



**HAL**  
open science

## Sélection de modèle appliquée à l'optimisation fiabiliste par métamodèles stochastiques hiérarchiques

Jérémy Lebon, Rajan Filomeno Coelho, Philippe Bouillard, Piotr Breitkopf

### ► To cite this version:

Jérémy Lebon, Rajan Filomeno Coelho, Philippe Bouillard, Piotr Breitkopf. Sélection de modèle appliquée à l'optimisation fiabiliste par métamodèles stochastiques hiérarchiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592956

**HAL Id: hal-00592956**

**<https://hal.science/hal-00592956>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Sélection de modèle appliquée à l'optimisation fiabiliste par méta-modèles stochastiques hiérarchiques

J. Lebon<sup>1</sup>, R. Filomeno Coelho<sup>1</sup>, Ph. Bouillard<sup>1</sup>, P. Breitkopf<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Université Libre de Bruxelles Service BATir CP194/02 50 Avenue F. Roosevelt B-1050 Bruxelles BELGIQUE  
{jlebon@batir.ulb.ac.be, rfilomen@batir.ulb.ac.be, pbouilla@batir.ulb.ac.be}

<sup>2</sup>Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Centre de Recherches de Royallieu BP 20529 - 60205 Compiègne cedex FRANCE { piotr.breitkopf@utc.fr }

**Résumé** — Pour l'optimisation fiabiliste de structures, le nombre d'appels au modèle de calcul est un facteur hautement limitant. Dans ce contexte, cette étude propose une méthodologie de calcul des réponses structurales à faible coût en utilisant des méta-modèles stochastiques à deux niveaux, en aval de méthodes de sélection de modèles. Appliquées à l'optimisation de forme de treillis dans un contexte multiobjectif sous incertitudes, ces méthodes réduisent drastiquement le nombre de simulations tout en garantissant le niveau de précision.

**Mots clés** — Optimisation multicritère, Développement en chaos polynomial creux, Moindres Carrés Mobiles, Méthode de sélection de modèle LARS (Least Angle Regression Stagewise).

## Introduction

Depuis plusieurs décennies l'optimisation multiobjectif connaît un essor croissant dans les divers domaines de l'industrie. Le secteur des constructions n'échappe pas à cette tendance qui propose une méthodologie de prise en compte simultanée d'exigences conceptuelles souvent antagonistes pour la conception des structures (coût, sécurité, impact environnemental...). De manière générale, un problème d'optimisation multiobjectif est formulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \text{soumis à } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_m]$  est le vecteur des  $m$  fonctions objectif,  $\mathbf{x}$  l'ensemble des  $n$  variables de conception et  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  les contraintes du problème.

Les objectifs à minimiser étant souvent conflictuels, la résolution du problème est basée sur la définition du concept de dominance permettant d'identifier les solutions de meilleurs compromis. Celui-ci établit une relation de comparaison entre les solutions obtenues dans l'espace des fonctions objectif que nous définissons comme suit (dominance faible) : soient  $\mathbf{f}^A$  et  $\mathbf{f}^B$  deux évaluations du vecteur  $\mathbf{f}$ , on écrit que  $\mathbf{f}^A \succeq \mathbf{f}^B$  ( $\mathbf{f}^A$  "domine"  $\mathbf{f}^B$ ) si et seulement si  $\forall i \in I = \{1, \dots, m\}, f_i^A \geq f_i^B$ . Les solutions non-dominées définissent l'ensemble de Pareto dont l'image dans l'espace des fonctions objectifs est appelée front de Pareto. Les algorithmes évolutionnaires se révèlent particulièrement adaptés à la détermination des fronts de Pareto par leur capacité à faire évoluer intelligemment une population de solutions potentielles vers les solutions de meilleurs compromis [2].

La prise en compte des incertitudes dans un processus d'optimisation, qu'il soit mono- ou multi objectif implique d'évaluer la performance stochastique des solutions produites (robustesse, fiabilité) face aux inévitables incertitudes aléatoires qu'on supposera modélisables par des distributions de probabilité. Les techniques d'optimisation fiabilistes et robustes ont été développées d'abord dans le cadre de l'optimisation mono-objectif. D'autres travaux ont étendu ces concepts à l'optimisation multiobjectif par le développement de formulations spécifiques incorporant au problème la présence d'incertitudes. Néanmoins la question du traitement de l'incertitude à des coûts de calculs restreints au cours du processus d'optimisation multiobjectif reste ouverte [6].

