



HAL
open science

**Oscillations parasites sous sollicitation rapide,
illustration par le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le
Bulge test rapide**

Vincent Grolleau, Gérard Rio, Laurent Mahéo, Bertrand Galpin, Arnaud
Penin

► **To cite this version:**

Vincent Grolleau, Gérard Rio, Laurent Mahéo, Bertrand Galpin, Arnaud Penin. Oscillations parasites sous sollicitation rapide, illustration par le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le Bulge test rapide. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592947

HAL Id: hal-00592947

<https://hal.science/hal-00592947>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Oscillations parasites sous sollicitation rapide, illustration par le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le Bulge test rapide

V. Grolleau¹, G. Rio¹, L. Mahéo²⁻³, B. Galpin², A. Penin¹

¹ LIMATB, Université de Bretagne Sud, France, {vincent.grolleau,gerard.rio}@univ-ubs.fr

² LMM, École Spéciales Militaires de Saint Cyr Coëtquidan, France, bertrand.galpin@st-cyr.terre.defense.gouv.fr

³ LAMEFIP, École Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Bordeaux, France, laurent.maheo@lamef.bordeaux.ensam.fr

Résumé — L'application d'un chargement rapide provoque l'apparition d'oscillations des grandeurs mécaniques mesurées. En simulation numérique, le schéma des différences finies centrées peut être remplacé par un schéma amortissant comme celui proposé par Tchamwa et Wielgosz. Un nouvel essai de bulge test dynamique, réalisé aux barres de Hopkinson, est présenté et illustre les stratégies qui peuvent être mises en place pour ne pas subordonner la qualité des mesures aux oscillations parasites engendrées par la trop rapide évolution du chargement.

Mots clés — schéma explicite, bulge test, barres de Hopkinson.

1 Instruction

L'étude du comportement des structures et des matériaux aux hautes vitesses de déformation, le comportement dynamique également dénommé comportement sous sollicitation rapide, est celui de l'étude des impacts, du crash de structures, de la mise en forme rapide, de l'usinage... Une sollicitation mécanique est qualifiée de rapide dès lors que ses temps caractéristiques d'évolution sont de l'ordre de grandeur des temps de propagation des ondes dans la structure soumise au chargement. Cette définition fixe d'emblée un lien fort entre phénomènes de propagation et sollicitation rapide.

Pour des structures métalliques en acier ou en aluminium, ces temps de propagation sont $l/\sqrt{E/\rho}$, sous l'hypothèse d'un milieu 1D élastique de module d'Young E et de masse volumique ρ . Dans le cas d'un échantillon, de taille caractéristique $10^{-1}m$, il apparaît que la période d'échantillonnage des acquisitions est nécessairement de l'ordre de la μs pour être à même de mesurer sa réponse transitoire, et la fréquence excitée par la propagation de l'ordre de $25kHz$. Cette fréquence rend impossible l'utilisation des cellules de force classiques dont la fréquence de résonance est généralement située entre 10 et $100kHz$. Dans le cas de structures, le temps de propagation ne semble pas limitant, mais le temps caractéristique d'évolution du chargement pourra lui être très inférieur. L'étude de la réponse de structures métalliques sous sollicitations rapide nécessitera donc des temps d'échantillonnage de l'ordre de la μs et une discrétisation spatiale à même de décrire des gradients forts sur des distances caractéristiques de l'ordre de $10^{-2}m$.

2 Schéma d'intégration temporelle explicite

Au niveau numérique, ces considérations conduisent le plus souvent à choisir un schéma d'intégration temporelle explicite, celui des différences finies centrée CFD (eq.1, [2]), associé à une discrétisation par éléments finis.

