

Simulation numérique des propagations des singularités au travers des arêtes dans les coques minces cas hyperbolique et parabolique

Philippe Karamian ¹

¹ LMNO-GM3N, Université Caen Basse-Normandie Bld Maréchal Juin 14032 Caen Cedex, France, {Philippe.karamian}@unicaen.fr

Résumé — Nous présentons des simulations numériques sur le phénomène de *réfraction* des singularités traversant une arête formée par deux coques adjacentes dont les surfaces moyennes sont de nature parabolique et/ou hyperbolique. Nous présentons également le cas d'une surface parabolique et elliptique. À partir d'exemples simples, clairs et précis construits pour effectuer les simulations numériques nous parvenons à illustrer le phénomène de *réfraction*. Il s'agit d'exhiber le comportement des singularités du point de vue numérique lorsqu'elles traversent une arête formée par deux coques adjacentes. Il apparaît alors que lorsqu'une singularité arrive sur l'arête, elle la traverse et se propage sur la ou les caractéristique(s) selon la nature de la coque sans perte de régularité. Les coques étudiées présentent des surfaces moyennes de nature parabolique ou hyperbolique.

Mots clés — Réfraction, Singularité, Coque, Éléments finis.

1 Introduction

On se place dans le cadre de la théorie linéaire des coques minces de Koïter. On considère donc une coque dont l'épaisseur relative ε est très petite. Elle présente un pli le long d'une courbe que l'on qualifie d'arête. Par ailleurs on suppose que cette courbe est non caractéristique. Les deux portions de coques ainsi reliées peuvent être de nature géométrique identique ou différente. Plus exactement, nous nous intéressons au cas des coques dont les deux portions de surfaces les constituant sont selon le cas parabolique-parabolique, elliptique-parabolique ou bien hyperbolique-hyperbolique. Le cas d'une surface elliptique parabolique et hyperbolique est également présenté.

Lorsque l'épaisseur relative ε de la coque tend vers zéro, le comportement de celle-ci est relativement bien décrit par le système membranaire et selon la nature géométrique de la coque ce système est elliptique, parabolique ou hyperbolique. En conséquence les caractéristiques du système membranaire sont les courbes asymptotiques et celles-ci sont au nombre de zéro, deux ou quatre selon que la surface est respectivement elliptique, parabolique ou hyperbolique. Il en résulte que les solutions du système membranaire jouissent des propriétés classiques de propagation des singularités le long des caractéristiques. Ainsi pour un chargement présentant une singularité du premier ordre portée par une caractéristique et normale à la surface de la coque, la composante normale du déplacement présente alors une singularité laquelle est décrite par des distributions $(\delta, \delta', \delta'', \dots$ selon la nature de la surface) et se propage le long des caractéristiques.

Dans [4], [9] nous montrons également que ces singularités ne satisfont pas aux propriétés classiques de réflexion aux frontières. En effet, celles-ci gagnent un degré de régularité. C'est pourquoi on les qualifie de pseudo-réflexions, alors que les singularités qui traversent les arêtes entre deux surfaces adjacentes conservent leur degré de régularité. Par la suite on suppose que la surface moyenne relativement aux conditions limites est géométriquement rigide c'est-à-dire *inhibée* au sens de la terminologie de [10]. La nature géométrique de la surface jouant un rôle fondamental, nous nous bornons aux cas des surfaces paraboliques (i.e. surfaces développables) et des surfaces hyperboliques car ce sont les seules surfaces qui présentent des caractéristiques

L'objectif de cette communication est de présenter des simulations numériques concernant des coques paraboliques et hyperboliques pour des singularités se propageant le long des caractéristiques et arrivant sur une arête sur laquelle des conditions de transmission sont prescrites. Il s'agit d'une part d'exiger la continuité des déplacements sur l'arête et, d'autre part, d'écrire que les angles sont figés.

Ce qui revient à dire que les deux coques sont mutuellement encastrées. Nous mettons en évidence un phénomène que nous qualifions de *phénomène de réfraction numérique* dans les coques minces. Il s'agit plus précisément d'exhiber le comportement des singularités traversant des arêtes entre des surfaces adjacentes et d'illustrer le *phénomène de réfraction* d'un point de vue numérique, par opposition au phénomène de pseudo-réflexion déjà étudié dans [4] [8] [9]. A partir des exemples qui sont décrits ci-après, Il apparaît qu'une singularité arrivant sur une arête traverse celle-ci et se propage le long du ou des caractéristiques sur l'autre portion de la coque adjacente, sans perte de régularité et chute significative de l'amplitude lorsque de part et d'autre du pli les coques sont de même nature c'est-à-dire hyperbolique ou parabolique et sans gain de régularité comme c'est le cas pour les pseudo-reflections.

