



**HAL**  
open science

## Modélisation des phénomènes de transferts électriques dans un système multi-contacts par la Méthode des Eléments Discrets

Khaled Bourbatache, A. Tekaya, Emmanuel Bellenger, R. Bouzerar, Mohamed Guessasma, V. Bourny

► **To cite this version:**

Khaled Bourbatache, A. Tekaya, Emmanuel Bellenger, R. Bouzerar, Mohamed Guessasma, et al.. Modélisation des phénomènes de transferts électriques dans un système multi-contacts par la Méthode des Eléments Discrets. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592952

**HAL Id: hal-00592952**

**<https://hal.science/hal-00592952>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Modélisation des phénomènes de transferts électriques dans un système multi-contacts par la Méthode des Eléments Discrets

K. Bourbatache<sup>1,2</sup>, A. Tekaya<sup>2,3</sup>, E. Bellenger<sup>1</sup>, R. Bouzerar<sup>3</sup>, M. Guessasma<sup>1</sup>, V. Bourny<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LTI, Université de Picardie Jules Verne, France, {khaled.bourbatache,emmanuel.bellenger,mohamed.guessasma}@u-picardie.fr

<sup>2</sup> MIS, Université de Picardie Jules Verne, France, {aymen.tekaya,valery.bourny}@u-picardie.fr

<sup>3</sup> PSC, Université de Picardie Jules Verne, France, robert.bouzerar@u-picardie.fr

**Résumé** — Nous proposons dans cette communication un modèle de transfert électrique dans les milieux granulaires métalliques, en tenant en compte du couplage électromécanique. Les propriétés électriques des différents chemins du courant électrique dépendent des efforts de contact par le biais de la théorie de Hertz. Des simulations numériques par Eléments Discrets (ED) sur des milieux granulaires bidimensionnels seront également présentées. Une comparaison qualitative des résultats numériques avec ceux obtenus expérimentalement montre une bonne concordance.

**Mots clés** — Transfert électrique, Milieux granulaire, Méthode des Eléments Discrets.

### 1 Introduction

Dans ce travail, nous proposons d'étudier le transport électrique dans un milieu granulaire. Les résultats disponibles pour une chaîne 1D de billes métalliques oxydées soumises à une charge statique montrent une transition de l'échantillon d'un état isolant vers un état conducteur lorsque le courant appliqué augmente [2]. Ce phénomène, qualifié d'effet Branly est une instabilité de la conductance électrique qui apparaît au niveau des contacts entre les corps. Ainsi, les caractéristiques tension-courant (U-I) mesurées entre deux billes électrodes sont non linéaires et hystérétiques (voir fig. 1). Un milieu granulaire métallique soumis à un chargement mécanique et dans lequel est injecté un courant électrique, se comporte à faible courant électrique comme un conducteur avec une résistance électrique relativement élevée. Cela est dû à l'existence d'une couche d'oxyde sur la surface des grains métalliques, causée par le contact avec l'air et aussi aux dépôts d'impuretés sur les particules. Au fur et à mesure que le courant électrique augmente la résistance électrique du milieu granulaire diminue. La couche d'oxyde disparaît progressivement, jusqu'à atteindre une tension électrique stable traduisant la saturation du milieu granulaire. Cette tension de saturation ne dépend pas de la force appliquée mais plutôt de nombre de contact métal-métal entre les billes. La diminution du courant électrique fait chuter la résistance du milieu granulaire, le comportement électrique est réversible dû à la création de micro-soudure au niveau des contacts. Le milieu granulaire se comporte comme une seule entité.

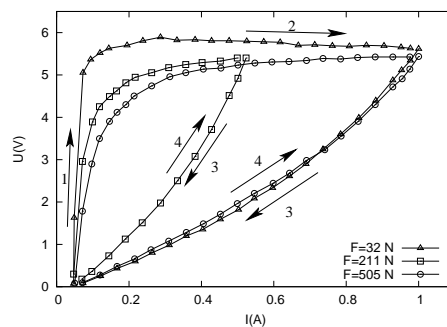


FIGURE 1 – Caractéristiques U-I dans une chaîne de billes [2].

L'objectif principal de cette étude est d'introduire dans un code ED [5] un modèle physique capable de

reproduire le comportement électrique d'un milieu granulaire à faible courant. Nous nous limitons dans cette étude au contact électrique parfait, les effets de la couche d'oxyde ne sont pas pris en compte dans notre modèle.