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{q}_n\end{aligned}\quad (1)$$

avec :

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{(q_n - q_{n-1})}{\Delta t} & \text{et} & \quad \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{(q_{n+1} - q_n)}{\Delta t} \\ \dot{q}_n &= \frac{(\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \dot{q}_{n-\frac{1}{2}})}{2} & \text{et} & \quad \ddot{q}_n = \frac{(\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{q}_{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t}\end{aligned}\quad (2)$$

L'apparition de hautes fréquences parasites, dont les conditions d'apparitions ne sont pas clairement établies, dans les signaux calculés conduit à ajouter une viscosité numérique à l'équation d'équilibre de manière à atténuer les effets de ces oscillations parasites. Basée sur les travaux de Von Neuman [5] et al. et Landshoff [4], cette méthode consiste à ajouter une pression numérique q^{bv} (eq.3) fonction linéaire et quadratique de la trace du taux de déformation \underline{D} , avec C_0 et C_1 des constantes, c la célérité des ondes sonores, ρ la masse volumique et L_e une longueur caractéristique de l'élément.

$$q^{bv} = \rho L_e [C_0 L_e (\text{tr } \underline{D})^2 - C_1 c (\text{tr } \underline{D})] \quad (3)$$

Cette méthode approuvée dans le milieu industriel est utilisée par défaut par de nombreux codes de calculs. Elle connaît toutefois des limites d'utilisation lorsque le champ de déformation est isochore, notamment dans les cas de torsion ; et son efficacité amortissante est fonction des paramètres employés pour décrire le matériau. Ainsi d'autres auteurs ont proposé des schémas d'intégration temporelle explicite amortissants comme Newmark, Zhai, Chung-Lee, Hulbert-Chung et plus récemment Tchamwa-Wielgosz [6].

Nous proposons dans cet exposé d'illustrer l'apparition des oscillations parasites et de présenter les caractéristiques essentielles du schéma d'intégration temporelle explicite amortissant proposé par Tchamwa et Wielgosz [6] dans le cas de chargements impulsionnels.

2.1 Schéma amortissant de Tchamwa et Wielgosz, TW

L'efficacité amortissante de ce schéma est pilotée par l'unique paramètre φ , et son écriture au pas de temps n , pour un pas de temps Δt , tel que $t = n\Delta t$, avec q le degré de liberté en déplacement conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \varphi (\Delta t)^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (4)$$

En dehors de tout amortissement physique, avec $\varphi \geq 1$, le pas de temps critique Δt_c de stabilité pour une pulsation propre du système ω est telle que :

$$\omega \Delta t < \sqrt{\frac{2}{\varphi - \frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t_c}{\Delta t_c^{CFD}} = \sqrt{\frac{1}{2\varphi - 1}} > 0.91 \quad (5)$$

Les valeurs usuelles de φ évoluent dans le domaine $[1; 1, 1]$; ce qui conduit à une faible réduction, eq.5, du pas de temps critique en regard de celui imposé par l'utilisation des différences finies centrée, Δt_c^{CFD} .

Dans le but de comparer les schémas CFD et TW pour un avancement d'un unique pas de temps, la position q_{n+1}^{tw} peut être exprimée en fonction des termes q_n , \dot{q}_n et \ddot{q}_n , i.e., en fonction des position, vitesse et accélération au pas de temps n . Pour une position q_n et une accélération \ddot{q}_n données, les deux schémas ne diffèrent que par les expressions des vitesses, calculées aux demi pas de temps dans le cas CFD et aux pas de temps dans le cas TW. Pour obtenir une égalité des schémas aux pas de temps antérieurs au pas $n + 1$, on peut considérer les vitesses \dot{q}_n^{tw} et \dot{q}_{n+1}^{tw} du schéma TW comme identiques aux vitesses $\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}$ et $\dot{q}_{n-\frac{1}{2}}$ du schéma CFD. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{q}_n^{tw} &= \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} = \dot{q}_n - \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_n \\ q_{n+1}^{tw} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n^{tw} + \varphi (\Delta t)^2 \ddot{q}_n = q_{n+1}^{cd} + (\varphi - 1) (\Delta t)^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (6)$$

