HAL open science

Optimisation structurelle des gridshells

Lina Bouhaya, Olivier Baverel, Jean-François Caron

To cite this version:

Lina Bouhaya, Olivier Baverel, Jean-François Caron. Optimisation structurelle des gridshells. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592958

HAL Id: hal-00592958

https://hal.science/hal-00592958v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Optimisation structurelle des gridshells

L. Bouhaya[1], O. Baverel[1,2], J.F. Caron[1]

[1] *Université Paris-Est, Laboratoire Navier (ENPC/LCPC/CNRS), France, {lina.bouhaya, baverel, caron}@enpc.fr*
[2] *Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Grenoble, France, baverel@enpc.fr*

Résumé — Les gridshells sont des structures à double courbure obtenues par déformation élastique d'une grille plane sans rigidité en cisaillement. Une méthode, dite méthode du compas, permet de mailler un gridshell sur une surface à contours et forme imposés. Cette méthode est mise en oeuvre et appuyée par des exemples de maillage de formes. Elle est couplée à des algorithmes génétiques dans le but de minimiser la courbure et donc les contraintes dans la structure lors de la mise en forme. Des exemples d'application sont détaillés.
Mots clés — Gridshell, recherche de forme, méthode du compas, algorithmes génétiques.

1 Introduction

Sous le nom de gridshell, on entend le plus souvent une structure qui a la forme et la rigidité d'une coque à double courbure mais qui est constituée d'une grille et non d'une surface continue. Un gridshell est obtenu par déformation élastique d'une grille bidirectionnelle continue plane sans rigidité en cisaillement puis rigidifiée par une troisième direction de barres. Ces structures peuvent franchir de grandes portées tout en utilisant peu de matière. Ainsi, un gridshell a un potentiel structurel intéressant et peut répondre à des exigences architecturales complexes.

La recherche de forme de ces structures a été menée à travers l'histoire principalement par deux méthodes, une méthode géométrique, la méthode du filet inversé [4] et une autre numérique, la relaxation dynamique [2]. Ces deux méthodes permettent d'obtenir une forme approchée de celle proposée par l'architecte, dérivant d'une grille à plat et de conditions aux limites partiellement ou complètement imposées. Ainsi nous nous sommes intéressés dans cet article à générer un gridshell sur une forme et contour imposés. Une méthode dite méthode du compas, introduite dans *IL10 Gitterschalen* [4], permet ce genre de recherche de forme. Un outil numérique se basant sur cette méthode a été développé [1]. Afin d'optimiser les contraintes dans les barres du maillage obtenu dues à la phase de mise en forme du gridshell, cette méthode a été couplée a des algorithmes métaheuristiques types algorithmes génétiques [1]. L'algorithme proposé a été testé sur plusieurs formes.

2 Maillage d'un gridshell par la méthode du compas

La méthode du compas, décrite dans l'ouvrage *IL10 Gitterschalen* [4], est une méthode géométrique qui permet de créer un réseau de parallélogrammes gauches sur une surface quelconque et cela, comme son nom l'indique, en utilisant uniquement un compas. Nous décrirons dans ce paragraphe les étapes de maillage d'une surface à l'aide de cette méthode qui ont été adaptées de façon à être utilisées avec les algorithmes génétiques dans la suite.

Considérons une surface d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$, que l'on désire mailler à l'aide de la méthode du compas. La première étape consiste à tracer deux directrices arbitraires (D1) et (D2) qui se croisent en un seul point $A(x_A, y_A, z_A)$ comme représenté sur la figure 1.

Soit α_1 l'angle que fait en A la directrice (D1) avec la direction de l'axe des x. Connaissant le point $A(x_A, y_A, z_A)$, l'angle α_1 et le pas de maillage w, le premier point M_1 sur la directrice peut être déterminé (figure 2). Il n'est autre que l'intersection de la surface S, du plan (P) passant par A et faisant un angle α_1 avec le plan (xOz) et de la sphère passant par A et de rayon w. Les autres points M_i de la directrice (D1) peuvent être déterminés ensuite et cela tout en connaissant le point M_{i-1}, le pas de maillage w et l'angle γ_{i-1} que fait $(M_{i-1}M_i)$ avec $(M_{i-2}M_{i-1})$ (figure 3). M_i résulte de l'intersection de la surface S, du

plan (P_{i-1}) passant par M_{i-1} et faisant un angle θ_{i-1} avec avec le plan (xOz) et de la sphère passant par M_{i-1} et de rayon w.