Nous présenterons tout d'abord une modélisation physique du transfert électrique dans un milieu granulaire. Cette modélisation est basée principalement sur la loi de Kirchhoff et la loi d'Ohm. Un nouveau modèle de conductance électrique dans une particule appartenant à un système multi-contacts sera présenté. Nous proposons ensuite, une modélisation dans le cas de deux billes en contact permettant de mettre en évidence l'influence du couplage électromécanique.

Nous mettrons en œuvre une modélisation numérique par la Méthode des Eléments Discrets du transfert électrique dans les milieux granulaires bidimensionnels sous chargement mécanique. Cette modélisation a pour objectif de mettre en évidence l'influence d'une part, du nombre de couches de billes et d'autre part du chargement mécanique appliqué sur les propriétés électriques globales du milieu granulaire.

## 2 Modélisation électromécanique dans un système multi-contacts

### 2.1 Modélisation mécanique

L'originalité du code MULTICOR consiste à utiliser comme solveur de contact le bipotentiel initié par de Saxcé [10]. De plus, il utilise le concept NSCD (Non-Smooth Contact Dynamics) développé par M. Jean et J.-J Moreau [6, 7], ce qui permet de modéliser correctement les effets dynamiques mais aussi de travailler avec un pas de discrétisation très grand ( $\Delta t \approx 10^{-3}s$ ) en comparaison avec les codes explicites ( $\Delta t \approx 10^{-7}s$ ).

Dans le cas de notre étude, les particules sont sphériques non-déformables et non-pénétrables. En choisissant comme paramètres de configuration  $q$ , les coordonnées du centre de gravité des grains et les rotations d'Euler, les termes gyroscopiques et centrifuges sont nuls et la matrice de masse généralisée  $\underline{\underline{M}}$  du système ne dépend pas de  $q$  et est diagonale par bloc. L'équation à modéliser s'écrit donc :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} = F_{ext}(q, \dot{q}, t) + R^{n_c}, \quad (1)$$

où  $F_{ext}$  représentent les efforts extérieurs explicitement connus et  $R^\alpha$  sont les efforts intérieurs associés aux réactions de contact a priori inconnues et  $n_c$  est le nombre de contact. A chaque paire de particules  $i$   $j$  candidates au contact les réaction locales  $\underline{F}$  sont données par :

$$\underline{F} = \underline{F}_t + F_n \cdot \underline{n}, \quad (2)$$

où  $\underline{n}$  est la normale dirigée de  $j$  vers  $i$ ,  $\underline{F}_t$  est la force de frottement et  $F_n$  est la force normal. Le cycle de calcul est un algorithme de type "pas à pas" qui requiert la répétition d'un schéma de résolution.

### 2.2 Modélisation électrique

Considérons un milieu granulaire  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  composé de  $n_p$  particules sphériques en contact avec  $n_c$  le nombre total de contact. On suppose que chaque contact est un nœud et chaque paire de nœuds appartenant à la même particule forment une branche. Le réseau électrique globale est composé de  $n_c$  noeuds et de  $n_b$  branches (voir fig. 2). En appliquant la loi de Kirchhoff traduisant la conservation de la charge électrique en chaque noeud on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Si } i \in \partial\Omega \text{ alors } \sum_{j \in \mathcal{N}_i} I_j &= I_0 \\ \text{sinon } \sum_{j \in \mathcal{N}_i} I_j &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

avec  $i$  un noeud appartenant à la frontière  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{N}_i$  les branches connectées au noeud  $i$ ,  $I_j$  le courant électrique traversant la branche  $j$  et  $I_0$  le courant électrique appliqué au milieu granulaire  $\Omega$ . On réécrivant l'équation (3) sous forme matricielle on obtient :

$$\mathbf{N}I = I_0$$

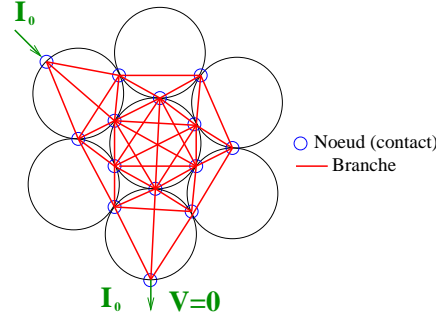


FIGURE 2 – Milieu granulaire  $\Omega$  avec le réseau électrique correspondant

où  $\mathbb{N} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_b}$  représente la matrice d'incidence traduisant la connectivité du milieu granulaire, elle dépend du nombre de contacts et de branches.  $I$  et  $I_0$  sont respectivement les vecteurs courant électrique et courant électrique imposé aux frontières  $\partial\Omega$ . En appliquant la loi d'Ohm entre les noeuds  $i$  et  $j$  de la branche  $k$  on trouve :