Une expression similaire de la position au pas de temps $n + 1$, notée q_{n+1}^{dv} , peut être obtenue par un développement de Taylor à l'ordre 2 de la position au pas de temps $n + 1$ en considérant une expression décentrée selon le paramètre ζ de la vitesse $\dot{q}_{n+\zeta}$ entre les pas de temps $(n - \frac{1}{2})$ et $(n + \frac{1}{2})$. En exprimant $\dot{q}_{n-\frac{1}{2}}$ et $\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}$ en fonction de \dot{q}_n et \ddot{q}_n , eq.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n+\zeta} &= (1 - \zeta) \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} + \zeta \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} \\ q_{n+1}^{dv} &= q_n + \Delta t \dot{q}_{n+\zeta} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{q}_n \\ &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \zeta (\Delta t)^2 \ddot{q}_n \\ &= q_{n+1}^{cd} + (\zeta - \frac{1}{2}) (\Delta t)^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (7)$$

L'examen des équations eq. 6 and 7 met en évidence certaines caractéristiques du schéma de TW que nous listons maintenant :

- lorsque le paramètre de contrôle du schéma de TW est égal à un, $\varphi = 1$, les déplacements calculés sur un pas de temps selon les schémas de TW et CD sont identiques, et si l'équation d'équilibre ne dépend pas de \dot{q} , c'est à dire en l'absence de viscosité, alors, par récurrence, les deux schémas sont équivalents ;
- lorsque le paramètre de contrôle du schéma de TW est supérieur à un, $\varphi > 1$, le schéma de TW n'est plus d'ordre de précision 2 par rapport à un développement de Taylor en temps car l'expression de la position q_{n+1}^{TW} est perturbée de la quantité $(\varphi - 1)(\Delta t)^2 \ddot{q}_n$. Cette expression montre également que l'amortissement du schéma de TW sera dépendant de la taille du pas de temps de calcul Δt comme nous l'avons montré précédemment [6] ;
- le déplacement $(\varphi - 1)(\Delta t)^2 \ddot{q}$ introduit une force interne $\mathbf{K}(\varphi - 1)(\Delta t)^2 \ddot{q}_n$ dans l'équation d'équilibre. Dans le cas d'un déplacement q oscillatoire périodique, le déplacement $(\varphi - 1)(\Delta t)^2 \ddot{q}$ sera de signe opposé au déplacement q_n . L'utilisation du schéma de TW conduit donc à une expression de la force interne généralisée diminuée de la quantité $\mathbf{K}(\varphi - 1)(\Delta t)^2 \ddot{q}_n$, ce qui entraîne l'effet amortissant du schéma dans ce cas ;
- le schéma de TW peut être assimilé à un schéma d'intégration temporelle utilisant une expression décentrée de la vitesse au pas de temps n par rapport aux vitesses exprimées aux demi-pas de temps : $\dot{q}_{n+\zeta} = (1 - \zeta)\dot{q}_{n-\frac{1}{2}} + \zeta\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}$. On a alors $\varphi = \zeta + \frac{1}{2}$, et comme $\varphi \geq 1$, $\zeta \geq \frac{1}{2}$ et le schéma est décentré à droite.

3 Exemple numérique

3.1 Oscillations parasites

En l'absence d'une définition des oscillations parasites, il est nécessaire de préciser leur origine dans un cas unidimensionnel dont les solutions théoriques peuvent être déterminées. On considère un cylindre discrétisé en 100 éléments linéaires de longueur $L_e = 2mm$ et de section droite $S = 10mm^2$. Les caractéristiques du matériaux sont proches de celles d'un acier, de module d'Young $E = 210GPa$ et de masse volumique $\rho = 8000kg.m^{-3}$. L'extrémité droite est fixe, tandis que l'extrémité gauche, d'abscisse nulle, est soumise à un chargement impulsif, en vitesse nodale initiale ou selon un créneau de force, appliqué du pas de temps 1 au pas de temps 49.

3.2 Solutions théoriques

Plusieurs solutions théoriques existent pour un problème de compression élastique 1D en dynamique. La *solution théorique continue* ne dépend d'aucune discrétisation spatiale ou temporelle, et correspond dans ce cas à un simple transport temporel du chargement. La *solution théorique discrète* qui est présentée s'appuie sur la détermination de la solution théorique de l'équation différentielle temporelle du problème géométrique discrétisé.