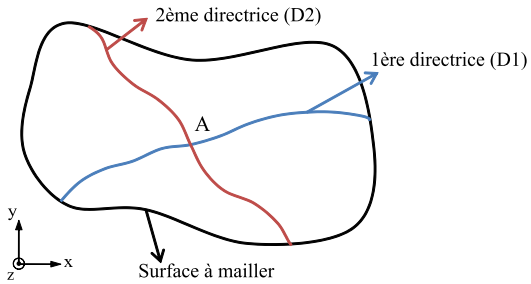

FIG. 1 – Représentation des deux directrices sur la surface à mailler

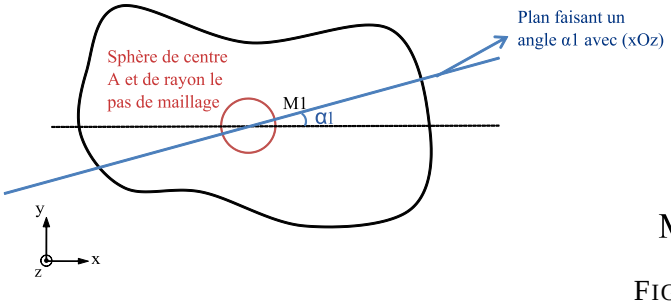

FIG. 2 – Détermination du point M_1 sur la directrice (D1)

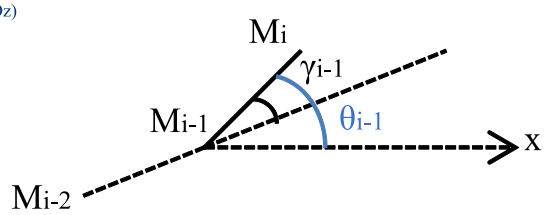

FIG. 3 – Détermination d'un point M_i sur la directrice

En procédant de cette manière, les deux directrices (D1) et (D2) peuvent être tracées sur la surface. Ainsi, les points M_i et les points N_j sont tracés respectivement sur les directrices (D1) et (D2). On considère maintenant la partie de la surface délimitée par le segment de droite de (D1) situé à droite du point A et celui de (D2) situé en bas du point A. En partant du point d'intersection A, et en connaissant les points M_1 et N_1, le point $P_{(1,1)}$ peut être déterminé (figure 4). Il constitue l'intersection des deux sphères de centres respectifs M_1 et N_1 et de rayon w avec la surface à mailler. De la même manière, un point quelconque $P_{(i,j)}$ constitue l'intersection des deux sphères de centres respectifs $P_{(i-1,j)}$ et $P_{(i,j-1)}$ et de rayon w avec la surface à mailler (figure 5). Ainsi, la partie considérée est maillée de proche en proche (figure 6). De la même façon, les trois autres parties de la surface peuvent être maillées.

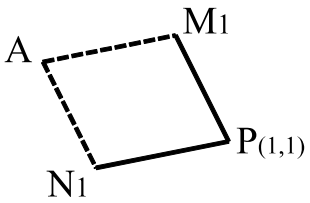

FIG. 4 – Détermination du point $P_{(1,1)}$

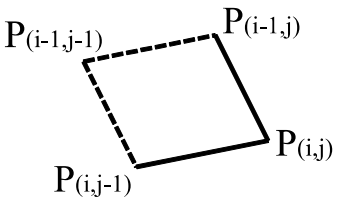

FIG. 5 – Détermination du point $P_{(i,j)}$

Ainsi pour pouvoir appliquer cette méthode sur une surface à équation cartésienne, les paramètres suivants, représentées sur la figure 7, doivent être connues :

- w : le pas de maillage.
- $A(x_A, y_A, z_A)$: le point d'intersection des deux directrices (D1) et (D2), considéré comme le point d'initiation du maillage.
- α_1 : l'angle que fait au point A la directrice (D1) avec la direction de l'axe des x (à droite de A).
- α_2 : l'angle que fait au point A la directrice (D1) avec la direction de l'axe des x (à gauche de A).
- β_1 : l'angle que fait au point A la directrice (D2) avec la direction de l'axe des x (en haut de A).
- β_2 : l'angle que fait au point A la directrice (D2) avec la direction de l'axe des x (en bas de A).
- γ_{1i}, γ_{2j}, ε_{1k} et ε_{2l} : les angles de variations des deux directrices (D1) et (D2).

