complémentaire par éléments finis. Le déplacement en un point est alors évalué en utilisant le théorème de Castigliano (voir équation (6)). La moyenne et l'écart-type du déplacement sont calculés en exploitant les équations (10) et (11). Finalement, l'application de la MEGC nécessite deux analyses par éléments finis en configuration nominale et un post-traitement très rapide. De plus, ces deux analyses éléments finis étant réalisées en configuration nominale, elles exploitent la même matrice de rigidité, seul le chargement change.

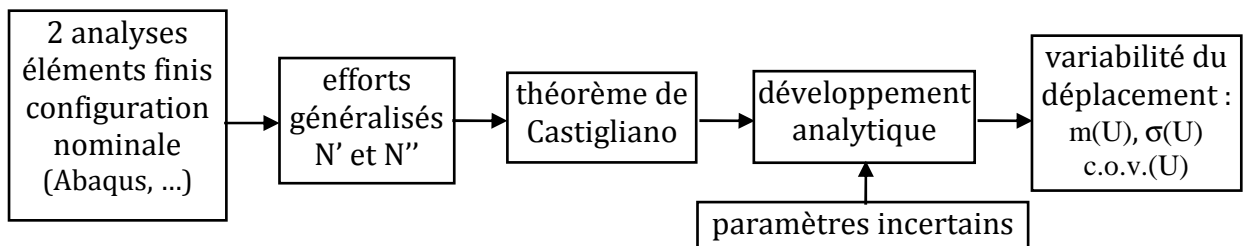


FIG. 1 – Principe de calcul de la variabilité du déplacement

## 4 Exemples

### 4.1 Treillis 2D à 10 barres

Le premier exemple, présenté dans la Figure 2, est un treillis à 10 barres et 6 nœuds. Cet exemple a été traité par de nombreux auteurs, dans le cadre de l'optimisation déterministe [2,7] ou non déterministe [3]. Le problème d'optimisation concerne le déplacement vertical  $U$  du point P situé à l'extrémité de la structure et soumis à un chargement. Dans la configuration initiale, les barres ont toutes la même section :  $A_0 = 3225,8 \text{ mm}^2$  ; la masse vaut  $M_0 = 952,43 \text{ kg}$ . Le déplacement nominal pour cette configuration est :  $U_0 = 20,01 \text{ mm}$ .

Les deux objectifs à minimiser sont la valeur nominale du déplacement, ainsi que sa variabilité. Les variables d'optimisation sont les sections des barres  $A_i$ , soit 10 variables. Les variables incertaines sont les sections des barres  $A_i$  et les modules d'élasticité  $E_i$ , soit 20 variables. Deux niveaux de variabilité d'entrée ont été considérés : 1% (niveau faible) et 20% (niveau très élevé). Le problème d'optimisation robuste peut être résumé sous la forme mathématique suivante :

fonction objectif à minimiser :  $\alpha \frac{U}{U_0} + (1 - \alpha) \text{c.o.v.}(U)$  avec  $\alpha$  compris entre 0 et 1 ;

variables de conception :  $A_i$  ;

variables aléatoires :  $A_i$  et  $E_i$  avec  $\text{c.o.v.}(A_i) = \text{c.o.v.}(E_i) = 1\%$  (premier cas) ou  $20\%$  (second cas)

contraintes sur les variables de conception :  $700 \text{ mm}^2 < A_i < 12\,000 \text{ mm}^2$  ;

contrainte sur la masse :  $M = M_0 = 952,43 \text{ kg}$ .

Le front de Pareto est obtenu en lançant la procédure d'optimisation pour différentes valeurs de  $\alpha$ . La Figure 3 montre le front de Pareto obtenu pour le second cas ( $\text{c.o.v.}(A) = \text{c.o.v.}(E) = 20\%$ ). La Figure 4 montre les configurations obtenues pour la structure dans les deux cas extrêmes :  $\alpha = 0$  (minimisation de la variabilité) et  $\alpha = 1$  (minimisation du déplacement nominal). On peut constater que suivant que l'on privilégie le déplacement nominal ou sa variabilité, les conceptions optimales sont différentes. D'autres configurations sont obtenues pour des valeurs intermédiaires de  $\alpha$ .