3.2.1 Solution théorique du système discrétisé

Géradin [2] propose de calculer une solution analytique dans le cas d'oscillations libres résultant de conditions initiales non homogènes et sans sollicitation extérieure. Le mouvement est défini par le système :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= 0 \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}(0) &= \dot{\mathbf{q}}_0 \quad \text{donnés} \end{aligned} \quad (8)$$

En effectuant le changement de coordonnées :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{s=1}^n \mathbf{x}_{(s)} \eta_s(t) = \mathbf{X}\boldsymbol{\eta}(t) \quad (9)$$

où n est le nombre de modes propres de la structure discrétisée, \mathbf{X} est la matrice des modes propres normés par rapport à \mathbf{M} et $\boldsymbol{\eta}$ est le vecteur des coordonnées normales avec :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{(1)} \cdots \mathbf{x}_{(n)}] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta}^T(t) = [\eta_{(1)} \cdots \eta_{(n)}]$$

Géradin [2] propose la solution par superposition modale en déplacement suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{s=1}^n (\alpha_s \cos(\omega_s t) + \beta_s \sin(\omega_s t)) \mathbf{x}_{(s)} \quad (10)$$

avec \mathbf{M} et \mathbf{K} définies positives et où ω_s est la pulsation propre du $s^{\text{ème}}$ mode propre, α_s et β_s sont les coefficients de la décomposition en modes propres de \mathbf{q}_0 et $\dot{\mathbf{q}}_0$ respectivement et valent :

$$\alpha_s = \frac{\mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0}{\mu_s} \quad \text{et} \quad \beta_s = \frac{\mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0}{\mu_s \omega_s}$$

où les masses généralisées μ_s sont calculées grâce à $\mathbf{x}_{(s)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(s)} = \mu_s$. Lorsque le chargement consiste en une vitesse initiale $\dot{q}_0 = 1000 m.s^{-1}$ appliquée au noeud situé à l'extrémité libre de la barre, le déplacement du noeud situé à $98mm$ de l'extrémité libre est fortement oscillant comme le montre la Fig.1. Pour un chargement équivalent, la solution théorique du système continu serait une succession de créneaux d'amplitude $0,2mm$. La *solution théorique discrète* apparaît ici comme perturbée, par rapport à la *solution théorique continue*, par un ensemble de hautes fréquences dont l'origine peut être attribuée à la discrétisation spatiale et qui sont communément qualifiées "d'oscillations parasites".

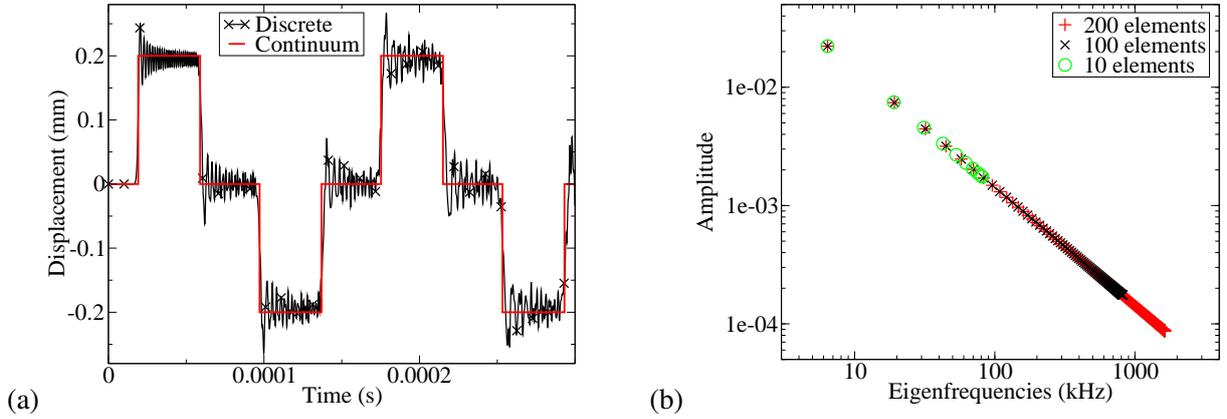


FIGURE 1 – (a) Solutions théoriques discrétisée et continue, barre discrétisée en 100 éléments, déplacement du noeud situé à $98mm$ de l'extrémité libre de la barre. (b) Amplitude β_s en $[mm]$ de chaque fréquence propre f_s de la barre discrétisée en 10, 100 et 200 éléments, échelles logarithmiques.