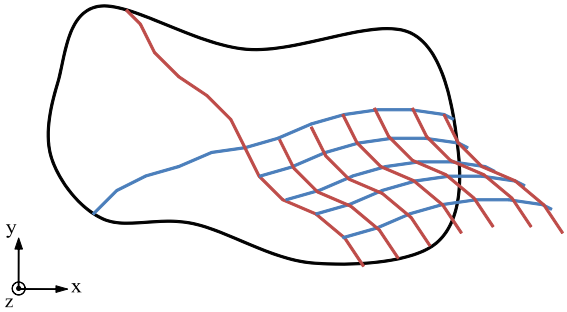

FIG. 6 – Maillage du proche en proche de la surface

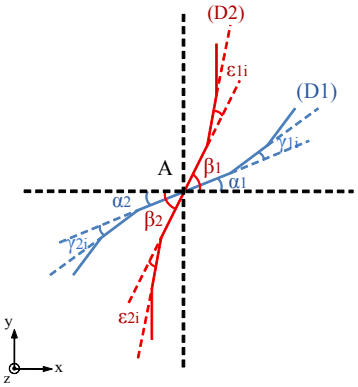

FIG. 7 – Nomenclature du maillage

La figure 8 représente quelques surfaces qui ont été maillées à l'aide de la méthode du compas. Le maillage a été fait en partant de deux directrices orthogonales. Les surfaces sont respectivement, de haut en bas, une surface à double courbure positive, l'ellipsoïde, une surface à double courbure négative, la première surface de Scherk, et une surface à double courbure positive et négative, le tore.

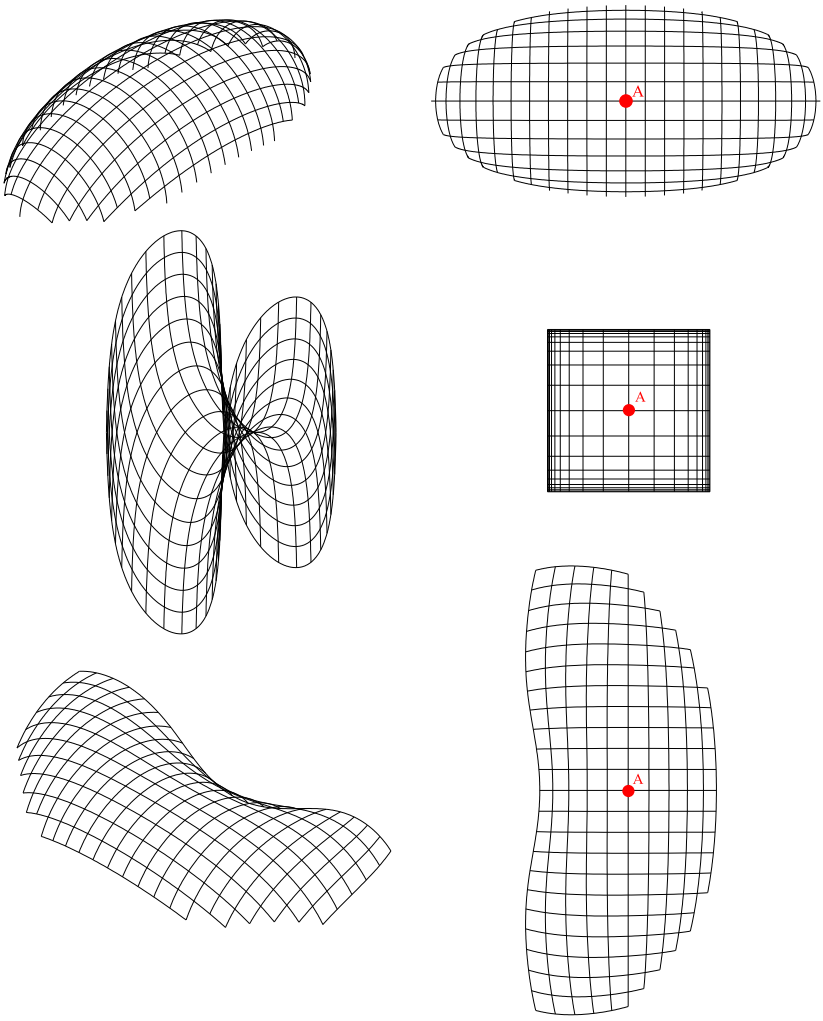

FIG. 8 – Maillage d'un ellipsoïde, de la première surface de Scherk et d'un tore à l'aide de la méthode du compas

Ainsi, en utilisant la méthode du compas, un gridshell peut être maillé sur de nombreuses formes imposées. Mais comment choisir les directions des barres ? L'idée développée dans la suite est d'essayer de minimiser les courbures et donc les contraintes dans la structure afin de ne pas rompre les barres lors de la phase de mise en forme.