Cette communication est organisée de la manière suivante. Dans la section 2 nous présentons la formulation du problème sous forme variationnelle avec les différentes énergies de déformation mises en jeu dans le cas d'une arête à angle figé ou encore mutuellement encastrée. Dans la section 3 sont rassemblées les différentes simulations numériques concernant les coques parabolique/ parabolique, hyperbolique/hyperbolique reliées par une arête sur laquelle est prescrite les conditions de transmission. Enfin nous concluons sur un exemple d'une coque dont une portion est elliptique et l'autre portion parabolique et hyperbolique. Comme le montre la figure, la singularité ne se propage pas sur la partie elliptique.

2 Formulation Variationnelle

Dans cette section nous donnons la nouvelle expression de la forme bilinéaire d'énergie qui apparaît dans la formulation variationnelle du problème d'élasticité pour le cas d'une coque présentant une arête à angle figé. L'expression de la forme bilinéaire d'énergie notée $a[.,.]$ est la somme des formes bilinéaires d'énergie associée à chacune des portions des coques

$$a[(u^-, u^+); (v^-, v^+)] = a^\varepsilon(u^-, v^-) + a^\varepsilon(u^+, v^+) \quad (1)$$

Où chaque forme bilinéaire $a^\varepsilon(u^-, v^-)$ et $a^\varepsilon(u^+, v^+)$ ont respectivement pour expression :

$$\begin{cases} a^\varepsilon(u^-, v^-) = a_m(u^-, v^-) + \varepsilon^2 a_f(u^-, v^-) = \int_{\Omega^-} [A_-^{\alpha\beta\lambda\nu} \gamma_{\alpha\beta}(u^-) \gamma_{\lambda\nu}(v^-) + \frac{\varepsilon^2}{12} A_-^{\alpha\beta\lambda\nu} \rho_{\alpha\beta}(u^-) \rho_{\lambda\nu}(v^-)] dx \\ a^\varepsilon(u^+, v^+) = a_m(u^+, v^+) + \varepsilon^2 a_f(u^+, v^+) = \int_{\Omega^+} [A_+^{\alpha\beta\lambda\nu} \gamma_{\alpha\beta}(u^+) \gamma_{\lambda\nu}(v^+) + \frac{\varepsilon^2}{12} A_+^{\alpha\beta\lambda\nu} \rho_{\alpha\beta}(u^+) \rho_{\lambda\nu}(v^+)] dx \end{cases} \quad (2)$$

où les formes bilinéaires a_m et a_f désignent respectivement, l'énergie de déformation en membrane et en flexion. Pour des $\varepsilon > 0$ le problème est elliptique et rentre dans le champ d'application du théorème de lax-milgram. L'espace d'énergie V est tel que, $a_m + \varepsilon^2 a_f$ y est continue et coercive. Cependant, à mesure que le paramètre ε tend vers 0, des phénomènes de type perturbation singulière apparaissent. L'espace V_m (espace d'énergie membranaire) est l'espace d'énergie pour laquelle a_m y est continue et coercive et doit être vu comme le complété de V pour la norme définie par $\sqrt{a_m(.,.)}$. Il est à noter que V_m contient des solutions moins régulières que celles de V , en conséquence, les solutions à $\varepsilon > 0$ appartiennent à V alors que la solution limite correspondant à $\varepsilon = 0$ présente des irrégularités si bien que la solution pour des ε très petit présente des couches internes lesquelles suivent les courbes caractéristiques correspondant aux lignes asymptotiques de la surface moyenne de la coque. Par ailleurs, la forme d'énergie correspond aux cas des arêtes à angle figé c'est-à-dire que nous avons les relations suivantes sur l'arête.

$$u_{\Gamma}^- = u_{\Gamma}^+ \text{ et } \delta\theta = 0$$

Dans la suite, nous ne considérons que le cas des coques inhibées, c'est-à-dire les coques dont la surface moyenne est géométriquement rigide. Le caractère *inhibé* (cf. [10]) de la coque est étroitement lié aux choix des conditions aux limites que nous imposons à tout ou partie de la frontière de celle-ci. Cela revient à éliminer les flexions pures ou encore les déplacements inextensionnels. On comprend alors que même si le problème pour $\varepsilon > 0$ est elliptique, pour des très petites valeurs de ε l'énergie de déformation dominante est a_m si bien que les solutions présentent des singularités le long des caractéristiques et donc se propagent le long des courbes asymptotiques de S . Dans les différentes simulations que nous présentons ici a_m sera ou bien parabolique ou hyperbolique.