$$I_{ij}^k = C_{ij}^k U_{ij} = C_k (V_i - V_j) \quad (4)$$

où  $I_{ij}^k$  et  $C_{ij}^k$  désignent le courant électrique et la conductance de la branche  $ij$  appartenant à la particule  $k$ ,  $U_{ij}$  est la tension électrique et  $V_i$   $V_j$  sont les potentiels aux noeuds  $i$  et  $j$  respectivement. En réécrivant l'équation (4) sous forme matricielle nous obtenons :

$$I = \mathbb{C}\mathbb{N}^T V \quad (5)$$

où  $V \in \mathbb{R}^{n_c}$  le vecteur potentiel électrique,  $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$  la matrice de conductance (matrice diagonale) des branches constituant le réseau électrique. En remplaçant le vecteur courant électrique dans l'équation (5) à partir de son expression donnée par (4), nous obtenons l'équation finale à résoudre :

$$\mathbb{G}V = I_0 \quad (6)$$

avec  $\mathbb{G} = \mathbb{N}\mathbb{C}\mathbb{N}^T$  la matrice de conductance globale qui dépend de la conductance de chaque branche et de la connectivité du milieu granulaire ( $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ). L'équation (6) permet tout d'abord de déterminer le potentiel en chaque noeud (contact) pour ensuite calculer le courant électrique pour chaque branche à partir de l'équation (5).

La modélisation ainsi effectuée est basée sur les travaux de Renouf et Fillot [9], l'originalité de ce travail réside dans le calcul de la conductance entre une paire de contact et l'existence d'un potentiel au niveau de chaque contact. Le potentiel électrique est calculé sur chaque noeud cela permettra d'avoir plusieurs potentiels électriques au sein d'une particule selon le nombre de point de contact sur celle-ci. Le courant électrique dans une particule a plus de chemins possibles par rapport au modèle de Renouf et Fillot [9]. La conductance  $C_{ij}^k$  entre deux points de contacts  $i$  et  $j$  de la particule  $k$  est donnée par la formule suivante :

$$C_{ij}^k = \frac{\gamma S_i S_j}{2V^k} (1 - \cos \theta) \quad (7)$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique du matériau,  $V_k$  est le volume de la particule  $k$ ,  $\theta$  est l'angle que forment les points  $i$  et  $j$  avec le centre de la particule (voir fig 3(a)).  $S_i$   $S_j$  désignent les surfaces de contact aux points de contact  $i$  et  $j$  respectivement données par  $S_{i(j)} = \pi a_{i(j)}^2$ , avec  $a_i$  et  $a_j$  les rayons de contact calculés par la théorie de Hertz :

$$a = \left( \frac{3F_n r_{eff}}{4E_{eff}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

où  $F_n$  est l'effort normal de contact,  $r_{eff}$  le rayon effectif de la paire de contact et  $E_{eff}$  le module de Young effectif donné par  $\frac{1}{E_{eff}} = \frac{2(1-\nu^2)}{E}$ ,  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