3.3 Effet de la densité du maillage

La barre est maintenant discrétisée avec différents nombres d'éléments. La Fig.1 présente l'amplitude β_s de chaque fréquence propre $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ de cette barre discrétisée par 10, 100 et 200 éléments. Le résultat est un spectre d'un nombre fini de fréquences propres, égal au nombre de degrés de liberté de la barre. Les couples $(\beta_s; f_s)$ s'alignent pour chaque discrétisation sur une même droite décroissante de pente -1 . Raffiner la discrétisation entraîne un spectre plus fourni en hautes fréquences ; et chercher à atteindre la *solution théorique continue* en obtenant un spectre composée d'une infinité de fréquences propres nécessite de faire tendre le nombre d'éléments vers l'infini [2]. Finalement, l'utilisation d'un nombre limité d'éléments dans la discrétisation spatiale entraîne un nombre limité de fréquences pour représenter le phénomène de propagation d'ondes. L'origine des oscillations parasites dans la *solution théorique discrète* peut alors être interprétée au niveau fréquentiel comme (i) un manque de fréquences pour représenter le phénomène de propagation d'onde plutôt que l'apparition de fréquences parasites nouvelles comme le laisse supposer l'appellation "oscillation parasite"; (ii) une lacune de l'interpolation spatiale utilisée à représenter un large spectre fréquentiel.

3.4 Solution par éléments finis

Une résolution par éléments finis du problème précédent est mise en place avec une discrétisation temporelle de type différences finies centrées, une matrice masse diagonale et dans le cas d'un chargement de type vitesse nodale initiale. Le pas de temps critique $\Delta t_c = \frac{L_c}{c}$ est de l'ordre de $3,9 \cdot 10^{-7} s$ et nous appliquons deux pas de temps différents, i.e. $\Delta t = 90\% \Delta t_c$ puis $\Delta t = 1\% \Delta t_c$. Les résultats numériques en déplacement sont comparés à la *solution théorique discrète* sur la Fig.2. On constate la présence d'oscillations parasites pour la *solution théorique discrète* et la solution par éléments finis (FEM). Lorsque le pas de temps est réduit à $1\% \Delta t_c$, l'erreur engendrée par le schéma d'intégration temporelle diminue et le signal de la solution FEM devient comparable à celui de la *solution théorique discrète*.

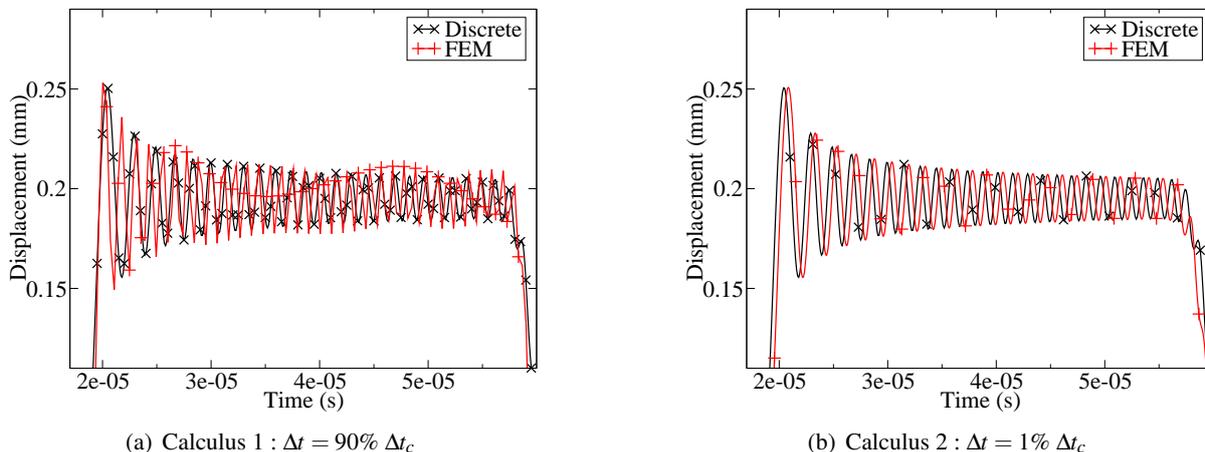


FIGURE 2 – Comparaison de la solution théorique discrétisée aux résultats numériques.