Les coefficients $A_-^{\alpha\beta\lambda\nu}, A_+^{\alpha\beta\lambda\nu}$ ne dépendent uniquement que des caractéristiques mécaniques de la coque et des dérivées premières, secondes et troisièmes de l'application

$\Psi^- : \Omega \mapsto S^-$ (resp. $\Psi^+ : \Omega \mapsto S^+$) qui envoie Ω^- (resp. Ω^+) vers la surface moyenne S^- (resp. S^+). $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$ sont respectivement les composantes du tenseur de déformation et des variations de courbures. La forme linéaire notée $L[\cdot]$ représente le travail des forces extérieures et a pour expression :

$$L[(v^-, v^+)] = \int_{\Omega^-} f^- v^- dx + \int_{\Omega^+} f^+ v^+ dx \quad (3)$$

3 Résultats Numériques

Dans cette partie nous avons regroupé une série de résultats relatifs à différents tests numériques que nous avons effectués avec notre code de calcul qui tient compte de la nouvelle forme bilinéaire d'énergie associée aux coques ainsi que les conditions de transmission aux arêtes. Pour nos simulations nous introduisons deux cartes et deux domaines de référence pour modéliser la coque. Les cartes locales et les domaines de référence utilisés sont choisis de telle sorte que les lignes caractéristiques soient parallèles ou bien bissectrices des axes principaux selon que l'on traite un problème parabolique ou hyperbolique. Le domaine de référence est constitué de deux sous domaines notés respectivement Ω^- et Ω^+ ; Le pli est représenté par la courbe Γ dont l'équation générale est de la forme $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 = 0$. Nous avons, implémenté le problème à l'aide de deux types d'éléments finis d'une part les éléments de type Bell, et, d'autre part de type Hermite réduit (cf. [3]). Ces éléments sont aussi bien utilisé pour le calcul des composantes tangentielles que normale. L'intégration numérique des matrices de rigidité se fait respectivement à 12 et 6 points de Gauss pour les éléments de Bell et d'Hermite. La modélisation à l'aide des éléments finis de Bell est qualifiée de conforme alors qu'avec les éléments finis de type Hermite on parle d'une formulation non conforme (cf. [3]). Cela dit, les résultats dans le cas membranaire sont identiques, c'est pourquoi, seuls les résultats obtenus avec les éléments de type Hermite sont présentés. En outre, les calculs sont plus rapides à effectuer. Les différents maillages sont construits à l'aide du logiciel Modulf via la commande apnoxx laquelle exécute un fichier de commande en ligne.

Nous présentons dans l'ordre les simulations numériques obtenues pour le cas de coques où les deux portions de part et d'autre du pli sont de nature parabolique puis hyperbolique. Enfin, dans la dernière partie figure un exemple d'une coque formée de trois portions de coque dont l'une est de nature elliptique et les deux autres sont respectivement de nature parabolique et hyperbolique.

Au travers de trois exemples et selon la nature géométrique de la coque, nous mettons en évidence le comportement des singularités lorsque celles-ci traversent les arêtes formées par les surfaces adjacentes. Il apparaît clairement que le degré de la singularité est conservé après avoir franchi une arête formée par deux surfaces paraboliques ou hyperboliques et uniquement dans ce cas. En effet, dans le cas où une des portions de la coque est elliptique la *réfraction* n'a pas lieu contrairement aux autres cas.