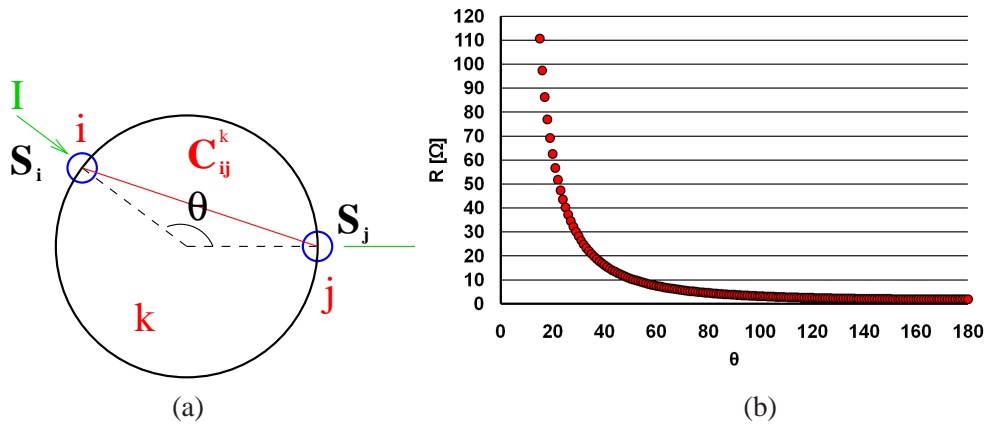


FIGURE 3 – (a) Modélisation de la conductance électrique dans une bille entre deux points de contact, (b) Variation de la résistance de la bille en fonction de l'angle entre les électrodes.

La conductance  $C_{ij}^k$  prend en compte les propriétés électriques intrinsèques du matériau, les deux surfaces de contact considérées comme des électrodes ainsi que leurs positions. L'expression (7) est obtenue dans un cas général sur un domaine quelconque  $\mathbb{D}$  de frontière  $\partial\mathbb{D} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma$  avec des conditions aux limites type Dirichlet sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  et des conditions type Neumann sur  $\Sigma$ . En utilisant la loi d'Ohm reliant la densité de courant électrique au champ électrique, ainsi que la définition du courant électrique. On obtient après calcul la conductance électrique sur un domaine  $\mathbb{D}$ . Dans le cas d'un cylindre de section  $S$  et de longueur  $L$ , dont les deux électrodes sont sur les deux surfaces du cylindre ( $\theta = \pi$ ). La conductance se simplifie sous la forme suivante  $C = \frac{\gamma S^2}{V} = \frac{\gamma S}{L} \Rightarrow R = \frac{\rho L}{S}$  cela correspond à l'expression classique de la résistance dans le cas d'un conducteur cylindrique avec  $\rho$  la résistivité du matériau.

La figure 3(b) représente la variation de la résistance électrique d'une sphère en acier de rayon  $r = 3 \text{ mm}$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre les deux électrodes. Les surfaces des électrodes sont supposées égales et correspondent à une force de  $100 \text{ N}$ . On remarque que l'angle entre les électrodes a un impact important sur la résistance électrique de la particule. Contrairement aux travaux de Renouf et Filliot [9], la formulation de la conductance proposée dans cette étude permet de tenir compte de la variation de la résistance au sein d'une particule appartenant à un système multi-contacts.

### 2.3 Couplage électromécanique

Dans cette partie nous nous intéressons à l'implémentation de la modélisation électrique présentée auparavant dans le code ED MULTICOR [3]. L'algorithme suivant résume le couplage électromécanique implémenté dans MULTICOR :

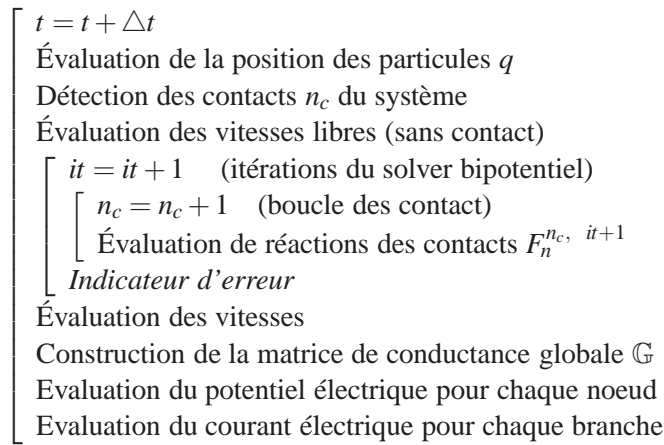


FIGURE 4 – Algorithme de couplage électromécanique.

Dans un premier temps, nous déterminons les points et les efforts de contact entre les particules à partir

du calcul mécanique, afin de calculer les rayons et les aires de contact. Dans un second temps, l'équation (7) permet de calculer les conductances électriques et cela pour chaque branche. Enfin, nous résolvons le système (6) pour déterminer les potentiels électriques en chaque point de contact. Les courants électriques quant à eux sont déterminés d'après la loi d'Ohm (5).