Cet exemple permet également de comparer l'ordre de grandeur des erreurs dues respectivement à l'intégration spatiale (le déplacement est ici sur-estimé de près de 25% dans les oscillations parasites) alors que l'erreur temporelle ne semble produire qu'un léger déphasage des oscillations parasites.

3.5 Solution par éléments finis avec amortissement

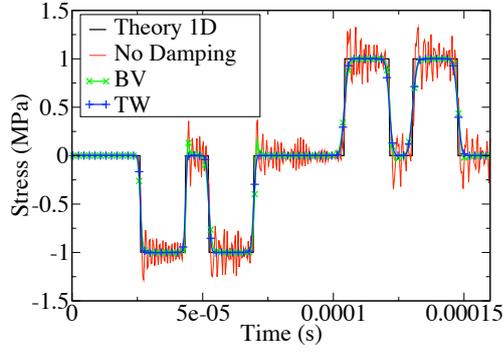
Le problème uni-dimensionnel précédent est repris avec un chargement de type créneau de force. Dans le but d'isoler les calculs des effets de la taille du pas de temps, le même ratio global $r_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta t_c} = 90\%$ est appliqué à chaque calcul. Nous définissons également un pas de temps critique individuel (i.e. pour chaque élément de longueur L_i) $\Delta t_c^i = \frac{L_i}{c}$ et un ratio individuel $r_{\Delta t}^i = \frac{\Delta t}{\Delta t_c^i}$.

Les valeurs par défaut proposées par les codes de calcul industriels sont adoptées pour les paramètres de Bulk Viscosity, i.e. $C_0 = 1,44$ et $C_1 = 0,06$. Pour obtenir un amortissement du même ordre de grandeur, quantifié par la perte d'énergie mécanique, le paramètre de pilotage du schéma de TW est ajusté à la valeur $\phi = 1,0332$.

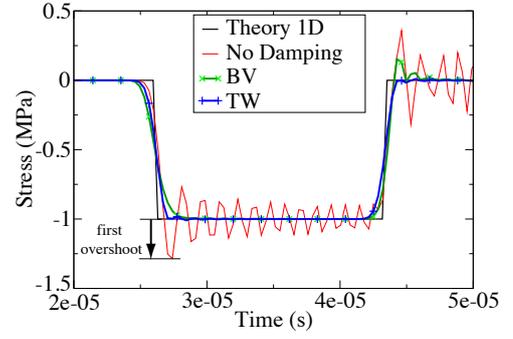
Comme cela est visible Fig.3, les deux méthodes amortissent rapidement les oscillations parasites visibles sur la réponse non amortie référencée "No Damping".

3.5.1 Effet d'un raffinement du maillage

L'amortissement obtenu avec chaque méthode est étudié pour des maillages homogènes composés de 100 et 1000 éléments. Dans ce cas, les pas de temps critiques individuel et global sont identiques $\Delta t_c^i = \Delta t_c$, ainsi que les ratios de pas de temps $r_{\Delta t}^i = r_{\Delta t}$. L'énergie mécanique résiduelle est affichée Fig.5(a) en fonction du temps et du nombre de pas de temps de calcul, où pour simplifier, seuls les résultats obtenus avec le schéma TW sont affichés puisqu'ils coïncident avec ceux obtenus avec la méthode du BV. Lorsqu'il est affiché en fonction du temps, l'amortissement obtenu avec le schéma TW (et BV) est dépendant de la taille des éléments utilisée dans le maillage, et par exemple 80% de l'énergie initialement introduite est encore présente après un temps de propagation de $7,56 \cdot 10^{-5} s$ et $8,56 \cdot 10^{-4} s$ avec les maillages composés respectivement de 1000 et 100 éléments. Par contre, ces deux temps correspondent



(a) 1^{ier} et 2nd aller-retours de l'onde.