3 Optimisation de la grille du gridshell : Couplage de la méthode du compas avec des algorithmes génétiques

Dans le but de minimiser les contraintes dans les barres dues à la mise en forme du gridshell maillé à l'aide de la méthode du compas, un outil d'optimisation est mis en œuvre dans ce paragraphe. Le problème se réduit à trouver le réseau de poutres ayant les plus faibles contraintes de flexion. Ce qui, en d'autres termes, revient à minimiser le maximum de courbure dans les barres. Ce maximum, difficile à être exprimé analytiquement, nous amène à s'orienter vers des algorithmes stochastiques de type algorithmes génétiques et non aux méthodes traditionnelles d'analyse numérique.

Les algorithmes génétiques (AGs) sont des algorithmes d'optimisation stochastiques basés sur les mécanismes de la génétique et de l'évolution naturelle comme la sélection, le croisement et la mutation. Ils ont été développés par John Holland depuis 1970 [3]. L'algorithme proposé est décrit dans ce qui suit. Il peut être résumé par le diagramme de la figure 9.

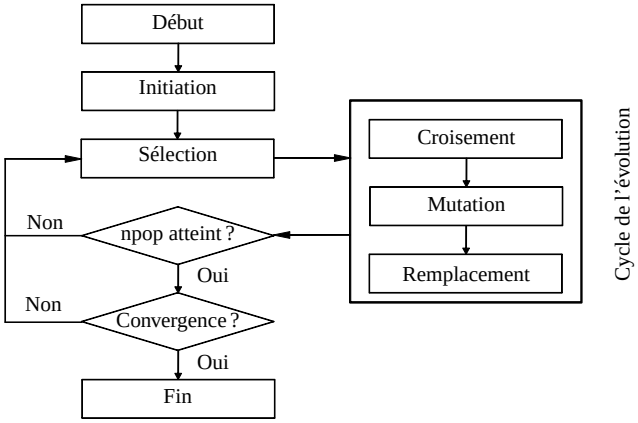

FIG. 9 – Diagramme des algorithmes génétiques

3.1 Algorithme d'optimisation proposé

L'algorithme proposé se basant sur les algorithmes génétiques se résume dans les étapes suivantes :

1. Génération aléatoire d'une population de *npop* individus :

   Pour appliquer les algorithmes génétiques au problème de maillage, le maillage doit être représenté sous la forme d'une chromosome. Un chromosome est défini comme étant une solution potentielle du problème. Il est choisi comme étant un groupe de gènes permettant de définir le maillage. Ces gènes présentent le point A, point d'intersection des deux directrices et tous les angles permettant de définir les deux directrices. A chaque fois qu'on tire un chromosome, il faut vérifier que la surface est maillée en entier et sans chauvechaument.

2. Évaluation de chaque individu :

   La fonction coût ou "fitness function" constitue la fonction d'évaluation du problème, une fonction à laquelle les chromosomes sont évalués et qui détermine s'ils survivent ou pas. On s'intéresse dans ce travail à minimiser les contraintes, et donc les courbures, dans les barres d'un gridshell. On cherche à mailler une forme par les barres les moins courbées. Pour cela on introduit comme fonction coût le maximum de courbure obtenu à la suite de maillage de la surface à l'aide de la méthode du compas par le chromosome considéré. Cette fonction coût pourrait être aussi la moyenne des courbures, ou bien par exemple la moyenne d'un certain pourcentage des valeurs maximales.