La précision de la MEGC est évaluée dans ce contexte d'optimisation robuste. Les caractéristiques statistiques du déplacement : moyenne, écart-type, coefficient de variation, obtenues avec la MEGC, sont comparées aux résultats obtenus par simulation de Monte Carlo, considérée comme méthode de référence. Pour obtenir ces résultats de référence, chaque tirage de la simulation de Monte Carlo consiste en un calcul éléments finis réalisé avec un logiciel standard. Une étude de convergence a montré qu'un nombre de tirages égal à 80000 permet d'obtenir cette solution de référence avec une bonne précision. Le test est fait pour trois configurations : initiale, optimale avec  $\alpha = 0$ , optimale avec  $\alpha = 1$  et deux niveaux de variabilité des paramètres d'entrée : 1% et 20%. Les résultats, présentés dans le Tableau 1, montrent que la MEGC fournit des résultats précis pour cet exemple. En effet, sur l'ensemble des cas étudiés, l'erreur maximale observée sur le coefficient de variation vaut 4%.

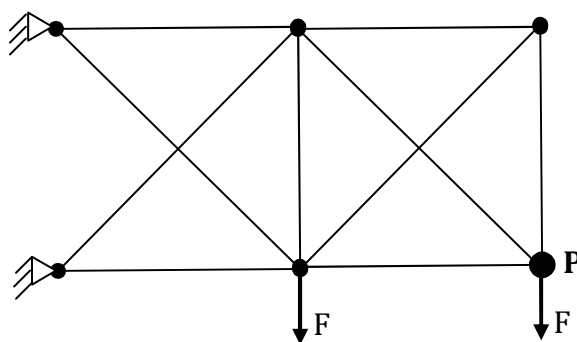


FIG. 2 – Treillis 2D à 10 barres

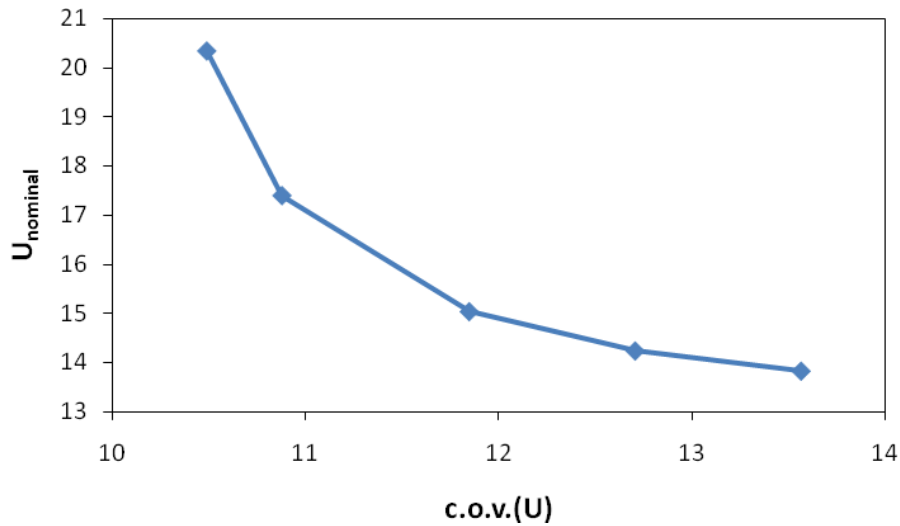
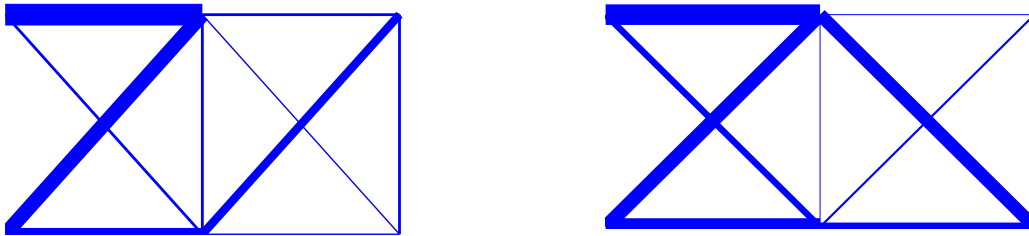


FIG. 3 – Treillis 2D à 10 barres : front de Pareto pour le cas  $c.o.v.(A_i) = c.o.v.(E_i) = 20\%$



$\alpha = 0$  : minimisation du c.o.v. du déplacement

$\alpha = 1$  : minimisation du déplacement nominal

FIG. 4 – Treillis 2D à 10 barres : configurations optimales pour les valeurs extrêmes de  $\alpha$