(b) 1^{ier} passage de l'onde.

FIGURE 3 – Comparaison des deux méthodes d'amortissement BV et TW. Contrainte en fonction du temps à l'abscisse 133mm.

à un même nombre de pas de temps de calcul ($2120\Delta t$) et l'amortissement obtenu avec le schéma TW (et BV) sous chargement impulsionnel se montre indépendant de la taille de maille d'un maillage homogène lorsqu'il est exprimé en fonction du nombre de pas de temps comme cela est montré Fig.5(a).

3.5.2 Effet de l'irrégularité du maillage

Pour obtenir un maillage irrégulier à partir du maillage régulier, un positionnement aléatoire est appliqué pour tous les noeuds compris entre les deux extrémités de la barre selon :

$$x_{new} = x_{old} + \alpha_1 \frac{\bar{L}_e}{2} (1 - \alpha_2) \quad (11)$$

où x_{new} est la nouvelle coordonnée du noeud et x_{old} la coordonnée du même noeud dans le maillage régulier. Le paramètre $\alpha_1 \in [0, 1]$, choisi pour un maillage donné, définit l'amplitude maximale du déplacement et $\alpha_2 \in [0, 2]$ est un nombre aléatoire, tiré pour chaque noeud. Une portion du maillage de 200mm est représentée Fig.4, la longueur du plus petit élément est 0,33mm et celle du plus grand élément 3,81mm, ce qui conduit à une taille de pas de temps critique de $0.65 \cdot 10^{-7}s$ pour le maillage inhomogène, alors qu'elle était de $3.91 \cdot 10^{-7}s$ dans le cas du maillage homogène précédent.

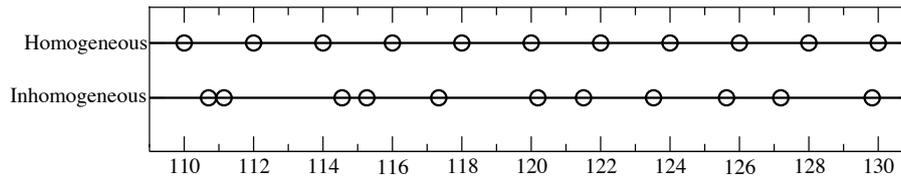


FIGURE 4 – Vue des positions des noeuds d'une partie des maillages homogènes et inhomogènes 1D.

Comme précédemment, l'évolution temporelle de l'énergie mécanique est tracée soit en fonction du temps soit en fonction du nombre de pas de temps de calcul pour le schéma de TW Fig. 5(b). Dans ce dernier cas, nous constatons une baisse de l'efficacité amortissante lorsque le maillage passe d'homogène à inhomogène, avec par exemple, 65% de l'énergie initiale encore présente après une propagation calculée sur respectivement $6860\Delta t$ et $7450\Delta t$ avec les maillages homogène et inhomogène. Comme nous l'avons montré, l'amortissement du schéma TW est relié au ratio des pas de temps $r_{\Delta t}$ par l'expression $(\Delta t)^2 \ddot{q}_n$ proportionnelle à $(r_{\Delta t})^2 q_n$ pour un déplacement q oscillatoire périodique. Dans le cas d'un maillage inhomogène, le ratio individuel est plus petit que le ratio global $r_{\Delta t}^i \leq r_{\Delta t}$, ce qui entraîne une baisse de l'efficacité amortissante du schéma de TW.

Dans le cas de l'utilisation de la méthode BV, l'amortissement est d'autant plus fort que le maillage est irrégulier. Ce résultat est visible Fig.6 où les résultats référencés homogeneous et mesh2 correspondent respectivement aux deux cas précédents homogène et inhomogène, et le cas mesh1 est un maillage inhomogène intermédiaire faiblement irrégulier avec une taille de maille comprise entre 1,62mm et 2,34mm.