Cette contribution se propose de traiter cette question. Les travaux réalisés se basent sur la formulation présentée dans [7] incluant l'incertitude notamment par la définition de front de Pareto stochastiques.

Dans une première partie, une stratégie de métamodèles à deux niveaux est présentée. La précision de cette méthode ainsi que le gain potentiel en terme d'appels au modèle sont explicités. Dans une seconde partie, le potentiel des méthodes de sélection de modèles appliquées à l'optimisation multiobjectif est présenté sur un cas d'optimisation de forme d'un treillis avec trois variables aléatoires.

## 1 Formulation fiabiliste du problème d'optimisation multiobjectif

### 1.1 Optimisation multiobjectif en présence d'incertitudes

La formulation générale du problème d'optimisation multiobjectif sous incertitude s'énonce ainsi en toute généralité [1] :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \xi) \\ & \text{soumis à } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi) \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

où :

- $\mathbf{x}$  est le vecteur des variables déterministes de conception, ce sont les variables qui évoluent au cours du processus d'optimisation déterminant les solutions potentielles,
- $\xi$  est le vecteur des variables aléatoires représentatif des sources d'incertitudes,
- $\mathbf{f}$  est le vecteur des fonctions objectifs,
- $\mathbf{g}$  est le vecteur des contraintes d'inégalités, incluant les critères fiabilistes utiles à l'évaluation de la performance stochastique des solutions. Les éventuelles contraintes d'égalité  $\mathbf{h}$  sont traitées comme des contraintes d'inégalité en autorisant une faible variation.

### 1.2 Formulation multiobjectif fiabiliste pour la prise en compte des incertitudes

La formulation originale sur laquelle se base le travail suivant a été énoncée dans [7] et permet d'inclure la présence d'incertitudes de manière originale, inspirée des concepts de l'optimisation fiabiliste, notamment par la définition de fronts de Pareto stochastiques :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \eta} \zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]^\top \\ & \text{sous les contraintes } P_{\text{non-dominance}} \equiv P[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \xi) \succeq \zeta] \geq \alpha^f \\ & \quad P_{\text{sécurité}} \equiv P[\mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi) \geq 0] \geq \alpha^g \\ & \text{avec } \zeta_i = E[f_i(\mathbf{x}, \xi)] + \eta \sigma[f_i(\mathbf{x}, \xi)] \end{aligned}$$

où :

- $E[f_i(\mathbf{x}, \xi)]$  et  $\sigma[f_i(\mathbf{x}, \xi)]$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la fonction objectif évaluée vis à vis des variables stochastiques  $\xi$ ,
- $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_m]$  sont des variables de conception additionnelles dont les composantes permettent de sélectionner le quantile  $\zeta$  du vecteur de fonctions objectif  $\mathbf{f}$ ,
- $\alpha^f, \alpha^g$  sont des niveaux de probabilités définis par l'utilisateur.

Cette formulation multiobjectif à laquelle peut être intégrée tout type d'incertitudes, s'accommode aisément d'une résolution par algorithme évolutionnaire (basée sur l'évolution d'une population d'individus). L'algorithme sélectionné pour cette étude est de type génétique : NSGA II [3] a été choisi pour ses qualités d'efficacité et de flexibilité.

Les variables  $\mathbf{x}$  et  $\eta$  sont perçues comme les variables de conception à optimiser. Selon le vocabulaire approprié, un jeu de valeurs pour les variables  $\mathbf{x}$  et  $\eta$  constitue un "chromosome" représentatif d'un "individu". Un ensemble d'individus est appelé "population". Au cours des itérations, la population d'individus évolue (par processus de "croisement" et de "mutation" pour assurer la diversité au sein de la population et par sélection des meilleurs individus), pour ne conserver finalement que les individus admissibles les plus performants vis à vis du problème d'optimisation sous contraintes.