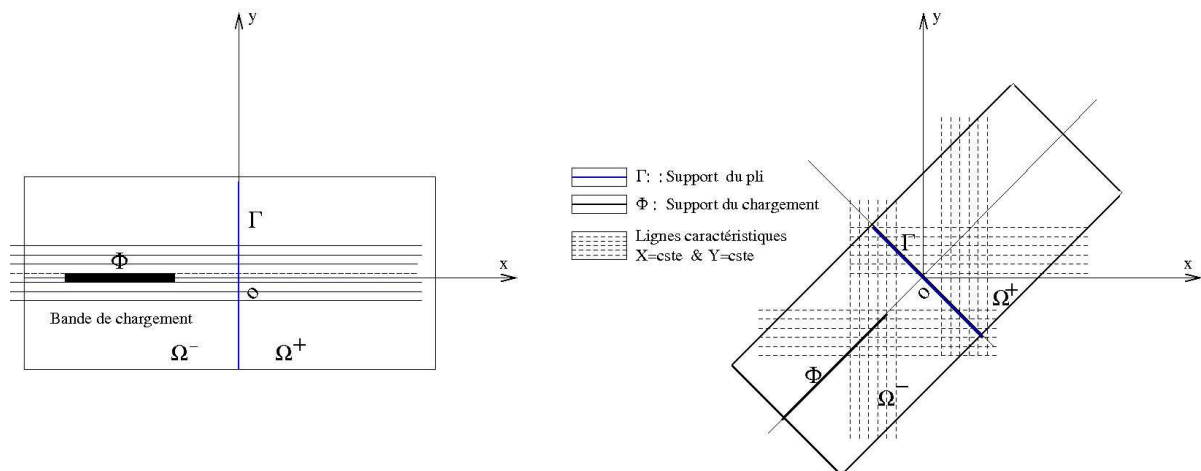


FIGURE 1 – domaine de référence utilisé respectivement à gauche pour le cas parabolique et à droite le cas hyperbolique

3.1 Cas des surfaces parabolique-parabolique : Exemple de deux cônes

Soit $S = S^- \cup S^+$ la surface paramétrée par l'application $\psi = \psi^- \cup \psi^+$:

$$\begin{aligned} \psi : \Omega &\longrightarrow S \subset E \\ (x, y) &\longmapsto \psi^-(x, y) = (x, (x + \alpha) \sin(2\pi y), (x + \alpha) \cos(2\pi y)) \\ (x, y) &\longmapsto \psi^+(x, y) = (x, -(x - \alpha) \sin(2\pi y), -(x - \alpha) \cos(2\pi y)) \end{aligned} \quad (4)$$

Pour notre première simulation nous considérons le domaine $\Omega = [-1, 0][-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \cup [0, 1][-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Le maillage est obtenu par symétrie du domaine rectangulaire ayant pour cotes $\Omega = [-1, 0][0, \frac{1}{4}]$ autour de l'axe $y = \frac{1}{4}$. Le matériau est isotrope homogène, avec un module d'Young fixé à 28500 Nm^{-2} et un coefficient de Poisson égale à 0.4. l'épaisseur de la coque ε est fixée à 1×10^{-3} . La coque est totalement encastree. Le cas de charge est définie de la manière suivante $\mathbf{f} = (0, 0, f^3)$ de sorte que l'aire du domaine fasse l'unité.

$$f_3 = \begin{cases} 16 \text{ dans } [-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}] \times [-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}] \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (5)$$

Comme on peut le constater sur les figures 2, avec le chargement (5) la composante normale du déplacement présente une singularité qui se propage le long de la caractéristique (cf. [4]). Les conditions de transmission sur le pli font naître le phénomène de réfraction laquelle induit une propagation de la singularité sur la coque adjacente sans perte de degré de la singularité ni de l'amplitude de la singularité. Sur les figures 2 sont également représentées du centre vers la droite deux coupes de u_3^h avant (respectivement après) la traversée de l'arête.

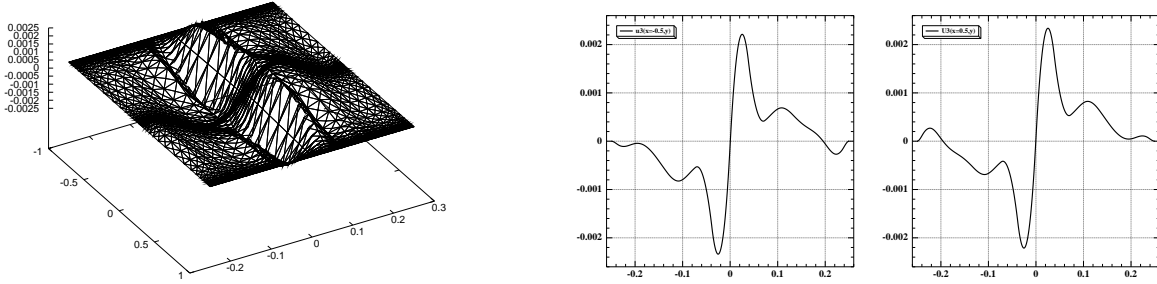


FIGURE 2 – A gauche graphe de U_3^h correspondant à la composante normale du déplacement, au centre tracé de $U_3^h(x = -\frac{1}{2}, y)$ avant de traverser l'arête. A droite, tracé de $U_3^h(x = \frac{1}{2}, y)$ après avoir franchi l'arête.