TAB. 1 – Treillis 2D à 10 barres : précision de la MEGC pour le calcul des caractéristiques statistiques du déplacement

		erreur sur $m(U)$	erreur sur $\sigma(U)$	erreur sur $c.o.v.(U)$
configuration initiale	cov = 1%	0.004%	0.2%	0.2%
	cov = 20%	2%	5%	3%
configuration optimale ; $\alpha = 0$	cov = 1%	0.002%	0.6%	0.6%
	cov = 20%	2%	6%	4%
configuration optimale ; $\alpha = 1$	cov = 1%	0.003%	0.2%	0.2%
	cov = 20%	1%	4%	3%

## 4.2 Dôme 3D à 120 barres

Le second exemple, présenté dans la Figure 5, est un dôme 3D à 120 barres et 49 nœuds, encasté à sa base. Le problème d'optimisation concerne le déplacement vertical du sommet du dôme. Cet exemple a fait l'objet d'études dans le cadre de l'optimisation déterministe [7,11]. Dans la

configuration initiale, les barres ont toutes la même section :  $A_0 = 850.88 \text{ mm}^2$  ; la masse vaut  $M_0 = 2600 \text{ kg}$ . Le déplacement nominal pour cette configuration est :  $U_0 = 1.54 \text{ mm}$ .

Le problème d'optimisation est formulé comme pour l'exemple précédent. En tenant compte de la symétrie du problème, celui-ci comprend 7 variables d'optimisation. Le module d'élasticité et les aires des sections sont considérés incertains, soit au total 240 variables incertaines qui suivent une loi normale. Cet exemple est donc caractérisé par un grand nombre de variables incertaines. Un niveau de variabilité d'entrée élevé : 20%, est considéré pour l'ensemble des variables incertaines.

La Figure 6 montre le front de Pareto obtenu. La particularité de ce problème est que pour une optimisation déterministe, le déplacement est proche de zéro, menant à un niveau de coefficient de variation très élevé. On note également que les variations des quantités d'intérêt  $U_{\text{nominal}}$  et  $c.o.v.(U)$  sont très grandes.

La Figure 7 montre les configurations obtenues pour la structure dans les deux cas extrêmes :  $\alpha = 0$  (minimisation de la variabilité) et  $\alpha = 1$  (minimisation du déplacement nominal). De nouveau, suivant que l'on privilégie le déplacement nominal ou sa variabilité, les conceptions optimales sont différentes.

La précision de la MEGC a été évaluée sur cet exemple, pour les configurations initiale, optimale avec  $\alpha = 0$ , optimale avec  $\alpha = 1$ . La MEGC fournit des résultats très précis pour cet exemple. En effet, l'erreur maximale observée sur le coefficient de variation est inférieure à 1%.

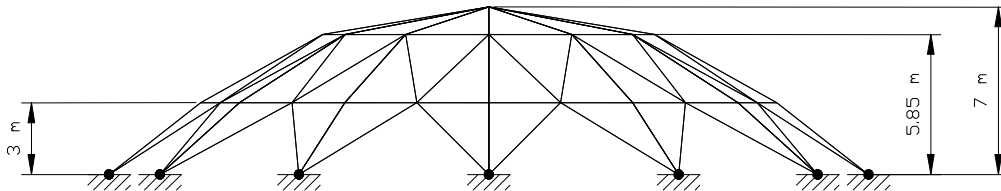


FIG. 5 – Dôme 3D à 120 barres

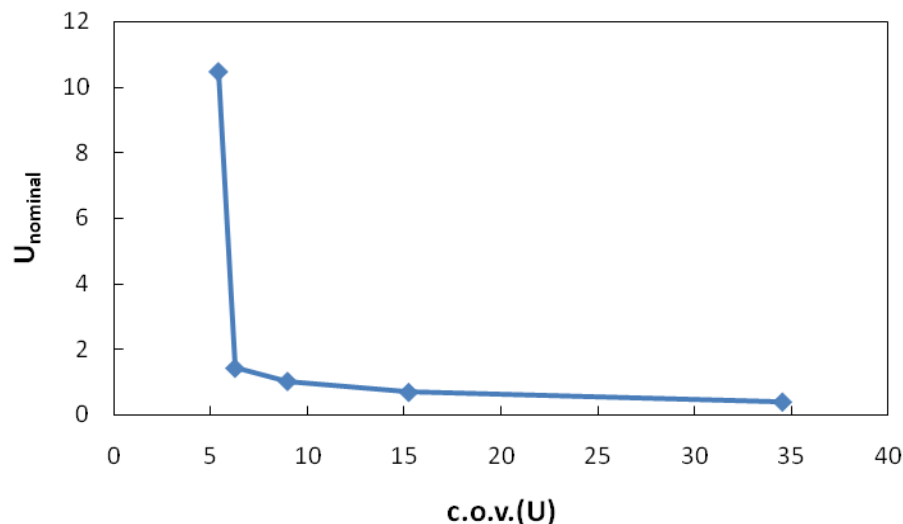
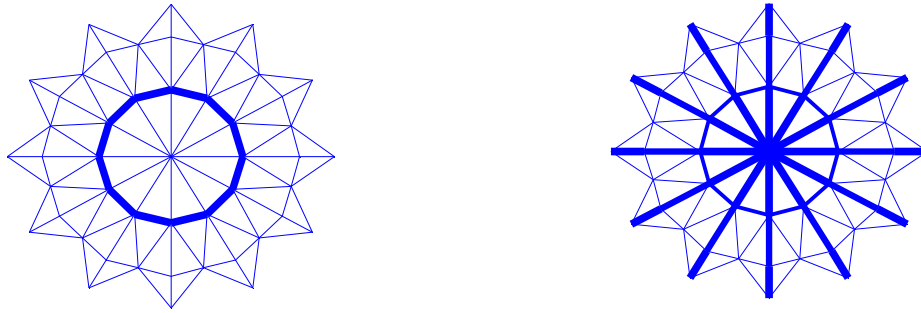