L'une des contraintes est la probabilité de *non dominance*. Elle exprime pour un individu donné la probabilité qu'il soit dominé par une autre solution. C'est donc la probabilité pour un individu donné de

trouver un individu plus performant. L'ensemble des solutions appartenant au front de Pareto stochastique respectant la probabilité de non dominance définit donc une frontière dans l'espace des fonctions objectifs au deçà de laquelle la probabilité de trouver une solution plus performante est imposée par l'utilisateur (seuil  $\alpha^f$ ).

D'autres types de contraintes peuvent être incorporées dans la formulation : les contraintes de sécurité permettent notamment d'évaluer la fiabilité des structures solutions issues du processus d'optimisation.

Malgré la croissance ininterrompue des capacités de calculs, le duo combiné (optimisation multiobjectif et présence d'incertitudes) nécessite de consacrer un effort important à la réduction des exigences en ressources de calcul. L'une des pistes à suivre consiste à bâtir des modèles moins coûteux représentatifs des modèles physiques supposés exacts. Une méthode présentée ici consiste à établir les métamodèles sur deux niveaux.

### 1.3 Stratégie de métamodèles à deux niveaux

#### 1.3.1 Métamodèle stochastique

Dans le cadre de structures calculées par éléments finis, la littérature offre plusieurs méthodes particulièrement adaptées au calcul de probabilités par métamodèles, principalement les méthodes de perturbation et de décomposition spectrale parmi lesquelles l'expansion en chaos polynomial [5].

Le calcul de la probabilité de dominance  $P_{nondominance}$  nécessite la connaissance de la densité de probabilité des fonctions objectifs  $f_i(\mathbf{x}, \xi)$ . Ainsi, l'approche par décomposition spectrale par chaos polynomial est préférée à l'approche classique par perturbation.

Dans cette étude, nous supposons que les variables déterministes de conception  $\mathbf{x}$  à optimiser sont découplées des variables aléatoires  $\xi$ . Ces dernières peuvent alors être perçues comme des perturbations stochastiques des variables de conception  $\mathbf{x}$  ou bien encore comme représentative d'autres types d'incertitudes paramétriques non décisionnelles. Cette séparation permet la mise en place d'une stratégie de métamodèles hiérarchiques à deux niveaux.

#### 1.3.2 1<sup>er</sup> Niveau de métamodèle : Développement en chaos polynomial des réponses stochastiques

**Chaos polynomial à plusieurs variables** Soit  $s(\hat{\xi})$  la réponse stochastique d'un système dont le contenu aléatoire est donné par l'unique variable aléatoire  $\hat{\xi} \in \mathcal{N}(0, 1)$ . Le développement exact en chaos polynomial de la réponse stochastique  $s(\hat{\xi})$  est donné par :

$$s(\hat{\xi}) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^s H_i(\hat{\xi}) \quad (3)$$

où,  $\gamma_{j \in \mathbb{N}}$  est l'ensemble des coefficients du chaos polynomial, et  $H_j$  est le  $j^{\text{ème}}$  polynôme d'Hermite dont les 5 premiers sont explicitement fournis ci-dessous :

$$\begin{aligned} H_0(\hat{\xi}) &= 1; \\ H_1(\hat{\xi}) &= \hat{\xi}; \\ H_2(\hat{\xi}) &= \hat{\xi}^2 - 1; \\ H_3(\hat{\xi}) &= \hat{\xi}^3 - 3\hat{\xi}; \\ H_4(\hat{\xi}) &= \hat{\xi}^4 - 6\hat{\xi}^2 + 3. \end{aligned} \quad (4)$$

En pratique le nombre de termes du chaos polynomial est tronqué à une valeur  $N$  produisant un développement en chaos polynomial  $\bar{s}$  de degré  $N$  approchant la réponse exacte  $s$  :

$$\bar{s}(\hat{\xi}) = \sum_{i=0}^N \gamma_i^s H_i(\hat{\xi}) \quad (5)$$

Dans le cas de  $M$  variables aléatoires  $\hat{\xi} = \{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_M\}$ . On définit de la façon suivante l'expansion en chaos polynomial de la réponse de degré  $N$ .