3.2 Cas des surfaces hyperbolique-hyperbolique

Soit $S = S^- \cup S^+$ la surface paramétrée par l'application $\psi = \psi^- \cup \psi^+$:

$$\begin{aligned} \psi : \Omega &\longrightarrow S \subset E \\ (x, y) &\longmapsto \psi^-(x, y) = (x, y, x + y + xy) \text{ pour } (x + y) \geq 0 \\ (x, y) &\longmapsto \psi^+(x, y) = (x, y, -(x + y) + xy) \text{ pour } (x + y) \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Pour notre seconde simulation nous considérons le domaine $\Omega = [-1, 0][-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [0, 1][-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Le maillage est obtenu par symétrie du domaine rectangulaire ayant pour cotes $\Omega = [-1, 0][0, -\frac{1}{2}]$ autour de l'axe $y = 0$ puis autour de l'axe $x = 0$. Les caractéristiques du matériau et les conditions aux limites sont les mêmes que précédemment. En ce qui concerne le cas de charge, nous en considérons deux, de nature différente. Le premier est définie de la manière suivante $\mathbf{f} = (0, 0, f^3)$ de sorte que l'aire du domaine soit égale à l'unité.

$$f_3 = \begin{cases} \frac{1600}{3} & \text{dans } [0, -\frac{3}{4}] \times [-\frac{1}{800}, \frac{1}{800}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (7)$$

le second cas de charge correspond à une charge définie sur un disque D de sorte que l'aire du domaine soit aussi égale à l'unité.

$$f_3 = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{dans le disque de centre A et de rayon r tel que } r \ll 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (8)$$

Sur la figure 2, avec les chargements (7 et 8) les singularités se propagent le long des caractéristiques. Ici les caractéristiques sont doubles car nous avons une coque hyperbolique. Les conditions de transmission sur le pli font clairement apparaître le phénomène réfraction induisant à son tour la propagation de la singularité sur la coque adjacente avec une légère atténuation des amplitudes.

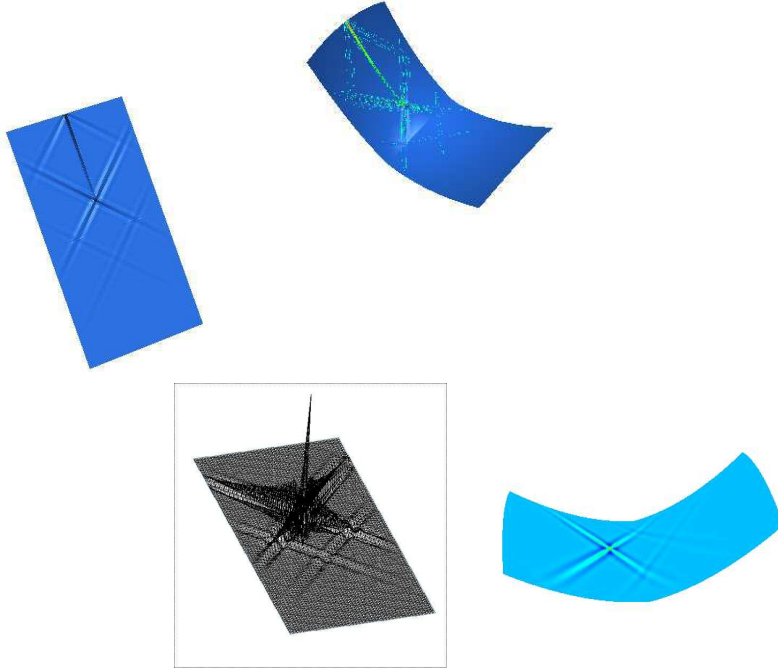


FIGURE 3 – À gauche tracé de U_3^h correspondant à la composante normale du déplacement. À droite visualisation de la déformée de la coque pour chacun des types de chargement

On remarquera que dans le cas du second chargement les singularités sont plus importantes.

