



**HAL**  
open science

## Multistabilité de coques orthotropes : modèles réduits à courbure uniforme et validation numérique aux éléments finis

Corrado Maurini, Angela Vincenti, Stefano Vidoli, Valerio Papetti

### ► To cite this version:

Corrado Maurini, Angela Vincenti, Stefano Vidoli, Valerio Papetti. Multistabilité de coques orthotropes : modèles réduits à courbure uniforme et validation numérique aux éléments finis. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592957

**HAL Id: hal-00592957**

**<https://hal.science/hal-00592957>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Multistabilité de coques orthotropes : modèles réduits à courbure uniforme et validation numérique aux éléments finis

C. Maurini<sup>1,2</sup>, A. Vincenti<sup>1,2</sup>, S. Vidoli<sup>3</sup>, V. Papetti<sup>3</sup>

<sup>1</sup> UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert 4 place Jussieu, Case 161, F-75252 Paris cedex 05, France, (corrado.maurini,angela.vincenti)@upmc.fr

<sup>2</sup> CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert 4 place Jussieu, Case 161, F-75252 Paris cedex 05, France

<sup>3</sup> Univ. Roma La Sapienza, Dip. Ingegneria Strutturale e Geotecnica, via Eudossiana 18, 00184 Rome, Italie

**Résumé** — Une coque mince orthotrope peut exhiber plusieurs configurations d'équilibre stable en fonction des paramètres tels que sa géométrie, ses propriétés matériau et quand elle est soumise à des champs de déformations anélastiques, telles qu'induites par effet thermique ou piézoélectrique. Dans ce travail, on détermine les régions de bi- et tri-stabilité par une approche basée sur un modèle réduit de Von Kármán à courbure uniforme et on montre la validité des résultats obtenus en réalisant des simulations non linéaires en utilisant le code Abaqus.

**Mots clés** — Structures de forme adaptable, Stabilité, Théorie non linéaire des plaques.

## 1 Introduction

Dans les structures minces, les effets géométriques peuvent induire des phénomènes non linéaires qui donnent lieu à l'existence de plusieurs configurations d'équilibre stable. Ces propriétés de structures sont très intéressantes pour la conception de structures multi-stables, qui peuvent adapter leur forme à différents régimes de fonctionnement.

Des structures minces telles que les plaques et les coques sont des bons candidats pour des applications dans des structures adaptatives, c'est-à-dire capables de changer leur forme selon divers régimes fonctionnels. Dans le cas de plaques et coques, le phénomène de multistabilité est lié au couplage existant entre la courbure Gaussienne et la déformation de membrane.

Des travaux précédents ([1], [2], [3]) montrent que des coques orthotropes peu profondes peuvent posséder jusqu'à trois configurations distinctes d'équilibre stable caractérisées par une courbure presque uniforme. Ce comportement est rencontré pour certaines valeurs des paramètres de géométrie (courbure initiale) et des propriétés matériaux (forme d'orthotropie).

Le phénomène de multistabilité de coques minces peu profondes peu être aussi induit par la combinaison de paramètres géométriques et matériau avec des déformations inélastiques, qui peuvent être appliquées par effet thermo-élastique et/ou piézo-élastique. Ces effets peuvent être exploités comme moyens d'actionnement et contrôle de forme des structures multistables.

Dans ce travail, on explore les régions de bi- et tri-stabilité de coques minces par une approche basée sur un modèle réduit de Von Kármán à courbure uniforme.

La validation de ce modèle simplifié est nécessaire pour en établir les limites : on a réalisé des calculs aux éléments finis sous Abaqus en régime non linéaire de grands déplacements, qui sont affranchis des hypothèses de courbure uniforme et qui montrent la bonne validité des résultats analytiques basés sur le modèle réduit.