   Pour calculer la courbure, on considère une droite courbe représentée par trois points M_{i-1}, M_i et M_{i+1} comme illustré sur la figure 10. Le rayon de courbure R_i et la courbure C_i peuvent être calculés comme suit :

$$R_i = \frac{\|\overrightarrow{M_{i+1}M_{i-1}}\|}{2.sin\alpha} \quad et \quad C_i = \frac{1}{R_i} \tag{1}$$

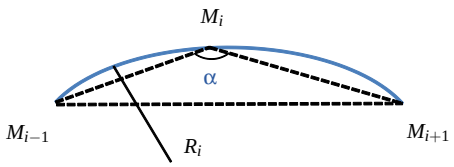

FIG. 10 – Courbure autour de trois points

A partir de chaque chromosome, un maillage peut être construit sur la surface considérée et les courbures, fournies par l'équation 1, peuvent être calculées en chaque point de la grille. La valeur du maximum de ses courbures est retenue et est considérée comme étant la fonction fitness du chromosome considéré.

3. Cycle d'évolution :
   (a) Sélection d'un couple de parents :
   Deux chromosomes "parents" sont tirés au hasard dans la population afin de produire deux chromosomes "enfants". Plusieurs méthodes de sélection des parents peuvent être utilisées. La sélection par tournoi "tournament paring" a été utilisée au cours de ce travail.
   A chaque fois que l'on veut sélectionner un individu "parent" de la population, on sélectionne un sous-ensemble de la population de taille *ncan* comportant *ncan* candidats pouvant être parent et on ne conserve que le meilleur de ce sous-ensemble.
   (b) Croisement des deux parents avec une probabilité de croisement p_c afin de générer deux enfants :
   Dans cette étape, deux chromosomes enfants sont obtenus à partir de deux chromosomes parents sélectionnés dans l'étape précédente. Le croisement uniforme est utilisé dans le cadre de ce travail. Un nombre aléatoire entre 0 et 1 est généré pour une paire de gènes des parents P1 et P2. Si ce nombre est inférieur à une probabilité de croisement p_c fixée, les gènes considérés ne sont pas changés. En revanche, si ce nombre est supérieur à p_c, les gènes sont échangés entre les chromosomes des deux parents.
   (c) Mutation des deux enfants avec une probabilité de mutation p_m :
   Une probabilité de mutation p_m entre 0 et 1 est initialement fixée. Pour chaque chromosome enfant, un nombre aléatoire est généré. Si ce nombre est inférieur à la probabilité de mutation, un gène du chromosome enfant est muté en un nombre aléatoire choisi dans l'intervalle dans lequel le gène est défini.
4. L'étape 3 est répétée jusqu'à ce que la nouvelle population contienne *npop* individus. A chaque fois, les deux chromosomes enfants sont classés parmi les autres de la population et les deux individus ayant les fonctions fitness les plus grandes sont éliminés.
5. Itérer à partir de l'étape 2 jusqu'à ce que l'algorithme converge :
   Lorsque la différence entre les meilleures valeurs de la fonction coût pour deux générations successives est assez petite, aucune amélioration n'a été effectuée en passant d'une génération à une autre. Ainsi la meilleure valeur de fitness de la génération actuelle est retenue comme solution pour le problème. Le problème de convergence peut s'écrire sous la forme :

$$\left| \frac{f_i - f_{i-1}}{f_i} \right| < \varepsilon \tag{2}$$

   où : f_i et f_{i-1} sont respectivement la valeur de la fonction fitness à la génération *i* et celle à la génération *i-1*, et ε est la tolérance de la convergence prise assez faible (de l'ordre de 1e-10). Cette condition est répétée plusieurs fois à la suite.

4 Exemples d'application

La procédure d'optimisation du maillage a été appliquée sur plusieurs surfaces. On considère dans un premier temps, une surface présentant des symétries, la demi-sphère, ensuite une surface à double bosse représentée sous la forme d'une surface à équation cartésienne sinusoïdale, enfin une surface réglée, le paraboloïde hyperbolique.

4.1 Une demi-sphère

Considérons une demi-sphère de de rayon 10 unités et de centre O(0,0,0) dont on cherche à optimiser le maillage obtenu par la méthode du compas avec un pas de maillage w valant deux unités. Une population initiale de 100 chromosomes est tirée aléatoirement. Chaque chromosome est formé de 50 gènes. La procédure d'optimisation décrite dans le paragraphe 3.1 est appliquée pour une probabilité de mutation de 0,01 et une probabilité de croisement de 0,5. Le point A, le point d'initiation du maillage est libre de se déplacer dans une zone délimité par les segments de droite $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ et $y = 2$. entre les deux directrices.