Dans notre troisième simulation nous considérons une nouvelle carte locale définie par le domaine $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et la surface de la coque $S = S^- \cup S^+$ paramétrée par l'application $\psi = \psi^- \cup \psi^+$:

$$\begin{aligned} \psi : \Omega &\longrightarrow S \subset E \\ (x, y) &\longmapsto \psi^-(x, y) = (x, y, -x + y^2 - x^2) \text{ pour } (x + y) \geq 0 \\ (x, y) &\longmapsto \psi^+(x, y) = (x, y, x + y^2 - x^2) \text{ pour } (x + y) \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

L'arrête est dans ce cas portée par la droite d'équation $x = 0$. Les lignes asymptotiques sont les droites d'équation $x - y = cste$ et $y - x = cste$. Le maillage est obtenu par symétrie du carré défini par $[-1, 0] \times [-1, 0]$ autour de l'axe $y = 0$ puis autour de l'axe $x = 0$. Les caractéristiques du matériau et les conditions aux limites sont les mêmes que précédemment. En ce qui concerne le cas de charge, nous envisageons le chargement de type dirac au point A de coordonnée $(-\frac{3}{4}, 0)$, c'est-à-dire $\mathbf{f} = (0, 0, \delta_A(x, y))$.

Sur la figure 4, avec le chargement considéré les singularités se propagent le long des caractéristiques comme attendu. Les conditions de transmission sur le pli font clairement naître le phénomène de réfraction induisant à son tour la propagation de la singularité sur la coque adjacente avec une légère

atténuation des amplitudes. Il a noté qu'aux frontières de la coque nous observons le phénomène de pseudo-reflection (cf.[9])

Schema de principe

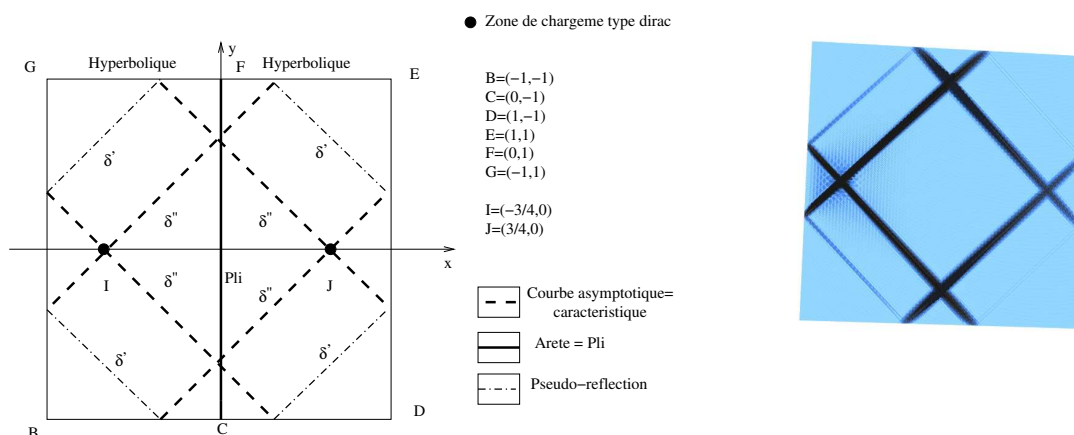


FIGURE 4 – A gauche, visualisation d'un schéma de principe pour visualiser les réfractons et les pseudo-réflexions sous-jacentes. À droite tracé de U_3^h correspondant à la composante normale du déplacement.

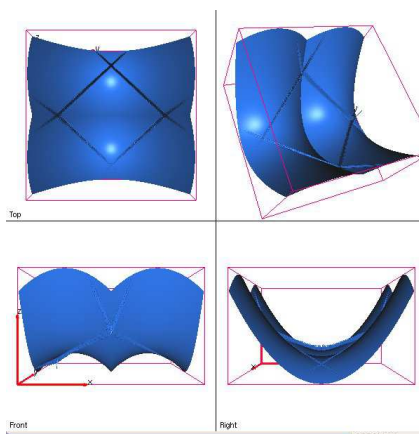


FIGURE 5 – Visualisation de la déformée de la coque pour le chargement correspondant. En partant d'en haut à gauche et dans le sens trigonométrique nous avons les vues de dessus, de profil, de droite et enfin une vue de biais de la coque déforméesur laquelle nous voyons les singularités .

Sur les figures 6 nous avons visualisé des coupes de la composante normale du déplacement de la coque avant et après passage de l'arête. Comme nous pouvons le remarquer les deux courbes sont de nature identique dans leur morphologie avec une atténuation des amplitudes. Un agrandissement au voisinage de $x= \frac{1}{2}$, nous permet de constater qu'il s'agit d'un δ'' conforme à la théorie sur la propagation des singularités dans les coques minces hyperboliques (cf. [7]).