## 2 Formulation du modèle

### 2.1 Cynématique de Föppl-Von Kármán

On considère une configuration plate comme configuration de référence pour la coque, décrite par un domaine bi-dimensionnel  $S$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Soit  $u = (u_x, u_y)$  et  $w$  respectivement les champs de déplacements dans le plan et transverse. Dans les modèles de plaques sans cisaillement, les

déformations sont alors représentées par deux tenseurs symétriques  $2 \times 2$ , la déformation membranaire  $e$  et la courbure  $k$ . Selon la cinématique de Von Kármán, les relations de compatibilité entre déformations et déplacements s'écrivent [4] :

$$e(u, w) = \text{sym}(\text{grad } u) + \frac{\text{grad } w \otimes \text{grad } w}{2}, \quad k(w) = \text{grad grad } w, \quad (1)$$

où  $\text{grad}$  représente l'opérateur gradient en  $\mathcal{S}$ ,  $\text{sym}(M)$  la partie symétrique d'une matrice carrée  $M$  et  $(v_1 \otimes v_2) v_3 := (v_2 \cdot v_3) v_1$ . La déformation plane inclut la contribution au second ordre du déplacement transverse, qui est la source de non-linéarité. On en déduit que les conditions de compatibilité pour la cinématique de Föppl-Von Kármán kinematics (1) équivalent au Théorème Egrégium de Gauss linéarisé autour de la configuration plane :

$$\text{rot rot } e := \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = k_x k_y - k_{xy}^2 = \det k, \quad (2)$$

où  $\det k$  est la courbure Gaussienne de la coque et  $\text{rot}$  l'opérateur rotationnel en  $\mathcal{S}$ . La condition de compatibilité (2) entre déformation plane  $e$  et courbure  $k$  exprime le couplage entre extension dans le plan et courbure Gaussienne. Particulièrement, cela montre que tout changement de courbure Gaussienne implique une déformation plane non uniforme.

Les équilibres stables du modèle de Föppl-von Karman peuvent être déterminés comme les minima locaux de l'énergie totale  $\mathcal{U}(u, w)$ , qui est une forme quadratique des déformations membranaires et de flexion :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(u, w) = & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \bar{A} (e - f) \cdot (e - f) d\bar{S} + \int_{\mathcal{S}} \bar{B}^T (e - f) \cdot (k - h) d\bar{S} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \bar{D} (k - h) \cdot (k - h) d\bar{S} \end{aligned} \quad (3)$$

où  $e$  et  $k$  sont donnés par (1),  $d\bar{S}$  est l'élément de surface,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ , et  $\bar{D}$  sont respectivement les matrices de rigidité dans le plan, de couplage membrane-flexion et la rigidité de flexion. Les symboles sont couramment utilisés dans la littérature sur les plaques composites [5]. En particulier, on décompose les champs de tenseurs  $f$  et  $h$  en deux contributions distinctes, soit :

$$f = f_0 + f_i, \quad h = h_0 + h_i, \quad \text{tel que} \quad \text{rot rot } f_0 = \det h_0 \quad (4)$$

Donc,  $f_0$  et  $h_0$  définissent la forme de la configuration naturelle libre de contraintes quand  $f_i = 0$  et  $h_i = 0$ , alors que  $f_i$  et  $h_i$  décrivent les déformations inélastiques, telles que celles associées aux effets plastiques ou thermo-élastiques, ou à la présence de matériaux actifs, comme des patchs piézo-électriques.

L'énergie (3) peut toujours être transformée en :

$$\tilde{\mathcal{U}}(u, w) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} (\bar{A}^{-1} \sigma \cdot \sigma) d\bar{S} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \tilde{D} (k - h) \cdot (k - h) d\bar{S}, \quad (5)$$

où l'on a défini  $\tilde{D} := \bar{D} - \bar{B}^T \bar{A}^{-1} \bar{B}$  et les contraintes de membrane :

$$\sigma := \bar{A}(e - f) + \bar{B}(k - h). \quad (6)$$

On peut aussi remarquer que dans (5)  $\sigma$  ne dépend pas du déplacement transverse  $w$  à travers la déformation de membrane  $e$ .

