

Sélection de modèle appliquée à l'optimisation fiabiliste par méta-modèles stochastiques hiérarchiques

J. Lebon¹, R. Filomeno Coelho¹, Ph. Bouillard¹, P. Breitkopf²,

¹Université Libre de Bruxelles Service BATir CP194/02 50 Avenue F. Roosevelt B-1050 Bruxelles BELGIQUE

{jlebon@batir.ulb.ac.be, rfilomen@batir.ulb.ac.be, pbouilla@batir.ulb.ac.be}

²Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Centre de Recherches de Royallieu BP 20529 - 60205 Compiègne cedex FRANCE {piotr.breitkopf@utc.fr}

Résumé — Pour l'optimisation fiabiliste de structures, diminuer le nombre d'appels au modèle de calcul est un enjeu important. Dans ce contexte, cette étude propose une méthodologie de calcul des réponses structurales à faible coût en utilisant des métamodèles stochastiques à deux niveaux, en aval de méthodes de sélection de modèles. Appliquées à l'optimisation de forme de treillis dans un contexte multiobjectif sous incertitudes, ces méthodes réduisent drastiquement le nombre de simulations tout en garantissant le niveau de précision.

Mots clés — Optimisation multicritère, Développement en chaos polynomial creux, Moindres Carrés Mobiles, Méthode de sélection de modèle LARS (Least Angle Regression Stagewise).

1 Métamodèles stochastiques hiérarchiques

Dans un contexte d'optimisation structurale en présence d'incertitudes, on suppose que les réponses $\mathbf{f} = \{f_j\}_{j=1,\dots,J}$ dépendent de deux types de variables découplées : les variables de conception déterministes $\mathbf{x} = \{x_t\}_{t=1,\dots,T}$, et les variables aléatoires (supposées gaussiennes décorrélées) $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_m\}_{m=1,\dots,M}$. La propagation, à faible coût, des incertitudes à travers le modèle (type éléments finis dans notre cas) est une contrainte forte. Pour lever cette limitation, une méthode hiérarchique est proposée. Elle consiste à exploiter les méthodes de sélection de modèles afin d'obtenir le développement des réponses structurales en chaos polynomial creux [1], puis à générer une surface de réponse par moindres carrés mobiles [2] sur les coefficients sélectionnés. L'agencement des deux niveaux de métamodèles stochastiques est décrit ci-après :

1- Au premier niveau, pour un point de conception \mathbf{x} donné, une décomposition en chaos polynomial creux des réponses aléatoires est réalisée [1]. La sélection des termes significatifs du chaos polynomial pour la réponse du système est réalisée grâce à une méthode dérivée du Least Angle Regression (LAR) appelée Least angle Regression Stagewise (LARS) :

$$f_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_0(\mathbf{x}) + \sum_{i \in A} \Psi_i(\boldsymbol{\theta}) \gamma_i^{f_j}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

où A est un ensemble d'indices multiples, Ψ_i , $i \in A$ sont les éléments sélectionnés de la base polynomiale sur lesquels sont développées les réponses et $\gamma_i^{f_j}$, $i \in A$ sont les coefficients correspondants pour une réponse particulière f_j .

Ces derniers peuvent être obtenus par une régression linéaire non-intrusive ne nécessitant qu'un nombre limité Q de simulations (approche non-intrusive par collocation) :

$$\begin{Bmatrix} f_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}) \\ \vdots \\ f_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^{(Q)}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(\boldsymbol{\theta}^{(1)}) & \dots & \Psi_I(\boldsymbol{\theta}^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_1(\boldsymbol{\theta}^{(Q)}) & \dots & \Psi_I(\boldsymbol{\theta}^{(Q)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1^{f_j}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \gamma_I^{f_j}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