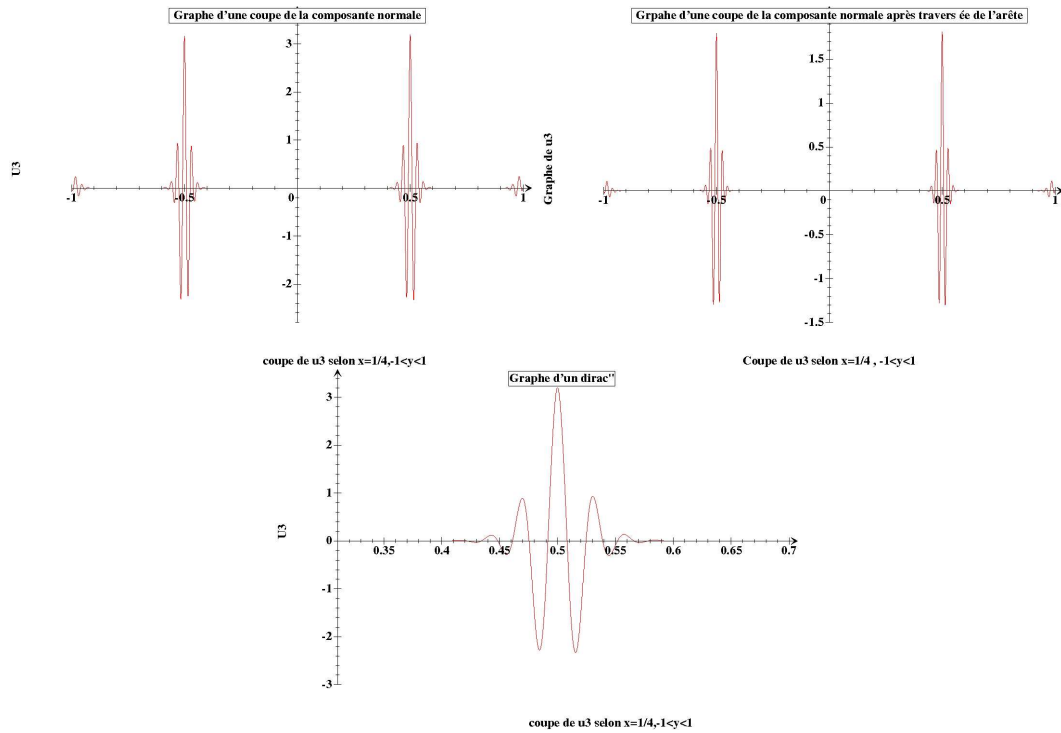


FIGURE 6 – À droite graphe d'une coupe de la composante normale le long de la droite d'équation $x = -\frac{1}{4}$. À gauche graphe d'une coupe de la composante normale le long de la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$. En bas un agrandissement de la courbe au voisinage de $x = \frac{1}{2}$. On constate que nous avons l'allure d'un $\frac{d^2\delta(s)}{ds^2}$

3.3 Cas des surfaces Elliptique-parabolique-hyperbolique

À présent nous illustrons un autre exemple de simulation numérique que nous avons réalisée avec notre code de calcul. La surface est composée de trois parties et de deux arêtes. La première surface est de nature elliptique, la seconde et la troisième sont respectivement de nature parabolique et hyperbolique. La coque est entièrement encadrée. Le chargement est de nature ponctuelle et appliqué uniquement sur les parties parabolique et hyperbolique de la surface. Il apparaît très clairement sur la figure 7, que la singularité générée sur les parties parabolique et hyperbolique se propagent selon les caractéristiques de chacune des surfaces. Les conditions de transmission sur les deux arêtes font apparaître le phénomène de réfraction. Il est à noter que la partie elliptique n'est en rien affectée par les singularités. Ceci est tout à fait conforme puisqu'il n'y a pas de courbes caractéristiques sur la partie elliptique.