## 2.2 Résolution du problème membranal

La condition de stationnarité de (5) par rapport à  $u$  donne les équations d'équilibre du problème plan :

$$\text{div } \sigma = 0 \quad \text{sur } \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \sigma n = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}, \quad (7)$$

où  $n$  est la normal au contour  $\partial \mathcal{S}$ , que l'on considère libre. La relation de compatibilité peut être utilisée pour résoudre univoquement le problème statiquement indéterminé (7) en fonction de  $\sigma$ . Pour cela, on

résout (6) en fonction de  $e$ , on remplace dans (2) et, en tenant compte de la linéarité de l'opérateur rot, on obtient :

$$\text{rot rot}(\bar{A}^{-1}\sigma) = \det k - \det h_0 - \text{rot rot} [f_i - \bar{A}^{-1}\bar{B}(k-h)], \quad \text{sur } \mathcal{S}. \quad (8)$$

Les équations (7) et (8) compose un problème standard d'élasticité linéaire, où le terme de force est donné par un champ de pré-contraintes  $\sigma_0$  tel que  $\text{rot rot}(\bar{A}^{-1}\sigma_0)$  soit égal au deuxième membre de (8) dans  $\mathcal{S}$ . Donc, la solution du problème linéaire elliptique (7), (8) permet d'exprimer l'énergie membranaire en termes de  $k$  et, en conséquence, de réduire le fonctionnel de l'énergie élastique à une simple fonction de la courbure seule. Ce passage est essentiel pour déduire une approximation discrète du modèle de Föppl-Von Kármán.

On introduit les quantités adimensionnelles :

$$K = R_0 k, \quad H = R_0 h, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \Sigma = \frac{\sigma}{\bar{A}_{11}}, \quad D = \frac{\bar{D}}{\bar{D}_{11}}, \quad U = \frac{R_0^2 \mathcal{U}}{\bar{S} \bar{D}_{11}}, \quad (9)$$

où  $R_0$  est un rayon caractéristique utilisé pour adimensionnaliser les courbures et  $L := \sqrt{\bar{S}}$ , étant  $\bar{S}$  l'aire de  $\mathcal{S}$ . Une fois résolu (7)-(8), on aura donc à minimiser :

$$U(K) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} D (K-H) \cdot (K-H) dS + E(K; H, F_i), \quad (10)$$

où

$$E(K; H, F_i) := \frac{\eta^2}{2} \int_{\mathcal{S}} [A^{-1} \Sigma(K, H, F_i) \cdot \Sigma(K, H, F_i)] dS, \quad (11)$$

et  $A := \bar{A}/\bar{A}_{11}$ . L'énergie élastique  $E$  représente l'énergie membranaire en fonction des courbures et elle est en fait la seule source des non linéarités du modèle. Le paramètre  $\eta$  contrôle le rapport entre rigidités membranaire et de flexion ; il peut être exprimé en termes d'une épaisseur équivalente de la coque comme il suit :

$$\eta := \frac{\bar{A}_{11} R_0^2}{\bar{D}_{11}} \equiv \frac{\sqrt{12} R_0}{t_{eq}}, \quad t_{eq} := \sqrt{\frac{12 \bar{D}_{11}}{\bar{A}_{11}}}. \quad (12)$$

Pour le cas de coques homogènes, l'épaisseur équivalente coïncide avec l'épaisseur réelle de la coque. Les hypothèses (9) réduisent le problème elliptique (7)-(8), qui doit être résolu afin de déterminer les contraintes membranaires  $\Sigma$ , à la forme adimensionnée suivante :

$$\begin{aligned} \text{div } \Sigma &= 0, \quad \text{sur } \mathcal{S}, & \Sigma n &= 0, \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}, \\ \text{rot rot}(A^{-1}\Sigma) &= \det K - \det H_0 - \text{rot rot} [F_i - A^{-1}B(K-H)], \quad \text{sur } \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3 Les cas de courbure Gaussienne uniforme et de courbure uniforme