$$\bar{s}(\hat{\xi}) = \sum_{i=0}^{P-1} \gamma_i^s \Psi_i(\hat{\xi}) = \bar{s} + \sum_{i=1}^{P-1} \gamma_i^s \Psi_i(\hat{\xi}) \quad (6)$$

où  $\gamma_0^f(\mathbf{x}) = \bar{s}$  est la moyenne de la réponse,  $\gamma_{j \in \{1, \dots, P-1\}}^f(\mathbf{x})$  l'ensemble des coefficients de l'expansion calculés au point de l'espace de conception  $\mathbf{x}$ , et  $\psi_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  polynôme d'Hermite multidimensionnel dont le degré  $n$  n'excède pas  $N$ . Le nombre de termes de cette expansion en chaos polynomial est donné par :

$$P = \sum_{k=0}^N C_{M+k+1}^k = \frac{(N+M)!}{N!M!} \quad (7)$$

Les termes du polynôme d'Hermite multidimensionnel de degré  $d \leq N$  sont donnés par :

$$\Psi_{\kappa}(\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_M) = \prod_{i=1}^M H_{\kappa_i} \xi_k \quad (8)$$

**Construction du métamodèle stochastique de Niveau 1 par collocation** Au premier niveau, la stratégie consiste à construire par chaos polynomial une surface de réponse sur les réponses stochastiques  $f(\mathbf{x}, \xi)$  impliquées dans le processus d'optimisation multiobjectif. Ces dernières sont établies aux points de conception  $\mathbf{x}$  courants. On fait l'hypothèse que les réponses étudiées dépendent d'un ensemble de variables stochastiques  $\xi$  supposées gaussiennes dont les moyennes et écarts-types sont respectivement notés  $\mu$  et  $\sigma$ . On considère alors la décomposition tronquée de la composante stochastique de la réponse obtenue à un point de conception  $\mathbf{x}$  donné :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{i=0}^{P-1} \gamma_i^f(\mathbf{x}) \psi_i(\hat{\xi}) = \bar{f} + \sum_{i=1}^{P-1} \gamma_i^f(\mathbf{x}) \psi_i(\hat{\xi}) \quad (9)$$

où  $\xi = \mu + \sigma \hat{\xi}$ , avec  $\hat{\xi} \in \mathcal{N}(0, 1)$

Le calcul des coefficients de cette expansion est la pierre d'angle pour la construction de ce premier niveau de métamodèle [5].

La méthode choisie est celle de la collocation qui présente l'avantage d'exiger des coûts de calculs moindres et une plus grande flexibilité dans sa mise en oeuvre. Cette méthode impose un nombre  $Q > P$  de points d'égalités  $\Theta = \{\hat{\xi}^{(1)}, \dots, \hat{\xi}^{(Q)}\}$  (appelés points de collocation) entre le modèle approché  $\tilde{f}$  et le modèle exact  $f$ . Les coefficients du chaos polynomial sont alors calculés en résolvant le système d'équation linéaire suivant au point de conception  $\mathbf{x}$  :

$$\begin{Bmatrix} f(\mathbf{x}, \hat{\xi}^{(1)}) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}, \hat{\xi}^{(Q)}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0(\xi^{(1)}) & \dots & \psi_{P-1}(\xi^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_0(\xi^{(Q)}) & \dots & \psi_{P-1}(\xi^{(Q)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_0^f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \gamma_{P-1}^f(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

qui peut s'écrire sous forme compacte :

$$\mathbf{f}(\Theta) = \Psi(\Theta) \gamma^f \quad (11)$$

Ce système d'équations peut être résolu par décomposition en valeur singulière de la matrice  $\Psi$ .

### 1.3.3 Métamodèle à deux niveaux

**Deuxième niveau de métamodèle sur les coefficients du chaos polynomial** Comme il a été noté ci-dessus, la décomposition en chaos polynomial de chacune des fonctions objectifs est à réaliser à chaque point de conception  $\mathbf{x}$ . Le nombre d'appels au modèle exact lors des collocations successives peut dans cette configuration s'avérer rapidement prohibitive.