### 3 Applications numériques

#### 3.1 Système à deux particules

On considère, pour commencer, un milieu composé de deux billes en acier de diamètre  $d = 4mm$  représenté dans la figure 5(a). On applique une force  $F$  et un courant électrique  $I_0$  sur la paroi  $\Gamma_1$ , les parois  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  sont électriquement isolantes. Enfin, un potentiel nul est imposé sur la paroi  $\Gamma_3$ . Par conséquent, seules les conductances  $C_{12}$  et  $C_{23}$  ne seront pas nulles. Cela revient à résoudre un système simple de deux conductances en série. Une étude paramétrique permet de mettre en évidence l'influence de la force appliquée  $F$  sur le comportement électrique du milieu considéré.

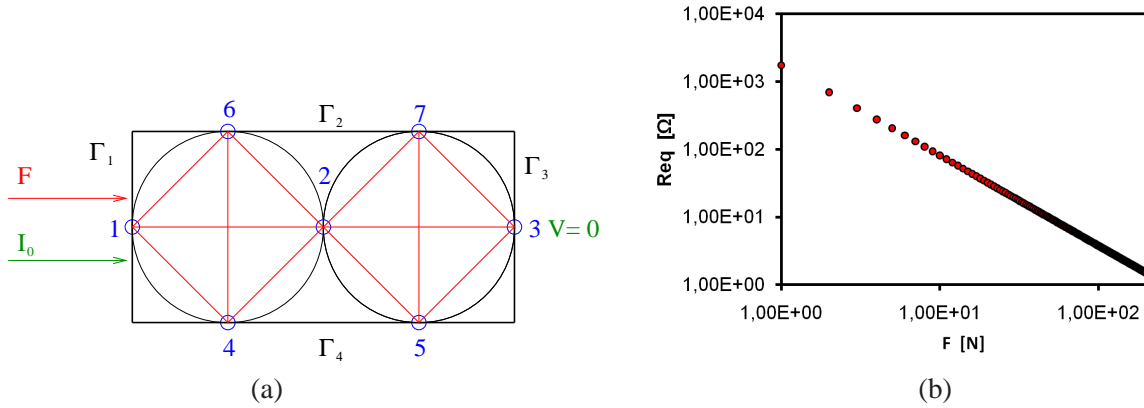


FIGURE 5 – (a) Modèle à deux billes en acier, (b) Variation de la résistance électrique en fonction de la force appliquée en échelle logarithmique.

Les surfaces de contact aux points (1, 2 et 3) sont identiques. On en déduit que les conductances  $C_{12}$  et  $C_{23}$  sont les mêmes :

$$C_{12} = C_{23} = C = \frac{\gamma S^2}{V}, \quad S = \pi \left( \frac{3F r_{eff}}{4E_{eff}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad C_{eq} = \frac{2}{C}$$

où  $C_{eq}$  désigne la conductance équivalente du milieu. En choisissant la force comme paramètre du modèle  $F \in [10 N, 180 N]$ , les billes en acier ont les propriétés mécaniques et électriques suivantes :  $E = 200 GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\frac{1}{\gamma} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega m$ .

La figure 5(b) représente la variation de la résistance équivalente  $R_{eq}$  en fonction de la force appliquée  $F$ . La résistance équivalente diminue avec l'augmentation de la force appliquée. Cette diminution est due à l'augmentation de la surface de contact. Les électrons auront alors plus de facilité à traverser les points de contact et cela dans le cas d'un contact électrique parfait (contact métal-métal). Les valeurs de la résistance électrique obtenues sont du même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux obtenus sur deux billes en acier de même propriétés électriques et mécaniques. Ce résultat est classique et permet de valider notre modèle avec d'autres travaux déjà existants dans la littérature [1][2].

#### 3.2 Système multi-contacts

Nous nous intéressons dans cette partie à la modélisation numérique par éléments discrets du transfert électrique dans un lit de billes tridimensionnel (voir fig 6(a)). Le lit de billes est disposé dans un cylindre de diamètre  $\phi = 5 cm$  et de hauteur  $h$  variable, permettant de contenir plusieurs couches de billes en acier de diamètre  $d = 2 mm$  (environ 400 billes par couche). Une force de compression et un courant électrique

sont appliqués sur la surface supérieure du cylindre en contact avec le milieu granulaire métallique. La surface latérale est électriquement isolante. L'objectif consiste à étudier le transfert électrique dans un milieu granulaire tridimensionnel, afin de mettre en évidence l'influence du nombre de particules sur les propriétés électriques globales. La figure 6(b) représente un milieu granulaire bidimensionnel assimilé à une coupe verticale effectuée sur le milieu granulaire (voir fig. 6(a)). Par conséquent, les simulations par éléments discrets seront mises en œuvre en 2D, chaque couche de billes sera composée de 20 billes.