2- Comme le montre l'équation précédente, les coefficients $\gamma_i^{f_j}(\mathbf{x})$ sont fonctions du point de concep-

tion \mathbf{x} auquel ils sont calculés. Un deuxième niveau de métamodèle consiste à construire une surface de réponse sur les coefficients du chaos en exploitant une méthode de projection sur base polynomiale analogue à celle employée au premier niveau. La version interpolante des moindres carrés mobiles est utilisée à cet effet : au point \mathbf{x} à approcher, chaque $\gamma_i^{f_j}(\mathbf{x})$ est développé suivant une base polynomiale $\gamma_i^{f_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^\top(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x})$. Le calcul des coefficients $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ est basé sur la minimisation du critère d'erreur ci-contre $J(\mathbf{c}(\mathbf{x})) = \min_{\mathbf{c}(\mathbf{x})} \sum_n w_n (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|) \|\mathbf{p}^\top(\mathbf{x}_n)\mathbf{c}(\mathbf{x}_n) - \tilde{\gamma}_i^{f_j}(\mathbf{x}_n)\|^2, n = 1, \dots, n_{DOE}, j \in A$, où les w_n sont les fonctions poids permettant à l'approximation de conserver un caractère local et où $\tilde{\gamma}_i^{f_j}(\mathbf{x})$ est calculé par collocation.

Dans la pratique, en exploitant un plan d'expériences sur l'espace de conception $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_{DOE}}\}$, on calcule les coefficients $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ de l'approximation qui déterminent les surfaces de réponse [3] :

$$\mathbf{x} \mapsto \{\Gamma_j(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \{\gamma_i^{f_j}(\mathbf{x}), i \in A\}, j = 1, \dots, J\}$$

2 Application à l'optimisation de forme d'un treillis plan

La méthodologie décrite ci-dessus est appliquée à l'optimisation de forme de treillis plans. Les fronts de Pareto ici représentés concernent le problème d'optimisation suivant [3] pour différents seuils de probabilité de non-dominance : pour un point des diagrammes de Pareto non déterministe $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2]^\top$, on peut associer une probabilité α^f représentant la probabilité que la solution choisie domine ce point :

$$\min_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}} \zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]^\top \begin{cases} \text{soumis à} & P_{\text{non-dominance}} \equiv P[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \succ \zeta] \geq \alpha^f \\ \text{avec} & \zeta_i = E[f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] + \eta_i \sigma[f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] \end{cases} \quad (3)$$

où les variables de conception sont les coordonnées des noeuds encerclés. Pour chaque structure obtenue, les fonctions objectif à minimiser sont la masse du treillis (f_1) et la contrainte axiale maximale (f_2). Les variables stochastiques gaussiennes non corrélées sont les sections regroupées en deux ensembles (barres supérieures et inférieures, barres transversales).

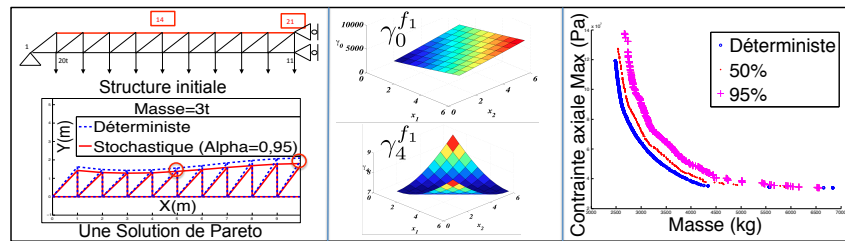


FIGURE 1 – Exemple d'une structure solution, de métamodèles stochastiques et de fronts de Pareto obtenus pour $\alpha_f = 0,5$, $\alpha_f = 0,95$

Sur cet exemple, validé par comparaison avec une méthode de référence de Monte Carlo classique pour le calcul des probabilités, les métamodèles stochastiques à deux niveaux permettent un gain considérable (de l'ordre de 100 à 1000 fois moins d'appels au modèle), selon le niveau de probabilité souhaité, tout en garantissant une précision équivalente. Dans une version plus étendue de l'abstract, ces résultats sont détaillés et d'autres exemples sont traités plus en détail.

Références

- [1] G. Blatman, B. Sudret, *Sparse polynomial expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach*, Comptes Rendus Mécaniques, Vol. 336, No. 6, Elsevier, pp. 518-523, 2008.
- [2] P. Breitkopf, H. Naceur, A. Rassineux, P. Villon, *Moving Least Squares response surface approximation : Formulation and metal forming applications*, Vol. 83, Computers & Structures, Elsevier, pp. 1411-1428, 2005.
- [3] R. Filomeno Coelho, J. Lebon, Ph. Bouillard, *Hierarchical stochastic metamodels based on moving least squares and polynomial chaos expansion Application to the multiobjective reliability-based optimization of space truss structures*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, Manuscrit soumis 2010.

NB : Pour plus de renseignements concernant la référence [3] non parue, il est possible de contacter l'auteur {rfilomen@batir.ulb.ac.be}