Ainsi, l'établissement d'un deuxième niveau de métamodèles sur les coefficients permet la diminution du nombre d'appels au modèle. Ces métamodèles ont pour but la création d'une carte de valeurs approchées pour chacun des coefficients du chaos polynomial  $\Gamma = \{\gamma_0^f(\mathbf{x}), \dots, \gamma_{P-1}^f(\mathbf{x})\}$  à partir d'un plan d'expérience de taille  $n_{doe}$  sur les points de conception ( $\mathbf{X}_{DOE} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n_{doe})}\}$ ).

$$\{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n_{doe})}\} \quad \underline{\text{métamodèle}} \quad \{\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(n_{doe})}\} \quad (12)$$

**Application de la méthode des moindres carrés mobiles** Toute stratégie de métamodèle peut être appliquée. Ici la méthode choisie est celle des moindres carrés mobiles [8]. Cette méthode est une généralisation de la méthode des moindres carrés définissant un rayon d'influence  $r$  autour du point à approximer ce qui donne un caractère local à l'approximation.

Soit  $\mathbf{x}$  un point de l'espace de conception à approximer. Chaque coefficient  $\gamma_{i,i \in \{1, \dots, P-1\}}^f(\mathbf{x})$  est développé suivant une base polynomiale  $\mathbf{p}$ ,

$$\tilde{\gamma}_i^f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^\top(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

où

–  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{x}^2 \quad \dots]$

–  $\mathbf{c}$  l'ensemble des coefficients de régression calculé pour minimiser le critère d'erreur suivant :

$$J(\mathbf{c}(\mathbf{x})) = \min_{\mathbf{c}(\mathbf{x})} \sum_{n_{doe}} w_n(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|) \|\mathbf{p}^\top(\mathbf{x}_n)\mathbf{c}(\mathbf{x}_n) - \tilde{\gamma}_i^f(\mathbf{x}_n)\|^2, n = 1, \dots, n_{doe}. \quad (14)$$

Les fonctions  $w_n$  sont appelées “fonctions poids”. Ce sont des fonctions décroissantes de la norme euclidienne entre  $\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{x}$ . L'expression générale de ces fonctions est donnée par :

$$\begin{aligned} [0, r] &\mapsto [0, 1] \\ \mathbf{x} &\rightarrow w_n = w_{ref} \left( \frac{\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}\|}{r} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Le rayon  $r$  définit la zone d'influence locale pour chaque point  $\mathbf{x}$  à approximer : l'approximation  $\tilde{\gamma}_i^f$  n'est alors définie que dans un rayon  $r$  autour de  $\mathbf{x}$ , i.e.  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < r$ . Plusieurs stratégies existent pour un choix adapté de ce rayon d'influence qui doit néanmoins contenir un nombre de points suffisant pour permettre la détermination précise des coefficients  $\mathbf{c}$  de l'approximation.

La fonction poids utilisée est une fonction de Wendland définie sur  $[0, r]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  :

$$w_{ref}(\mathbf{x}, r) = \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{r}\right)^4 \left(4\frac{\mathbf{x}}{r} + 1\right) \quad (16)$$

De plus, alors que dans sa version initiale, les moindres carrés mobiles ne sont pas interpolants, des opérations redéfinissant les valeurs des fonctions poids permettent de rendre l'approximation interpolante, de manière singulière (comme ci-dessous) ou non :

$$w_{\text{interpolant singulier}} = \frac{w_{init}}{1 + \varepsilon - w_{init}} \quad (\text{ici } \varepsilon = 10^{-10}) \quad (17)$$

## 1.4 Application à l'optimisation de formes de treillis plans

La mise en oeuvre des stratégies (métamodèles à 1 puis 2 niveaux) décrite ci-dessus est proposée pour l'optimisation de forme multiobjectif d'une treillis plan en acier de construction. Les variables de conception sont les coordonnées des noeuds 14 et 21 représentées sur la figure 1. La position des autres noeuds est calculée en utilisant des fonctions de type “spline”. Les variables stochastiques du problème sont les sections des barres supérieures et inférieures dont les moyennes et les écarts-types valent respectivement  $\mu = 90\text{cm}^2$  et  $\sigma = 10\%\mu$ . Les objectifs à minimiser sont la masse du treillis et la fonction de compliance  $J$  (travail des forces externes à la structure, en notation éléments finis :  $J = Fq^\top$  où  $F$  est le vecteur des forces nodales et  $q$  le vecteur des déplacements nodaux).

Lorsque  $\alpha^f$  augmente, le front de Pareto stochastique s'éloigne progressivement du front de Pareto obtenu par optimisation multiobjectif déterministe. Les fronts obtenus à la figure 1 ont été établis par la construction de métamodèles à deux niveaux décrite aux paragraphes précédents. Les surfaces tracées correspondent aux métamodèles obtenus en utilisant les moindres carrés mobiles sur les coefficients de l'expansion en chaos polynomial de la compliance.