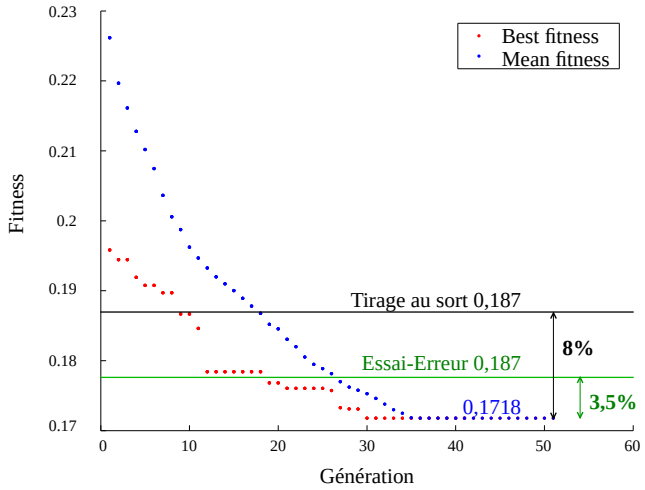

FIG. 11 – Fonction fitness en fonction du nombre de générations

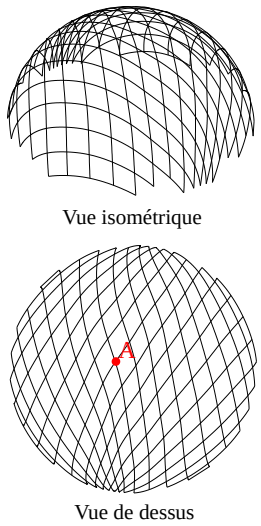

FIG. 12 – Maillage de la demi-sphère par le chromosome final

Une fois la convergence est vérifiée, on peut tracer le graphe de la figure 11 qui représente la fonction fitness moyenne de chaque génération et la plus petite de chaque génération en fonction du nombre de générations. La droite noire ayant pour équation y=0,187 représente la valeur minimale de la courbure maximale obtenue en effectuant un tirage au sort de 10000 chromosomes, alors que celle en vert ayant l'équation y=0,178 représente la valeur de C_{max} minimale que l'on peut obtenir par un calcul dit par essai-erreur, calcul suivant le bon sens de l'ingénieur. Cette valeur correspond à un angle de 70° entre les deux directrices.

La fonction fitness moyenne des 100 chromosomes de la première génération est de 0,2262m^{-1}, alors que celle du meilleur chromosome de la première génération est de 0,196m^{-1}. Au bout de 51 générations, la convergence est atteinte. La génération finale obtenue a une fonction fitness moyenne de l'ordre de 0,1718m^{-1}. Ainsi, en partant de 100 chromosomes, on réussit à obtenir un résultat qui est amélioré de 8% par rapport à un tirage au sort et de 3,5% par rapport à une méthode essai-erreur. Le chromosome retenu est celui donnant le maillage représenté sur la figure 12 et ayant une courbure maximale de $0,1718m^{-1}$.

Une étude a été faite en faisant varier le nombre de chromosomes de la population initiale entre 50 et 900 chromosomes. Il a été remarquable que plus on augmente le nombre de chromosomes, plus la fonction fitness du résultat devient petit. Ainsi, en partant de 900 chromosomes, on réussit à obtenir un résultat qui est 16,5% meilleur que par du tirage au sort et 12% par essai-erreur. Il a été remarquable aussi l'influence faible de la position du point A, le point d'initiation du maillage.

4.2 Une surface à double bosse

Une deuxième surface ayant une double courbure inverse et ne présentant pas de symétries est étudiée. Soit la surface à double bosse ayant une équation cartésienne sinusoïdale fournie par l'équation $z = 0,05.x.\sin(x) + \sin(y)$ pour $0 \leq x \leq 10$ et $0 \leq y \leq 4$ que l'on désire optimiser le maillage obtenu par la méthode du compas avec un pas de maillage égal à une unité.

La procédure d'optimisation décrite précédemment a été appliquée sur une population initiale de 100 chromosomes, une probabilité de mutation de 0,01 et une probabilité de croisement de 0,5. Le graphe

de la figure 13 représente la fonction fitness moyenne et la plus petite de chaque génération en fonction du nombre de générations. La droite noire ayant pour équation y=0,405 représente la valeur minimale de la courbure maximale obtenue en effectuant un tirage au sort de 10000 chromosomes, alors que celle en vert ayant l'équation y=0,467 représente la valeur de courbure C_{max} minimale que l'on peut atteindre par un calcul par essai-erreur.