On adoptera les hypothèses suivantes i)  $\det K$  et  $\det H_0$  sont constants sur tout le domaine  $\mathcal{S}$  et ii) la fonction  $[F_i - A^{-1}B(K-H)]$  est, au plus, une fonction affine des coordonnées  $X - Y$ . Donc, il sera nécessaire de résoudre seulement un problème elliptique sur  $\mathcal{S}$ . Alors, ayant résolu :

$$\begin{aligned} \text{div } T &= 0, \quad \text{sur } \mathcal{S}, & T n &= 0, \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}, \\ \text{rot rot}(A^{-1}T) &= 1, \quad \text{sur } \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (14)$$

pour la linéarité, on obtient :

$$\Sigma = T(X, Y) (\det K - \det H_0), \quad E = \frac{\eta^2 \Phi^2}{2} (\det K - \det H_0)^2, \quad \Phi^2 := \int_{\mathcal{S}} (A^{-1} T \cdot T) dS. \quad (15)$$

L'énergie élastique totale de la coque s'écrit alors :

$$U(K) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} D (K - H_0 - H_i) \cdot (K - H_0 - H_i) dS + \frac{\eta^2 \Phi^2}{2} (\det K - \det H_0)^2, \quad (16)$$

Si on considère en plus que la rigidité de flexion  $D$  est uniforme sur la coque, ainsi que les composantes du champ de courbure  $K$ , le fonctionnel (16) peut se simplifier ultérieurement en :

$$U(K) = \frac{1}{2} D(K - H_0 - H_i) \cdot (K - H_0 - H_i) + \frac{1}{2} (\det K - \det H_0)^2, \quad (17)$$

où le rayon caractéristique  $R_0$  est choisi de telle manière à avoir  $\eta \Phi = 1$ , d'où  $R_0 = t_{eq} / (2\sqrt{3}\Phi)$ .

Le fonctionnel de l'énergie (17) a été utilisé dans [3], où en considérant  $H_i = 0$ , pour démontrer le comportement tristable de coques orthotropes, et dans [6], en considérant  $H_0 = 0$ , pour étudier les transitions réversibles entre configurations distinctes d'équilibre de plaques orthotropes bistables.

Si les courbures  $K$  (resp.  $H_0$  et  $H_i$ ) sont ordonnées selon la notation de Voigt :  $K = \{K_x, K_y, 2K_{xy}\}$ , la rigidité de flexion d'une coque orthotrope peut s'écrire :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \rho(1 - \nu^2/\beta) \end{pmatrix}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \nu < \beta^2, \quad \rho > 0. \quad (18)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\beta := Y_2/Y_1$  le rapport entre les modules d'Young dans les axes d'orthotropie et  $\rho$  le module de cisaillement. Dans ce cas, on peut toujours choisir une adimensionnalisation des courbures qui réduit (17) au même cas que celui d'un matériau isotrope ( $\beta = 1$ , see also [6]). Donc, si

$$(K_x, H_x) \rightarrow (K_x, H_x) \sqrt{\beta}, \quad (K_y, H_y) \rightarrow (K_y, H_y), \quad (K_{xy}, H_{xy}) \rightarrow (K_{xy}, H_{xy}) \sqrt[4]{\beta}, \quad (19)$$

alors  $U \rightarrow U/\beta$  où

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad -1 < \mu < 1, \quad \gamma > 0. \quad (20)$$

Finalement,  $\mu := \nu/\sqrt{\beta}$  et  $\gamma := \rho(1 - \nu^2/\beta)/\sqrt{\beta}$  sont les seuls paramètres constitutifs qui ont une influence sur la stabilité de coques de Föppl-Von Kármán à courbure uniforme.

### 3 Le cas de $H_0$ et $H_i$ sphériques

Le rôle associé à  $H_0$  et  $H_i$  est évident en analysant l'équation (17). D'abord, on suppose  $H_i = 0$ ; on voit facilement que  $K = H_0$  est un minimum global de l'énergie élastique, pour lequel sont nuls les moments de flexion ainsi que les contraintes de membrane. En fait, les contraintes de membrane  $\Sigma$  sont proportionnelles à  $(\det K - \det H_0) \equiv 0$ , alors que pour les moments de flexion  $M$  on a :

$$M := \frac{\partial U}{\partial K} = D(K - H) + \frac{\partial \det K}{\partial K} (\det K - \det H_0) \equiv 0.$$

Donc la matrice symétrique  $2 \times 2$   $H_0$  décrit la configuration naturelle libre d'effort de la coque.