La figure 2 montre la bonne concordance entre les fronts obtenus par la méthode de métamodèles à deux niveaux et les fronts de Pareto de référence obtenus par la méthode de Monte Carlo.

La table 1 présente au cours du processus d'optimisation le gain réalisé en terme de nombre d'appels au modèle pour différentes stratégies d'évaluation des probabilités.

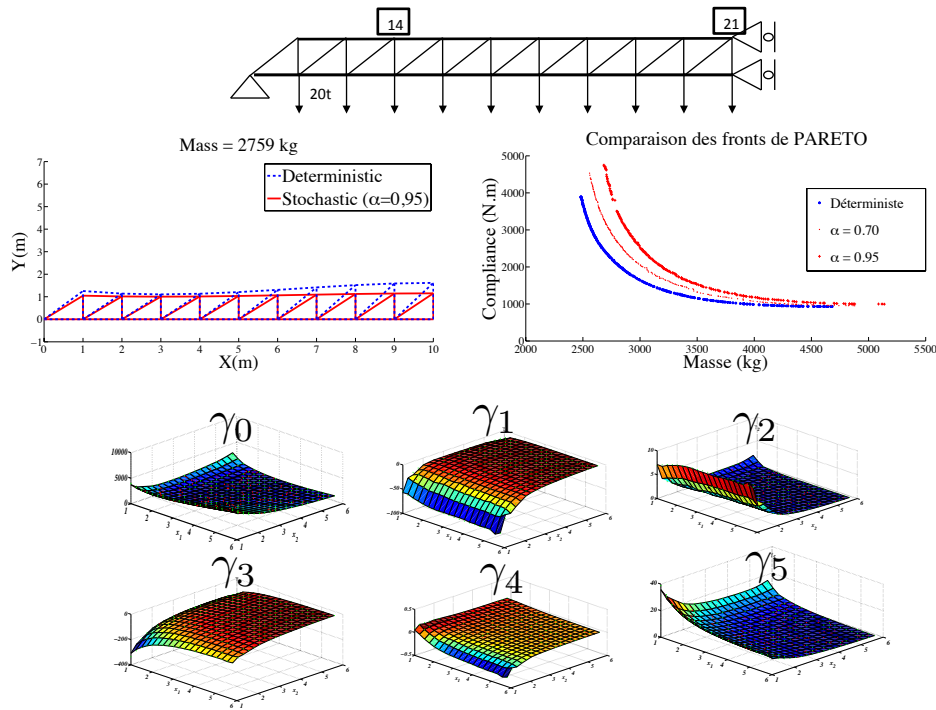


FIGURE 1 – Exemple d’une structure solution, de métamodèles stochastiques et de fronts de Pareto obtenus pour  $\alpha_f = 0,7$  et  $\alpha_f = 0,95$

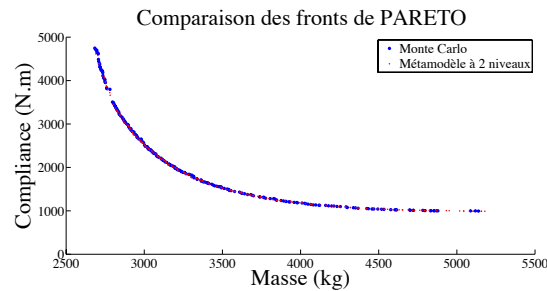


FIGURE 2 – Exemple d’une structure solution, de métamodèles stochastiques et de fronts de Pareto obtenus pour  $\alpha_f = 0.95$ .

## 2 Méthodes de sélection de modèles

De récents travaux [4] ont montré l’efficacité de l’utilisation des méthodes de sélection de modèles appliquées au chaos polynomial. En particulier l’utilisation de la méthode LARS (Least Angle Regression Stepwise) couplée à un processus de validation croisée permet de créer efficacement et de manière économique un chaos polynomial creux ne contenant plus que les termes dont la corrélation avec la réponse stochastique est la plus importante et le résidu le plus faible. L’incorporation efficace des méthodes de sélection de modèle dans le cadre de l’optimisation multiobjectif est encore en cours d’investigation. Le potentiel de ces méthodes est néanmoins démontré sur un cas d’application mené sur l’optimisation de forme de treillis avec prise en compte de trois variables aléatoires.

