

*SLDL<sup>T</sup>* : une technique de mise à jour de la décomposition *LDL<sup>T</sup>* pour l'accélération des simulations de Monte Carlo dans le cas de champs stochastiques non uniformes

A. Notin <sup>\*1†</sup>, J. L. Dulong <sup>1</sup>, N. Gayton <sup>2</sup>, P. Villon <sup>1</sup> and M. Lemaire <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Centre de Recherche de Royallieu, BP20529, F-60205 Compiègne cedex, France*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, Campus de Clermont-Ferrand - Les Cèzeaux, BP265, F-63175 Aubière Cedex, France*

### Résumé

Nous introduisons une nouvelle méthode que nous appelons décomposition *LDL<sup>T</sup>* stochastique (et nommée *SLDL<sup>T</sup>*). Cette méthode s'appuie sur la décomposition *LDL<sup>T</sup>* qui est habituellement utilisée dans les codes de calculs éléments finis. L'idée est de supposer que dans une approche de type simulation Monte Carlo, les échantillons diffèrent légèrement les uns des autres et que de ce fait l'information peut être réutilisée d'un échantillon à l'autre. Dans l'approche *SLDL<sup>T</sup>* cette hypothèse revient à supposer que les fluctuations de la matrice triangulaire inférieure *L* sont négligeables devant les fluctuations de l'aléa. Ainsi, l'objectif est d'estimer les meilleurs coefficients de la matrice diagonale *D* qui minimisent l'écart entre la matrice de rigidité et son approximation au sens *LDL<sup>T</sup>*. Cette approche est donc équivalente à une mise à jour de la décomposition de Cholesky d'une matrice. Nous montrons également comment estimer directement la moyenne et la variance des déplacements sans résoudre le problème mécanique. Enfin, les performances de la méthode sont analysées au travers d'une étude de complexité et grâce à un estimateur d'erreur. L'approche est mise en œuvre sur un support de fixation de Bogie.

**Mots-Clés:** Calculs stochastiques; décomposition *LDL<sup>T</sup>*; mise à jour de la décomposition de Cholesky; simulations de Monte Carlo; champ de module d'Young aléatoire; champ aléatoire non uniforme

## Présentation de la méthode

On considère un problème mécanique statique discrétisé par éléments finis avec une loi de comportement linéaire élastique et dont le module d'Young est modélisé par un champ stochastique non uniforme  $E(\mathbf{x}, \theta)$  discrétisé suivant le maillage éléments finis ( $n_e$  éléments) en un champ  $\mathbf{E}(\theta)$ . Le système discret à résoudre s'écrit donc [Zienkiewicz et Taylor, 2005] :

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}(\theta)) \mathbf{u}(\mathbf{E}(\theta)) = \mathbf{f} \quad (1)$$

$\mathbf{K}$  étant une matrice définie positive, elle admet une décomposition *LDL<sup>T</sup>* [Golub et Van Loan, 1996] ce qui, en tenant compte de l'hypothèse *SLDL<sup>T</sup>* équivaut à :

$$\mathbf{K}(\mathbf{E}(\theta)) \simeq \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{E}(\theta)) = \mathbf{L}(\mathbf{E}(\theta_0)) \mathbf{D}(\mathbf{E}(\theta)) \mathbf{L}(\mathbf{E}(\theta_0))^T = \mathbf{L}_0 \mathbf{D}(\mathbf{E}(\theta)) \mathbf{L}_0^T \quad (2)$$

où  $\theta_0$  est une valeur de référence des variables d'entrée (par exemple, la moyenne). Le calcul des coefficients  $\mathbf{d}_i(\mathbf{E}(\theta))$  de la matrice diagonale  $\mathbf{D}(\mathbf{E}(\theta))$  se fait en résolvant le problème de minimisation suivant ( $\|\mathbf{A}\|_F^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{A})_F = \text{trace} \{ \mathbf{A} \mathbf{A}^T \}$  est la norme de Frobenius) :

$$J_E(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}(\mathbf{E}(\theta)) - \mathbf{L}_0 \mathbf{D}(\mathbf{E}(\theta)) \mathbf{L}_0^T\|_F^2 \quad (3)$$

dont la résolution mène au système linéaire suivant :

$$\mathbf{A} \mathbf{d}(\mathbf{E}(\theta)) = \mathbf{b}(\mathbf{E}(\theta)) \quad (4)$$

---

\*. Correspondance: A. Notin, Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, Centre de Recherche de Royallieu, BP 20529, F-60205 Compiègne cedex, France

†. E-mail : alban.notin@utc.fr

avec :

$$\mathbf{A}_{ij} = \text{trace} \left\{ \mathbf{\Lambda}^j \mathbf{\Lambda}^i \right\} = \left[ \left( \mathbf{L}_0^T \right)_j \cdot \left( \mathbf{L}_0 \right)_i \right]^2 \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_i(\mathbf{E}(\theta)) = \text{trace} \left\{ \mathbf{K}(\mathbf{E}(\theta)) \mathbf{\Lambda}^i \right\} = \left( \mathbf{L}_0^T \right)_i \cdot \mathbf{K}(\mathbf{E}(\theta)) \cdot \left( \mathbf{L}_0 \right)_i$$

Le point important est que la matrice  $\mathbf{A}$  est indépendante de l'aléa et ainsi calculée une seule fois lors de la phase d'initialisation. En notant  $b$  la demi-largeur de bande de la matrice de rigidité, une analyse de complexité montre que le gain théorique par rapport à une approche Monte Carlo est alors de  $b/4$ .

## Application

La méthode  $SLDL^T$  est appliquée à un support de fixation de Bogie (Figure 1). Le module d'Young est modélisé par un champ stochastique Gaussien avec un noyau de corrélation exponentiel. Un facteur  $\gamma$  est appliqué à la longueur de corrélation pour l'amplifier et en étudier ainsi l'influence. Les résultats sont présentés en terme d'erreur relative par rapport à la simulation de Monte Carlo.

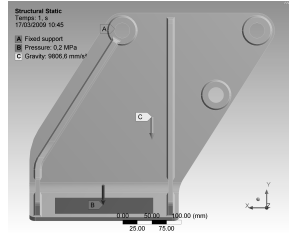


FIGURE 1 – Support de fixation de Bogie - Conditions aux limites.

	$C_v$		
$\gamma$	0,01	0,05	0,10
0,2	0,03	0,65	1,82
1	0,00	0,05	0,18
5	0,00	0,00	0,01

	$C_v$		
$\gamma$	0,01	0,05	0,10
0,2	40,25	63,19	12983,86
1	2,83	3,14	3,25
5	0,13	0,11	0,19

TABLE 1 – Support de fixation de Bogie - Erreur relative (%) sur la moyenne des déplacements (gauche) et l'écart-type (droite) en fonction du coefficient de variation et du facteur  $\gamma$  de corrélation.

## Conclusion

L'approche  $SLDL^T$  a été développée dans le but de proposer une alternative à la simulation de Monte Carlo brute. Les résultats numériques montrent que l'approche  $SLDL^T$  est sensible aux variations de la longueur de corrélation et du coefficient de variation ce qui est compatible avec l'hypothèse de base.

## Références

- [Golub et Van Loan, 1996] GOLUB, G. H. et VAN LOAN, C. F. (1996). *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press. 3rd edition.
- [Zienkiewicz et Taylor, 2005] ZIENKIEWICZ, O. et TAYLOR, R. (2005). *The finite element method*. Butterworth-Heinemann. 6th edition.