Alternativement, on suppose  $H_i \neq 0$ ; la configuration  $K = H_0$  n'est plus un minimum pour l'énergie, et elle n'est plus libre d'effort. Alors, la matrice symétrique  $2 \times 2$   $H_i$  décrit les effets des courbures inélastiques.

Pour simplicité, mais sans enlever à la généralité du raisonnement, on considère ici le cas où les courbures  $H_0$  et  $H_i$  sont décrits par un seul paramètres chacune, c'est-à-dire :

$$H_{0x} = H_{0y} = c_0, \quad H_{ix} = H_{iy} = c_i, \quad H_{0xy} = H_{ixy} = 0. \quad (21)$$

Pour les matériaux isotropes ( $\beta = 1$ ), cela correspond à des configurations initiales sphériques pour la coque, ainsi qu'à des courbures inélastiques sphériques. Malgré ces simplifications, l'hypothèse (21) est utile afin de tester la validité des modèles de Föppl-Von Kármán à courbure uniforme quand on augmente la courbure initiale.

### 3.1 Equilibres et stabilité

Dans le cas (21), les équations d'équilibre pour le fonctionnel (17) en appliquant l'adimensionnalisation (19) sont :

$$\begin{aligned}\partial U / \partial K_x &= K_x + \mu K_y - c_0^2 K_y + K_x K_y^2 - K_{xy}^2 K_y - (c_i + c_0)(\mu + 1) = 0, \\ \partial U / \partial K_y &= \mu K_x + K_y - c_0^2 K_x - K_x K_{xy}^2 + K_x^2 K_y - (c_i - c_0)(\mu + 1) = 0, \\ \partial U / \partial K_{xy} &= K_{xy} (c_0^2 - K_x K_y + K_{xy}^2 + 2\gamma) = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Par somme et soustraction des deux premières équations et en rappelant que  $(\det K = K_x K_y - K_{xy}^2)$  dans la troisième équation, on obtient :

$$\begin{aligned}(K_x - K_y) (\det K - c_0^2 + \mu - 1) &= 0, \\ (\det K + \mu + 1)\Delta - c_0^2 \Delta - 2(c_i + c_0)(\mu + 1) &= 0, \\ K_{xy} (\det K - c_0^2 - 2\gamma) &= 0,\end{aligned}\quad (23)$$

où  $\Delta := \sqrt{4\det K + 4K_{xy}^2 + (K_x - K_y)^2}$ . En correspondance, le déterminant de la matrice Hessienne est donné par :

$$\begin{aligned}M_s := \frac{\partial^2 U}{\partial K^2} &= (c_0^2 - K_x K_y + 3K_{xy}^2 + 2\gamma) \left( (K_x^2 + 1)(K_y^2 + 1) - (c_0^2 - 2K_x K_y + K_{xy}^2 - \mu)^2 \right) + \\ &\quad - 2K_x K_{xy}^2 (K_y (c_0^2 + K_{xy}^2 - \mu) - K_x K_{xy}^2 + K_x) + \\ &\quad - 2K_y K_{xy}^2 (K_x (c_0^2 - K_x K_y + K_{xy}^2 - \mu) + K_y).\end{aligned}\quad (24)$$

On remarque que  $M_s$ , et donc les propriétés de stabilité des coques de Von Kármán à courbure uniforme, ne dépendent pas de  $H_i$ . Quand  $M_s$  est nul, au moins l'une des configurations d'équilibre perd de stabilité ; donc, on peut utiliser l'équation  $M_s = 0$  afin de tracer les frontières entre diverses régions de stabilité.