### 2.1 L’algorithme Least Angle Regression Stagewise appliqué au développement en chaos polynomial

Considérons le développement en chaos polynomial de la réponse stochastique  $f$  au point de conception  $\mathbf{x}$  [9].

TABLE 1 – Gain en terme d’appel du modèle exact pour une population de  $N_{pop} = 200$  individus avec  $I = 30$  itérations

Méthode utilisée	Nombre d’appels au modèle	Remarques
Monte Carlo Classique	$10000 \times N \times I = 6 \times 10^7$	10000 simulations nécessaires pour atteindre la convergence en moyennes et écart-types
Métamodèle niveau1 Métamodèle niveau 1&2	$30 \times N \times I = 1.8 \times 10^5$ 200	30 points de collocations sont nécessaires

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \gamma_{\alpha}(\mathbf{x}) \psi_{\alpha}(\hat{\xi})$$

où :

- $\mathcal{A}$  est un ensemble d’indices multiples non-vide. A titre d’exemple,  $\mathcal{A}$  peut-être l’ensemble des indices choisis de sorte que seuls les polynômes  $\psi_{\alpha}$  de degré  $d \leq N$  soient sélectionnés.
- $\hat{\xi} = \{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_M\}$  les  $M$  variables aléatoires.

Considérons ensuite, les vecteurs aléatoires  $\hat{\Xi} = [\hat{\Xi}_1, \dots, \hat{\Xi}_M]_{T \times M}$  contenant  $T$  évaluations des variables  $\{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_M\}$ ,  $\Psi = [\psi_{\alpha_0}, \dots, \psi_{\alpha_{p-1}}]$  les  $T$  évaluations de chaque vecteur de la base polynomiale et  $\mathcal{F} = [\tilde{f}^{(1)}, \dots, \tilde{f}^{(T)}]^\top$  les  $T$  évaluations correspondantes du modèle. Le LARS permet de construire de manière séquentielle l’expansion en chaos polynomial de la fonction  $\tilde{f}$  en se basant sur l’algorithme ci dessous. A chaque étape  $m$  de l’algorithme, les éléments de la base polynomiale présentant la corrélation la plus grande avec le vecteur résidu courant  $\mathbf{R}$  sont ajoutés. L’algorithme est le suivant :

1. Initialisation des coefficients :  $\gamma_{\alpha_0}, \dots, \gamma_{\alpha_{p-1}} = 0$ , et l’on pose le vecteur résidu courant  $\mathbf{R}$  égal aux évaluations du mode  $\mathcal{F}$ .
2. Le vecteur  $\psi_{\alpha_j}$  dont la valeur absolue de la corrélation avec le résidu courant est la plus grande est sélectionné.
3.  $\gamma_{\alpha_j}$  est ensuite affectée d’une valeur comprise entre 0 et la valeur de la projection du vecteur  $\psi_{\alpha_j}$  sur le résidu courant, calculée par moindre carré. La valeur attribuée à  $\psi_{\alpha_j}$  est telle qu’alors un autre vecteur  $\psi_{\alpha_k}$  montre une corrélation plus grande avec le résidu courant. Celui-ci est ajouté à la base courante.
4.  $\{\gamma_{\alpha_j}, \gamma_{\alpha_k}\}^\top$  évoluent ensuite conjointement sur une direction “équiangulaire” aux vecteurs  $\{\psi_{\alpha_j}, \psi_{\alpha_k}\}$ , jusqu’à ce qu’un autre vecteur  $\psi_{\alpha_l}$  soit plus corrélé avec le résidu courant.
5. La procédure s’arrête lorsque le nombre d’étapes a atteint  $m = \min(P, T - 1)$

Chaque étape permet de rajouter un élément à la base. Un processus de validation croisée permet ensuite de sélectionner les valeurs des coefficients qui minimisent le résidu  $\mathbf{R}$ .