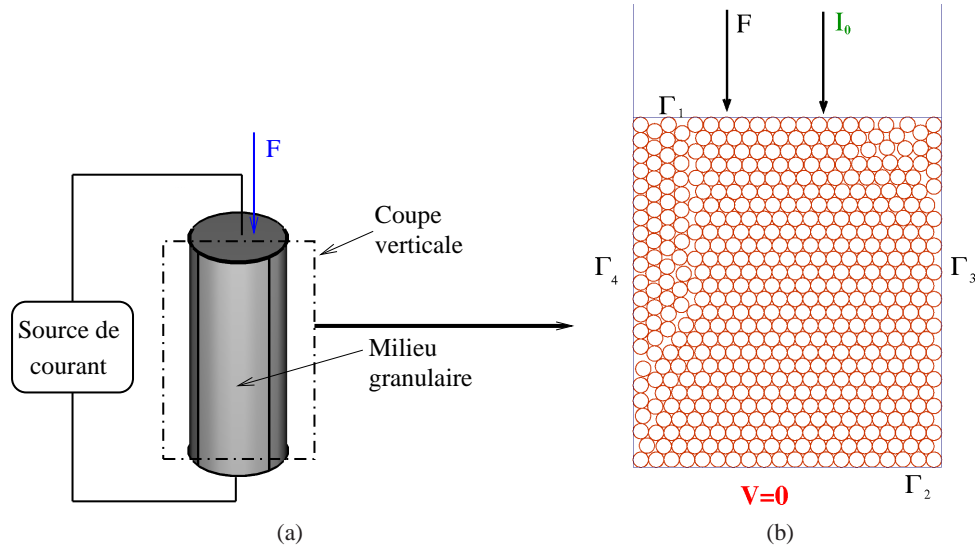


FIGURE 6 – Schéma descriptif du protocole expérimental et milieu granulaire bidimensionnel correspondant (coupe verticale).

Considérons un milieu granulaire bidimensionnel composé de 500 particules en acier<sup>1</sup> de diamètre  $d = 2 \text{ mm}$ . On applique un courant électrique  $I_0 = 10^{-2}$  et une force de compression  $F = 100 \text{ N}$  sur la paroi  $\Gamma_1$ . Les points de contact appartenant aux particules qui sont en contact avec la paroi  $\Gamma_2$  ont un potentiel électrique nul  $V = 0$ . Les parois verticales  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont électriquement isolantes. Les résultats numériques obtenus sont présentés dans la figure 7.

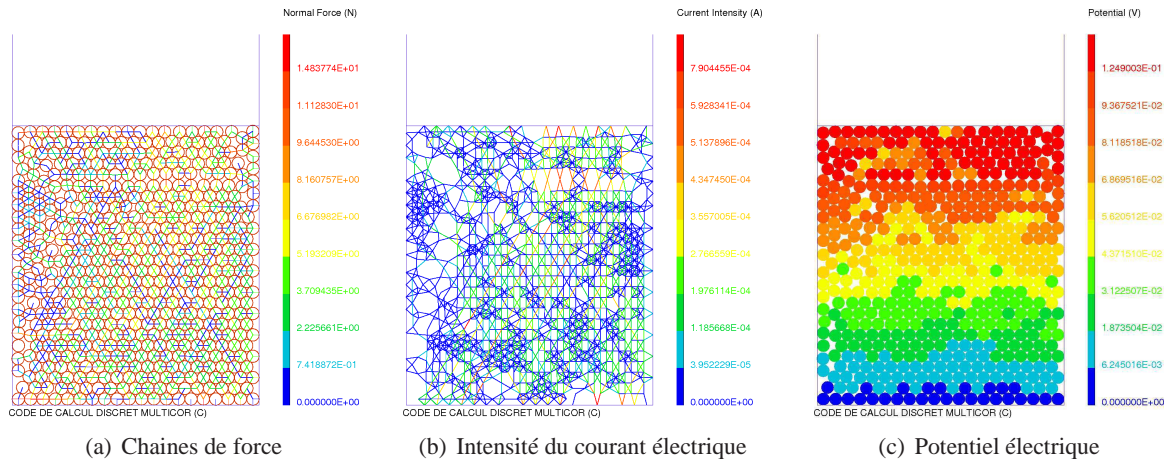


FIGURE 7 – Résultats numériques obtenus sur un milieu granulaire 2D avec  $F = 100 \text{ N}$  et  $I_0 = 10^{-2} \text{ A}$ .