La fonction fitness moyenne des 100 chromosomes de la première génération est de $0{,}7m^{-1}$, alors que celle du meilleur chromosome de la première génération est de $0{,}47m^{-1}$. La convergence est atteinte au bout de 41 générations. La génération finale obtenue a une fonction fitness moyenne de l'ordre de $0{,}378m^{-1}$. Ainsi, avec 100 chromosomes, le résultat obtenu est 7% meilleur que par tirage au sort et 19% par essai-erreur.

Le chromosome retenu est celui donnant le maillage de la figure 14 et ayant une courbure maximale de $0,378m^{-1}$. On remarque d'après la grille représentée, que l'orientation des barres vient chercher des moindres courbures et des angles faibles.

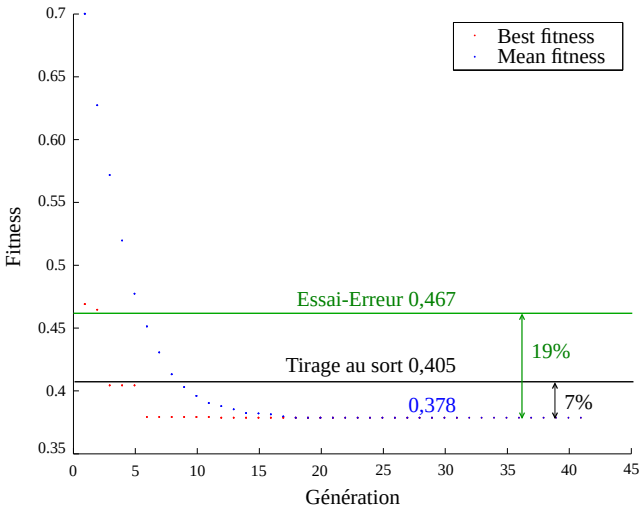

FIG. 13 – Fonction fitness en fonction du nombre de générations

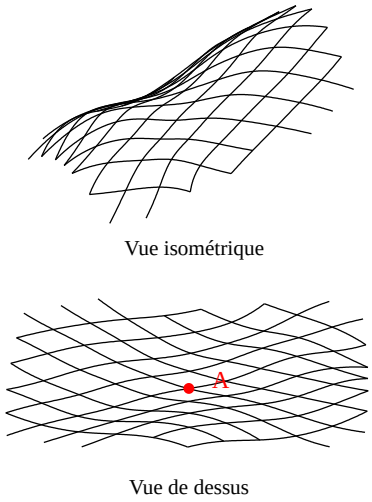

FIG. 14 – Maillage de la surface sinusoïdale par le chromosome final

Comme pour le cas de la demi-sphère, une étude de sensibilité sur le nombre de chromosomes de la population initiale a été effectuée en le faisant varier entre 100 et 700 chromosomes. Parmi les calculs réalisés, le calcul fait en partant de 700 chromosomes représente le calcul pour lequel la courbure maximale du maillage correspondant est la plus petite. Cette valeur est de 0,35905 m^{-1}. Ainsi, en partant de 700 chromosomes, le résultat est meilleur de 11,5% que par tirage au sort et 23% par essai-erreur.

4.3 Un paraboloïde hyperbolique

La troisième surface considérée est le paraboloïde hyperbolique représenté par l'équation $z = x^2 - y^2$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$. Le maillage est effectué par la méthode du compas avec un pas de maillage de 0,3 unité et en partant du point A(0,0,0).

Un paraboloïde hyperbolique peut être défini comme une surface réglée engendrée par des droites. Pour la surface considérée, les lignes de moindre courbure, qui sont des droites dans le cas d'un paraboloïde hyperbolique, sont tracées à 45° des paraboles la surface. Or la distance entre deux points pris chacun sur une des deux lignes de moindre courbure n'est pas constante. La méthode du compas, quand à elle, elle permet de construire un maillage régulier dont le pas est constant. Pour un maillage par la méthode du compas en direction des lignes de moindre courbure (angles de 45° et 135°), le maximum de courbure est calculé égal à $1,39m^{-1}$.

Pour appliquer la procédure d'optimisation par algorithmes génétiques dont les étapes sont décrites dans le paragraphe 3.1, une population de 700 chromosomes a été choisie. Chaque chromosome est formé de 50 gènes. Le nombre de chromosomes a été choisi à la suite des résultats de l'étude de la sensibilité du nombre de chromosomes sur la fonction fitness réalisée sur les deux exemples précédents.