## 2.2 Le LARS en amont du processus d’optimisation

L’application de la méthode LARS à l’optimisation de forme d’un treillis permet de montrer le potentiel d’économie réalisé en terme de nombre de termes du chaos polynomial pris en compte. Nous avons fixé un point de conception  $\mathbf{x} = \{2; 2\}$  définissant les coordonnées verticales des noeuds 14 et 21 (voir figure 3). Trois groupes de variables aléatoires sont prises en compte : le premier groupe constitue la valeur des sections de la barre supérieure, le second celui de la barre inférieure, et le troisième celui des barres de liaison. La fonction stochastique évaluée est la compliance. Le degré  $N$  de l’expansion en chaos polynomial est de 3, ce qui fournit  $P = 84$  termes. La figure 3 montre l’évolution de la valeur des coefficients du chaos polynomial en fonction des étapes du LARS. L’étape à laquelle le LARS est arrêté correspond à une erreur empirique sur le modèle exact de 5% pour un développement comprenant 10 coefficients non nuls sur les 84 possibles.



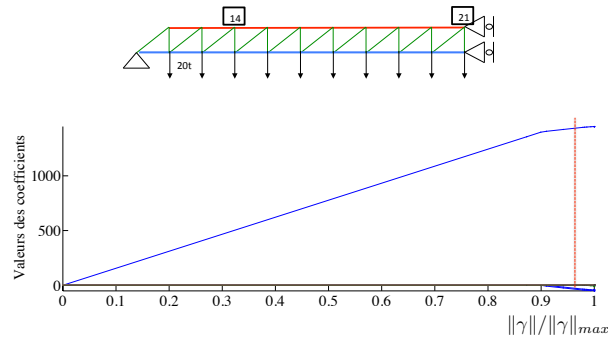


FIGURE 3 – Evolution des coefficients issues de la sélection LARS appliquée à l'optimisation de forme d'un treillis soumis à la variabilité de 3 groupes de sections

### 3 Conclusion

Les métamodèles hiérarchiques à 2 niveaux permettent de réduire de manière importante le nombre d'appels au modèle. Ceci est particulièrement lié à l'utilisation du chaos polynomial qui permet de contourner les méthodes par simulations. L'utilisation du second niveau de métamodèle permet un gain encore plus important tout en conservant un niveau de précision acceptable. Cependant, cette stratégie n'est réellement efficace que pour des cas de faibles dimensions stochastiques, i.e. où le nombre de coefficients du chaos polynomial à calculer est peu élevé. Or ce nombre augmente exponentiellement avec l'augmentation du nombre de variables stochastiques et du degré du chaos polynomial. Ainsi pour le traitement de cas pratiques et réalistes, l'utilisation de méthodes de sélection de modèles pour bâtir un chaos polynomial creux montrent un potentiel important. Une réflexion approfondie est en cours d'investigation pour les incorporer le plus efficacement possible dans un processus d'optimisation multicritère.

### Références

- [1] E. Nikolaidis, D.M. Ghiocel, S. Singhal. *Engineering Design Reliability Handbook*, CRC PRESS, 2004.
- [2] C. A. Coello Coello. *A Comprehensive Survey of Evolutionary-Based Multiobjective Optimization Techniques*, Knowledge and information system, Springer, 1999.
- [3] K. Deb, H. Gupta. *Searching for Robust Pareto-Optimal Solutions in Multi-objective Optimization*, Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Vol. 3410, Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [4] G. Blatman, B. Sudret, *Sparse Polynomial Chaos Expansions and Adaptive Stochastic Finite Elements Using a Regression Approach*, Comptes-Rendus Mécanique, pp. 518-523, Vol. 336, Elsevier, 2008.
- [5] M. Berveiller. *Elements finis stochastiques : approches intrusives et non intrusives pour des analyses de fiabilité*, Ecole Doctorale de Sciences pour l'Ingénieur de Clermont Ferrand, 2005.
- [6] H-G. Beyer, B. Sendhoff. *Robust optimization - A comprehensive survey*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 2007.
- [7] R. Filomeno Coelho, J. Lebon, Ph. Bouillard. *Hierarchical stochastic metamodels based on moving least squares and polynomial chaos expansion Application to the multiobjective reliability-based optimization of space truss structures*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 2010.
- [8] P. Breittkopf et al. *Moving Least Squares response surface approximation : Formulation and metal forming applications* Computer and Structures, pp. 1411-1428, Vol. 83, Elsevier, 2005.