La figure 7(a) illustre les chaînes de force entre particules au sein du milieu granulaire considéré. La distribution des efforts conditionne d'une manière directe les chemins et les intensités du courant électrique

1. Les propriétés électriques et mécaniques sont identiques à celles utilisées dans la section (3.1).

(voir fig. 7(b)). La conductance électrique dépend de la surface de contact donc de l'effort de contact, ce qui explique l'analogie entre la distribution des efforts et celle du courant électrique. La figure 7(c) représente la distribution du potentiel électrique dans le milieu granulaire, la valeur affectée à chaque particule est la moyenne arithmétique des potentiels électriques calculés en chaque noeud (point de contact). Soit  $N_c$  le nombre de couche avec  $N_c \in [5, 40]$  variant par pas de 5. Pour chaque  $N_c$  on fait varier la force appliquée  $F$  de 10 à 180 N et on calcule la résistance électrique équivalente  $R_{eq}$  correspondante du milieu granulaire considéré. Le courant électrique  $I_0$  imposé sur la paroi supérieure est fixé à 0.01 A.

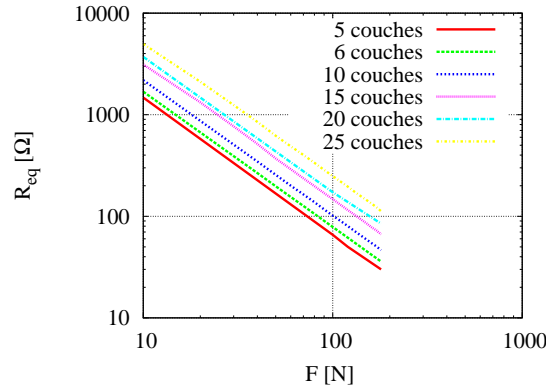


FIGURE 8 – Variation de  $R_{eq}$  en fonction de  $F$  en échelle logarithmique pour plusieurs couches de billes.

La figure 8 représente la variation de la résistance équivalente du milieu granulaire bidimensionnel en fonction de la force appliquée en échelle logarithmique. On remarque le même comportement de la résistance en fonction de la force, présenté précédemment (cas de deux billes en contact). Une augmentation de la force fait chuter la résistance électrique du milieu. Cela est dû d'une part à l'augmentation du nombre de points de contact, le courant électrique a donc plus de chemin à faire pour traverser le milieu granulaire. D'autre part, une force relativement élevée fait croître les surfaces de contact, par conséquent, la résistance globale du milieu diminue d'une manière significative. On remarque aussi que le nombre de couche  $N_c$  a une influence sur la résistance électrique équivalente. Celle-ci augmente avec l'augmentation du nombre de couche (nombre de billes). Pour différentes valeurs de  $N_c$  les courbes de la figure 8 sont parallèles, la pente est égale à  $-4/3$ . D'après les équations (7) et (8), on peut déduire que  $C \propto a^4$  et  $a \propto F^{1/3}$  donc  $C \propto F^{4/3}$ . Ce dernier résultat n'est valable que dans le cas d'un contact électrique parfait aucun phénomène de surface n'est pris en compte au niveau du contact (couche d'oxyde, effet tunnel, micro-pont,...).

La figure 9 compare les résultats expérimentaux et numériques obtenus dans le cas de 5 couches de billes (2000 en 3D et 100 en 2D). On obtient la même variation de la résistance électrique en fonction de la force que dans le cas expérimental. La résistance électrique diminue d'autant que la force augmente. Les deux courbes montrent un écart important pour des faibles forces par exemple pour une force  $F = 40$  N l'écart entre expérience et simulation est de l'ordre de 700  $\Omega$  et de quelques Ohm, pour des forces relativement élevées  $F \geq 300$  N.