Le graphe de la figure 15 représente la fonction fitness moyenne de chaque génération et celle la plus

petite de la génération en fonction du nombre de générations. La droite noire ayant pour équation y=1,24 représente la valeur minimale de la courbure maximale obtenue en effectuant un tirage au sort de 10000 chromosomes. La droite en vert ayant l'équation y=1,85 représente la valeur de C_{max} minimale que l'on peut atteindre par le calcul par essai-erreur, alors que celle en orange représente la courbure maximale du maillage à 45° et 135°.

En partant d'une valeur moyenne de la fonction fitness de la population initiale de $2m^{-1}$, la courbure moyenne de la génération finale est de $0,83m^{-1}$, faisant ainsi une amélioration significative de $58,5\%$. Cette valeur est fournie par le chromosome dont le maillage est représenté sur la figure 16. Le résultat obtenu en partant de 700 chromosomes est 33% meilleur que par tirage au sort, 55,2% par essai-erreur et 40,3% que le maillage à 45° et 135°.

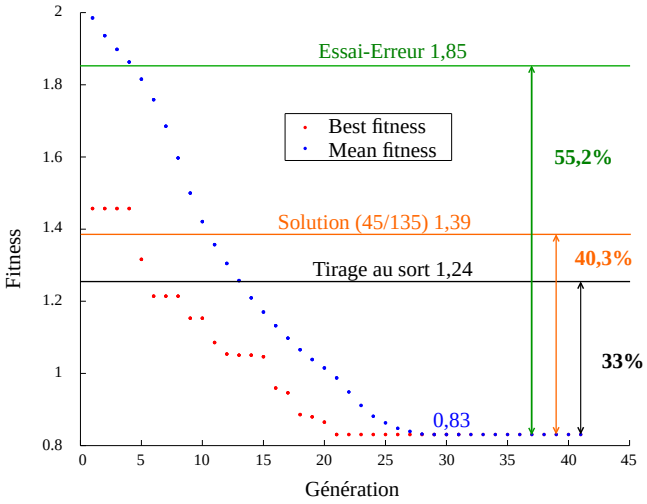

FIG. 15 – Fonction fitness en fonction du nombre de générations

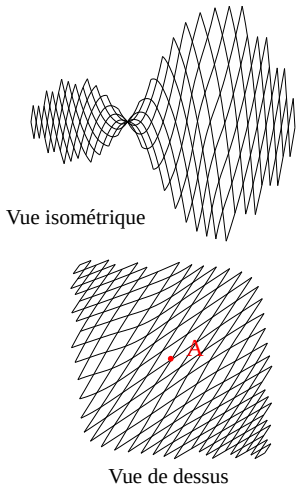

FIG. 16 – Maillage du paraboloïde hyperbolique par le chromosome final

5 Conclusions

Une méthodologie d'aide à la conception de structures dites gridshells a été proposée dans cet article. Elle permet de trouver le maillage d'un gridshell sur une forme proposée par un architecte ainsi que d'optimiser les orientations des barres dans le but de minimiser la courbure et donc les contraintes dans la structure lors de la mise en forme. Des exemples d'application, une demi-sphère et des surfaces à double courbure inverse, sont montrés. Dans le cas d'une forme simple présentant des symétries, comme la demi-sphère, des calculs par essai-erreur peuvent aboutir à des résultats qui ne sont pas loin des optimaux. Quand la surface devient plus complexe, le calcul par essai-erreur seul ne suffit pas pour prédire les orientations des barres aboutissant à des courbures faibles. L'algorithme proposé permet, quant à lui, d'optimiser ses courbures sur des surfaces complexes. L'optimisation est faite sur la fonction fitness considérée dans ce travail comme étant la courbure maximale dans les barres du maillage obtenu. Des changements peuvent être faite sur cette fonction fitness et cela selon les contraintes structurales et architecturales.

Références

[1] L. Bouhaya, *Optimisation structurelle des gridshells*, thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2010.

[2] C. Douthe, J.F.Caron, O. Baverel. *Gridshell structures in glass fibre reinforced polymers*, Construction and building materials, 24, 1580-1589, 2010.

[3] J.H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*, The university of Michigan press, 1975.

[4] F. Otto. *IL10 Gitterschalen*, Institut für leichte Flächentragwerke (IL), 1974.