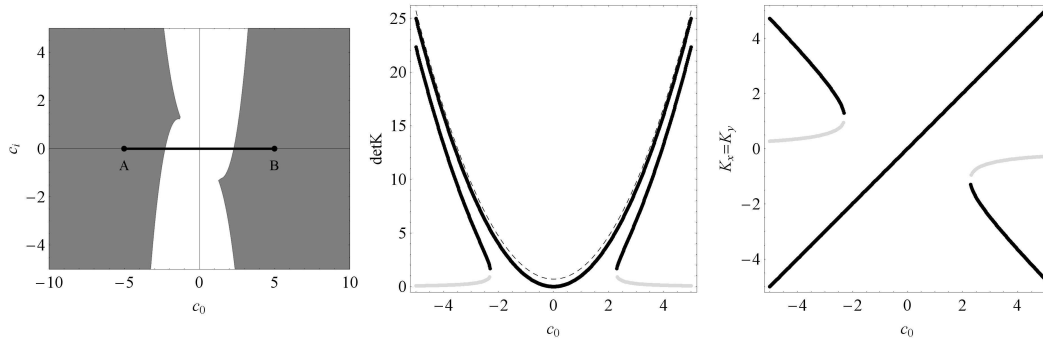


FIGURE 1 – Stabilité des équilibres de type I : a) Région  $R_I > 0$  en gris ; b) courbure Gaussienne le long du chemin A-B (en noir : stable, en gris : instable) ; c) Courbures dans les axes le long du chemin A-B (en noir : stable, en gris : instable)

Des équations  $(23)_1$  et  $(23)_3$  on peut voir que quatre types différents d'équilibres peuvent exister, que l'on discutera ci-dessous.

1.  $K_x = K_y$  et  $K_{xy} = 0$ . Ces équilibres "sans torsion" correspondent à des configurations sphériques quand  $\beta = 1$  : puisque dans  $(23)_2$  l'équation à résoudre est un polynôme de troisième degré en  $K_y$ , ces équilibres peuvent être un seul ou trois. En utilisant (24) et en ayant défini :

$$R_I := 4c_0^6 - 54c_0c_i(\mu + 1)^2 - (\mu + 1)^2 (27c_i^2 + 4\mu + 4) - 12c_0^4(\mu + 1) - 15c_0^2(\mu + 1)^2 \quad (25)$$

on peut voir facilement que dans la région  $R_I < 0$  il existe seulement un équilibre stable. Au contraire, quand  $R_I > 0$  il existe trois équilibres dont deux seulement sont stables : sur la frontière  $R_I = 0$  l'un des équilibres perd de stabilité (voir Figure 1).

2.  $\det K = c_0^2 + 1 - \mu > 0$  et  $K_{xy} = 0$ . Ces équilibres correspondent à des configurations "sans torsion" avec une courbure Gaussienne positive. De nouveau, en utilisant la frontière de stabilité (24) et en ayant défini :

$$R_{II} := (\mu(c_i + c_0) + c_i - c_0)(\mu(c_i + c_0) + c_i + 3c_0) + 4(\mu - 1) \quad (26)$$

on peut voir facilement que ces équilibres sont stables si  $R_{II} > 0$ . Ils sont originés à partir d'équilibres de type I et par bifurcation au passage de la frontière  $R_{II} = 0$  (voir Figure 2).

3.  $K_x = K_y$  et  $\det K = c_0^2 + 2\gamma$ . Ces équilibres correspondent à des configurations "avec torsion" à courbure Gaussienne fixée. Cependant, on peut voir facilement que ces équilibres sont stables seulement si  $0 < \gamma < (1 - \mu)/2 \leq 1$ , c'est-à-dire pour des coques non isotropes avec une rigidité de cisaillement peu élevée.
4.  $\det K = c_0^2 + 1 - \mu \equiv c_0^2 + 2\gamma$ . Ces équilibres sont possibles seulement si  $2\gamma = 1 - \mu$ , c'est-à-dire pour les coques isotropes. Les configurations correspondantes sont à courbures Gaussienne fixée ; cependant, puisque la condition sur  $\det K$  permet de résoudre deux sur les trois équations d'équilibre, la composante de torsion  $K_{xy}$  et la différence  $(K_x - K_y)$  peuvent être choisies arbitrairement pourvu que :

$$4K_{xy}^2 + (K_x - K_y)^2 = (c_i + c_0)^2(\mu + 1)^2 - 4(c_0^2 + 1 - \mu). \quad (27)$$

Le marge de stabilité associé est évanescant ; donc la coque se comporte comme un mécanisme à rigidité nulle. Un résultat similaire a été trouvé récemment pour des coques cylindriques [7].