FIG. 6 – Dôme 3D à 120 barres : front de Pareto





$\alpha = 0$  : minimisation du c.o.v. du déplacement       $\alpha = 1$  : minimisation du déplacement nominal

FIG. 7 – Dôme 3D à 120 barres : configurations optimales pour les valeurs extrêmes de  $\alpha$

## 5 Conclusion

Une méthode d'optimisation robuste, utilisant un formalisme probabiliste pour le calcul de la variabilité, a été présentée. Le problème d'optimisation mène à une formulation multiobjectif et permet de minimiser la valeur nominale ainsi que la variabilité du déplacement. On distingue les variables de conception et les variables aléatoires. La variabilité du déplacement est évaluée par la MEGC, méthode rapide ne nécessitant que deux analyses par éléments finis et un développement analytique. Cette approche est non intrusive et l'ensemble de la méthodologie est compatible avec l'utilisation d'un logiciel éléments finis standard. La méthodologie a été appliquée à un treillis 2D à 10 barres et un dôme 3D à 120 barres. D'un point de vue mécanique, l'effet de la prise en compte de la variabilité sur la conception optimale, a été mis en évidence. D'un point de vue numérique, les résultats montrent que la MEGC est très performante sur ce type de structures. Les perspectives sont nombreuses, cette approche sera en particulier développée pour des structures de type plaques et coques.

## Références

- [1] H.G. Beyer, B. Sendhoff. *Robust optimization – a comprehensive survey*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 3190-3218, 2007.
- [2] K. Deb, S. Gulati. *Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms*, Finite Elements in Analysis and Design, 37, 447-465, 2001.
- [3] X. Guo, W. Zhang, X. Gao. *Confidence structural robust design and optimization under stiffness and load uncertainties*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 198, 3378-3399, 2009.
- [4] G. Kharmanda, A. Mohamed, M. Lemaire. *Efficient reliability based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis*, Structural Multidisciplinary Optimization, 24, 233–245, 2002.
- [5] P. Lardeur, M. Oudjene, É. Arnoult. *La méthode MEGC pour le calcul de dispersion du comportement statique des treillis*, 16<sup>ème</sup> congrès français de mécanique, Nice, 2003.
- [6] P. Lardeur, A. Demri, C. Lionnet. É. Arnoult. *Application de la méthode MEGC pour le calcul des incertitudes dans les treillis hyperstatiques*, 7<sup>ème</sup> colloque national en calcul des structures, Giens, 2005.
- [7] K.S. Lee, Z.W. Geem. *A new structural optimization method based on the harmony search algorithm*, Computers and Structures, 82, 781-798, 2004.
- [8] L. Majumder, S.S. Rao. *Interval-based optimization of aircraft wings under landing loads*, Computers and Structures, 87, 225–235, 2009.
- [9] F. Massa, B. Lallemand, T. Tison. *Fuzzy multiobjective optimization of mechanical structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 631–643, 2009.
- [10] G.I. Schueller, H.A. Jensen. *Computational methods in optimization considering uncertainties – An overview*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198, 2–13, 2008.
- [11] C.K. Soh, J. Yang. *Fuzzy controlled genetic algorithm search for shape optimization*, Journal of Computing in Civil Engineering 10 (2), 143-150, 1996.