La diminution de l'écart entre les résultats expérimentaux et numériques est due principalement à la destruction de la couche d'oxyde existante sur la surface des billes, sous effet de l'augmentation de la force de compression. Pour un chargement mécanique élevé, les résultats numériques ne prenant en compte que le contact métal-métal, sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux.



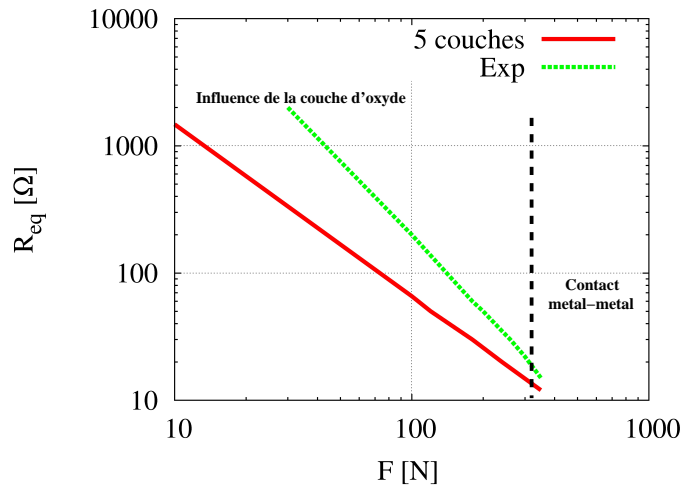


FIGURE 9 – Variation de  $R_{eq}$  en fonction de  $F$  en échelle logarithmique pour 5 couches de billes.

## 4 Conclusion

Cette étude a permis d'intégrer le transfert électrique dans le code MULTICOR. Un nouveau modèle de conductance électrique a été présenté, la modélisation électrique développée détermine le potentiel électrique dans les points de contact. Ce modèle permet d'obtenir des résistances électriques équivalentes, correspondant à des milieux granulaires en 2D du même ordre de grandeur que les valeurs expérimentales. Cela dans le cas d'un contact parfait. Un écart important est observé entre les résultats numériques et expérimentaux à faible force de compression, dû à des effets de surface qui ne sont pas pris en compte dans le modèle numérique élaboré. Cet écart diminue pour des forces relativement importantes et les résultats numériques sont en bon accord avec les valeurs mesurées.

Cette démarche ouvre la voie à une modélisation numérique plus fine du transfert électrique dans les milieux granulaires. D'une part, en intégrant les effets de surface (couche d'oxyde, effet tunnel, création de micro-pont...), et d'autre part, en couplant les effets électriques et thermiques. Ces derniers seront pris en compte en utilisant le couplage thermo-mécanique implémenté dans le code MULTICOR [8].

## Références

- [1] M. Creyssels., S. Dorbolo, A. Merlen, C. Laroche, B. Casting, and E. Falcon. *Some aspects of electrical conduction in granular system of various dimension*, The European Physical Journal E., 23, 255-264, 2007
- [2] E. Falcon, B. Castaing, M. Ceysseles. *Nonlinear electrical conductivity in a 1D granular medium*, The European Physical Journal B., 38, 475-483, 2004.
- [3] J. Fortin, G. de Saxcé. *Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bi-potentiel*, C. R. Acad. Sci., 327, série IIB, pp. 721-724, 1999.
- [4] R. Holm. *Electric Contact : Theory and Application*, Springer Verlag, 2000.
- [5] I. Sanni, E. Bellenger, J. Fortin, P. Coorevits. *A reliable algorithm to solve 3D frictional multi-contact problems : application to granular media*, Journal of computational and applied mathematics., 234, 1161-1171, 2010.
- [6] M. Jean. *The non-smooth contact dynamics method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering., 177, 235-257, 1999.
- [7] J.-J. Moreau. *Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials*, Eur.J. Mech., A/Solids., 13, 93-114, 1994.
- [8] V.D. Nguyen, C. Cogné, J. Fortin, M. Guessasma, E. Bellenger. *Discrete modelling of granular flow with thermal transfer : application to the discharge of silos*, Applied Thermal Engineering., 29, 1846-1853, 2009
- [9] M. Renouf, N. Fillot. *Coupling Electrical and Mechanical Effects in Discrete Element Simulations*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 74, 238-254, 2008.
- [10] G. de Saxcé and Z.-Q. Feng. *The bipotentiel method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms*, Math. Comput. Modelling., 28, 225-245, 1998.