On peut remarquer que les frontières  $R_I = 0$  et  $R_{II} = 0$  s'intersectent sur les points :

$$c_0 = \pm\sqrt{\mu+7}, \quad c_i = \mp\sqrt{\mu+7} - \frac{4\sqrt{2}}{\mu+1}. \quad (28)$$

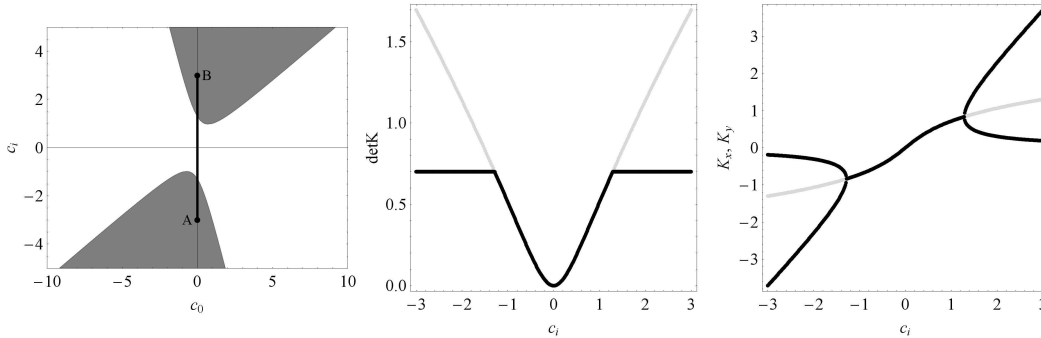


FIGURE 2 – Stabilité d'équilibres de type II : a) Région  $R_{II} > 0$  en gris ; b) courbure Gaussienne le long du chemin A-B (en noir : stable, en gris : instable) ; c) courbures dans les axes le long du chemin A-B (en noir : stable, en gris : instable)

Dans la suite, on considère une coque orthotrope pour laquelle  $\beta < 1$  et  $\gamma \neq (1 - \mu)/2$ ,  $\gamma > 1$ . Dans ce cas, on peut seulement avoir des équilibres de type I et II.

## 4 Etude de la stabilité : modèle analytique et validation éléments finis

### 4.1 Diagramme de stabilité analytique : modèle réduit à courbure uniforme

En appliquant le modèle réduit de coque de Föppl-Von Kármán à courbure uniforme avec une courbure initiale et une courbure inélastique sphériques, on a résolu le problème de minimisation de l'énergie globale pour différentes configurations initiales de la coque (paramètre de courbure initiale  $h_0$ ) et en variant le paramètre de contrôle (paramètre de courbure inélastique  $h_i$ ). Le calcul a été réalisé en utilisant le code Mathematica pour l'ensemble de paramètres matériaux indiqués dans le Tableau 1. Les résultats sont illustrés dans le graphique de la Figure 3 qui représente le diagramme de stabilité. Dans ce graphique, on voit trois régions de stabilité pour une coque de courbure initiale  $h_0$  fixée en fonction de la courbure inélastique  $h_i$  appliquée : la zone en blanc, correspondant à l'existence d'un seul équilibre

$\beta_A$	$\nu_A$	$\rho_A$
1.0	0.3	1.2

TABLE 1 – Propriétés mécaniques utilisées dans les simulations.

stable ; les zones en gris clair, correspondant à l'existence de deux configurations distinctes d'équilibre stable (coques bistables) ; et les zones en gris foncé, correspondant à l'existence de trois équilibres stables distincts (coques tristables). Les frontières entre différentes régions correspondent à des points de bifurcation ou de perte de stabilité de configurations d'équilibre, comme on l'a expliqué dans la section précédente.

