

# Multistabilité de coques orthotropes : modèles réduits à courbure uniforme et validation numérique aux éléments finis

C. Maurini<sup>1,2</sup>, A. Vincenti<sup>1,2</sup>, S. Vidoli<sup>3</sup>, V. Papetti<sup>3</sup>

<sup>1</sup>UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert

4 place Jussieu, Case 161, F-75252 Paris CEDEX 05, France, {boris.desmorat,angela.vincenti}@upmc.fr

<sup>2</sup>CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert

4 place Jussieu, Case 161, F-75252 Paris CEDEX 05, France

<sup>3</sup>Univ. Roma La Sapienza, Dip. Ingegneria Strutturale e Geotecnica, via Eudossiana 18, 00184 Rome, Italie

---

**Résumé** — Une coque mince orthotrope peut exhiber plusieurs configurations d'équilibre stable en fonction des paramètres sa géométrie, ses propriétés matériau et soumise à des champs de déformations anélastiques, telles qu'induites par effet thermique ou piézoélectrique. Dans ce travail, on détermine les régions de bi- et tri-stabilité par une approche basée sur un modèle réduit de Von Kármán à courbure uniforme et on montre la validité des résultats obtenus en réalisant des simulations non linéaires en utilisant le code Abaqus.

**Mots clefs** — Structures de forme adaptable, Stabilité, Théorie non linéaire des plaques.

---

## 1 Introduction

Dans les structures minces, les effets géométriques peuvent induire des phénomènes non linéaires qui donnent lieu à l'existence de plusieurs configurations d'équilibre stable. Ces propriétés de structures sont très intéressantes pour la conception de structures multi-stables, qui peuvent adapter leur forme à différents régimes de fonctionnement.

## 2 Modèle de Von-Karman à courbure uniforme

Dans le cadre de la théorie non linéaire de Föppl-Von Kármán [1] appliquée au cas d'une coque mince, les équilibres stables peuvent être déterminés en minimisant l'énergie totale  $\mathcal{U}(u, w)$ , où  $u$  et  $w$  sont les déplacements dans le plan moyen de la coque et transversal à ce plan, respectivement. Sous l'hypothèse de courbures uniformes, on donne une expression adimensionnelle de l'énergie totale  $U(K)$  en fonction de la courbure adimensionnelle  $K$  [2] ( $K$  est ici représentée par une matrice  $2 \times 2$ ) :

$$U(K) = \frac{1}{2} D (K - H_0 - H_i) \cdot (K - H_0 - H_i) + \frac{1}{2} (\det K - \det H_0)^2 \quad (1)$$

où  $D$  est la rigidité adimensionnelle en flexion, considérée généralement orthotrope et constante pour la structure ;  $H_0$  et  $H_i$  sont les matrices  $2 \times 2$  représentant respectivement la courbure adimensionnelle initiale de la coque et la courbure adimensionnelle anélastique (par exemple, d'origine thermique ou produite par un effet piézoélectrique), aussi considérées constantes sur toute la structure comme la courbure  $K$ . Le choix des paramètres adimensionnels sera discuté dans le détail dans l'article.

On pourra utiliser l'acronyme UCVK (Uniform Curvature Von Kármán) dans la suite pour faire référence à ce modèle. Un tel choix de paramètres et de modélisation permet un examen complet des équilibres d'un point de vue analytique. Par simplicité, la discussion analytique sera illustrée dans le cas où les courbures  $H_0$  et  $H_i$  peuvent être chacune représentée par un seul paramètre, c'est-à-dire :

$$H_{0x} = H_{0y} = h_0 \quad \text{et} : \quad H_{ix} = H_{iy} = h_i, \quad \text{étant} : H_{0xy} = H_{ixy} = 0. \quad (2)$$

Dans le cas d'un matériau constitutif isotrope, ce choix correspond à une coque initialement sphérique soumise à une courbure anélastique sphérique. Ce modèle a déjà été appliqué avec succès à l'étude de stabilité de plaques orthotropes soumises à des effets de courbure anélastique (chargement thermique ou piézoélectrique) [2]. Dans ce travail, on montre que, malgré sa simplicité, la condition (2) a permis de valider les modèles UCVK pour le cas de coques orthotropes minces, même possédant une courbure initiale relativement grande.