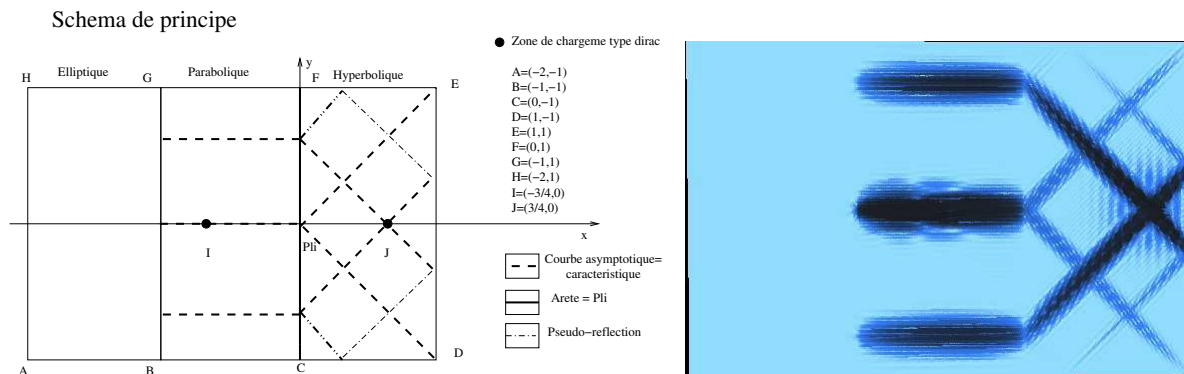


FIGURE 7 – À gauche, Visualisation d'un schéma de principe pour visualiser les réfractations et les pseudo-réflexions sous-jacentes. À droite, graphe de $U_3^h(x,y)$ correspondant à la composante normale du déplacement. Les singularités traversent l'arête mais uniquement sur la partie de la coque parabolique et hyperbolique.

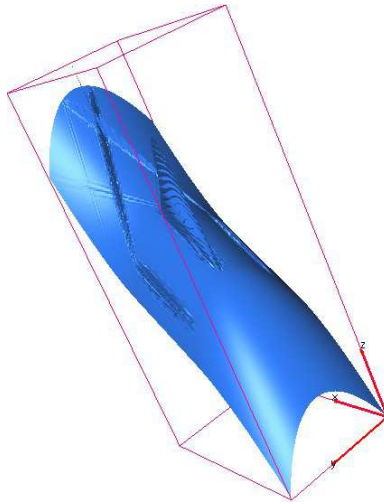


FIGURE 8 – Visualisation de la déformée de la coque sur laquelle nous voyons les singularités

Conclusion

Nous avons construit un code et un algorithme qui peut prendre en charge les arêtes pour aussi bien le cas parabolique que hyperbolique. Le résultat principal est que le degré de la singularité n'est pas affecté lors des phénomènes de réfraction dans le cas où les surfaces moyennes des coques sont de même nature. Nos simulations numériques indiquent qu'avant et après passage des arêtes, les amplitudes des singularités présentent une variation alors que les degrés de singularités sont maintenus. Le phénomène d'aplatissement de l'amplitude s'observe surtout dans le cas des surfaces hyperboliques. Le dernier exemple qui s'intéresse au cas des surfaces hyperbolique, parabolique versus elliptique exhibent un comportement différent. Par ailleurs, nous tenons à signaler que plus l'épaisseur de la coque est faible plus il faut raffiner et ceci est étroitement lié à l'épaisseur des couches internes. La connaissance des structures des couches internes [7] nous permet d'adapter la taille des mailles lors de nos simulations afin d'obtenir des résultats relativement fiables.

Références

- [1] BERNADOU, M. and CUBIER, A. 1998 Numerical analysis of junctions between thin shells. part2 : Approximation by finite element methods *Comput. methods Appl. Mech. Engrg.*, vol 161, pp. 365-387
- [2] BERNADOU, M. and CUBIER, A. 1998 Numerical analysis of junctions between thin shells. part1 : Continous problems *Comput. methods Appl. Mech. Engrg.*, vol 161, pp. 349-363
- [3] BERNADOU, M. 1994 Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Masson
- [4] KARAMIAN, Ph. Réflexion des singularités dans les coques hyperboliques inhibées. *Compt. Rend. Acad. Sci.* tome II 326. pp. 609-614
- [5] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2000. A model problem for boundary layers of thin elastic shells. *M2AN*, Vol.34, N° 1, pp. 1-30
- [6] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Boundary layers in thin elastic shells with developable middle surface. *European Journal of Mechanics A/Solis* 21, pp. 13-47
- [7] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Propagation of singularities and structure of layers in shells Hyperbolic case. *Computers and Structures* 80, pp. 747-768
- [8] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Non-smoothness in the asymptotics of thin shells and propagation of singularities. Hyperbolic case. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* Vol. 12, N° 1, pp. 81-90
- [9] KARAMIAN, Ph. and SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 2002. Pseudo-reflection phenomena for singularities in thin elastic shells. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*
- [10] SANCHEZ-HUBERT, J. and SANCHEZ-PALENCIA, E. 1997. Coques élastiques minces, propriétés asymptotiques. MASSON