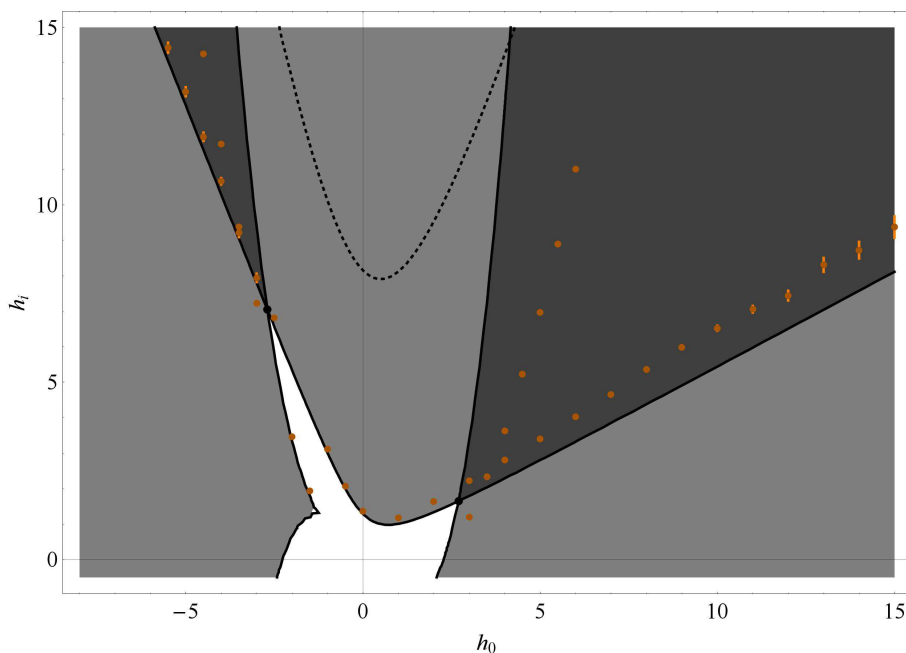


FIGURE 3 – Diagramme de stabilité.

## 4.2 Validation des résultats analytiques par simulations aux éléments finis

La validation des résultats analytiques a été réalisée en relâchant l'hypothèse de courbure uniforme dans des calculs éléments finis non linéaires en grands déplacements sous Abaqus. L'objectif était de confirmer l'existence de configurations d'équilibre stables et distinctes dans les régions de bi- et tristabilité.

Les simulations ont été menées en utilisant l'ensemble de propriétés matériaux indiquées dans le Tableau 1. Pour une configuration initiale donnée de la coque (paramètre  $h_0$  fixé), on a appliqué la courbure inélastique  $h_i$  par un chargement correspondant à un gradient thermique dans l'épaisseur de la coque.

On a donc cherché les points correspondant à des bifurcations ou à la perte de stabilité des configurations d'équilibre, de telle manière à reconstruire les frontières entre les différentes régions de stabilité du diagramme de Figure 3.

Les points rouges notés sur la Figure 3 représentent les résultats obtenus par les calculs éléments finis et montrent la bonne validité des résultats donnés par le modèle analytique réduit. Cela montre que les contributions non linéaires du modèle de Föppl-Von Kármán à courbure uniforme sont essentielles pour capter les phénomènes de stabilité des coques minces peu profondes.

## Références

- [1] S. Guest, S. Pellegrino. *Analytical models for bistable cylindrical shells*, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences 462, 839-854, 2006.



- [2] K. Seffen. '*Morphing*' bistable orthotropic elliptical shallow shells, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences 463, 67-83, 2007.
- [3] S. Vidoli, C. Maurini. *Tristability of thin orthotropic shells with uniform initial curvature*, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences 464, 2949-2966, 2008.
- [4] E. H. Mansfield. *The bending and stretching of plates*, Cambridge University Press, 1989.
- [5] J. M. Berthelot. *Composite materials : mechanical behavior and structural analysis* , Springer, 1999.
- [6] A. Fernandes, C. Maurini, S. Vidoli. *Multiparameter actuation for shape control of bistable composite plates*, International Journal of Solids and Structures 47(10), 1449-1458, 2010.
- [7] S. Guest, E. Kebabze, S. Pellegrino. *A Zero-Stiffness Elastic Shell Structure*, Journal of Mechanics of Materials and Structures 47(10), 1449-1458, 2011.