Les résultats de la discussion analytique, que l'on présentera dans le détail, peuvent être résumés dans le diagramme de stabilité illustré en Figure 1.

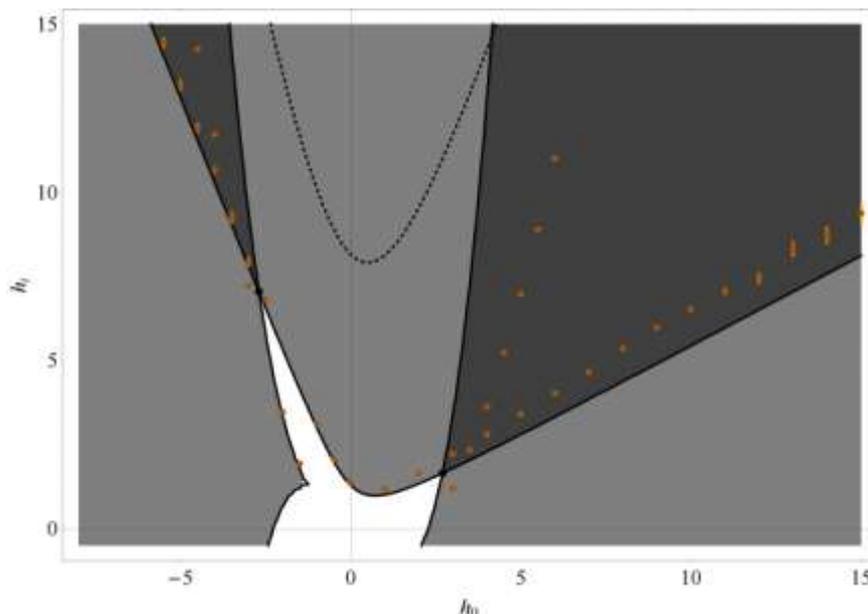


FIG. 1 – Diagramme de stabilité : modèle de Von Kármán à courbure uniforme et validation EF

Dans le diagramme de Figure 1, on montre les régions de stabilité d'une coque en fonction de son paramètre de courbure initiale  $h_0$ , représenté en abscisses. Pour une coque de forme  $h_0$  donnée, on applique la courbure inélastique, représentée par le paramètre  $h_i$  en ordonnées et on calcule le nombre de configurations d'équilibre stable existantes. La région blanche dans la Figure 1 indique la zone de mono-stabilité (une seule configuration existante d'équilibre stable), alors que les régions en gris clair représentent les zones de bi-stabilité. Finalement, on a pu mettre en évidence l'existence de zones de tri-stabilité (trois configurations distinctes d'équilibre stable), représentées en gris foncé dans le diagramme de Figure 1. Dans l'article, on donnera une explication détaillée des phénomènes de bifurcation et perte de stabilité associés au passage d'une région à l'autre de ce diagramme, que l'on peut interpréter grâce au modèle UCVK que l'on a adopté.

### 3 Validation numérique aux éléments finis

En tenant compte des simplifications introduites dans l'étude du modèle UCVK, un doute pouvait subsister quant à la validité de ce modèle et des résultats déduits dans le cadre de l'étude de stabilité, spécialement dans le cas de coques avec des courbures assez importantes. On a donc réalisé une validation par des calculs aux éléments finis en utilisant le code Abaqus (calculs non linéaires en grands déplacements), l'hypothèse de courbure uniforme étant donc relâchée. Les résultats de ces calculs ont permis de montrer que cette hypothèse n'est pas trop réductrice et la forme du diagramme de stabilité a été confirmée : les points de bifurcation et de perte de stabilité correspondant au passage d'une région à l'autre du diagramme de Figure 1 ont été déterminés numériquement (points ronds en Figure 1). Notamment, l'existence de régions de tri-stabilité a été confirmée. Une discussion plus détaillée du modèle éléments finis utilisé et des résultats obtenus sera donnée dans l'article.

### Références

- [1] E. H. Mansfield. *The bending and stretching of plates*, Cambridge University Press, 1989.
- [2] A. Fernandes, C. Maurini, S. Vidoli. *Multiparameter actuation for shape control of bistable composite plates*. Proceedings of the Royal Society A-Mathetical Physical and Engineering Sciences, vol. 464, pages 2949-2966, 2009.