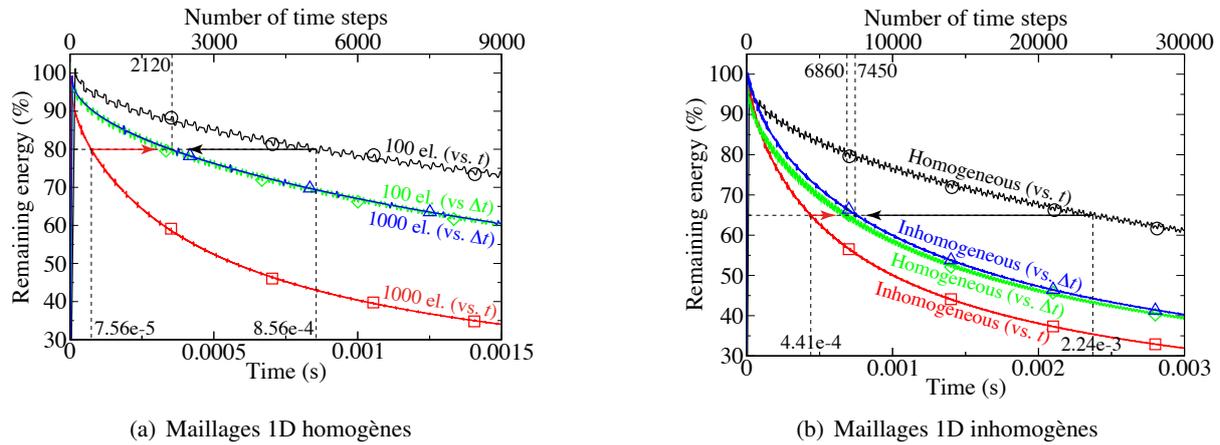


FIGURE 5 – Évolution de l'énergie mécanique pour différents maillages 1D avec le schéma de TW.

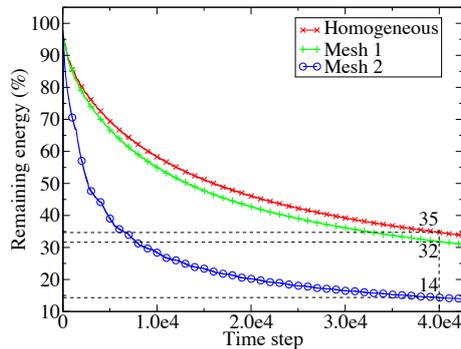


FIGURE 6 – Évolution de l'énergie mécanique pour différents maillages 1D avec la méthode BV.

3.6 Bilan

Dans le cas de maillages 1D homogènes, les deux méthodes étudiées sont efficaces et amortissent rapidement les oscillations parasite. Il est possible de régler l'amortissement en agissant sur la valeur du paramètre d'amortissement de chaque méthode, C_1 pour le BV et φ pour le schéma de de TW.

Pour le chargement de type "créneau de force" utilisé, l'amortissement obtenu avec chaque méthode est indépendant du nombre d'éléments si on considère l'amortissement en fonction du nombre de pas de temps. Cependant, exprimé en fonction du temps, l'amortissement des deux méthodes augmente avec la finesse du maillage.

Dans le cas de maillages 1D non-homogènes mais avec le même nombre d'éléments, on montre que le schéma TW dissipe la même quantité d'énergie à chaque pas de temps quel que soit le maillage utilisé. La méthode BV dissipe d'autant plus d'énergie à chaque pas de temps que le maillage est irrégulier.

Ce bilan permet de mieux définir les cas pour lesquels le schéma TW semble le plus adapté, i.e. les cas de chargement impulsionnel, où il peut être utilisé comme une méthode numérique systématique à même de limiter l'apparition et la propagation de fréquences parasites.

4 Essai de bulge test rapide

Sur un plan expérimental, l'exploitation de la propagation d'une unique onde élastique le long d'une barre élançée permet dans le montage des barres dites de Hopkinson de se prémunir de l'utilisation de capteurs de force et de déplacement. Mais son exploitation directe demeure limitée à l'emploi de géométries d'échantillons très simples comme des pions cylindriques de compression. Par ailleurs, les sollicitations rencontrées en mise en forme ou au cours de crash sont souvent multiaxiales et s'appliquent à des structures fines, alors qu'aucun essais rapide classique ne permet ce type de sollicitation. En 2008, Grolleau et al. [3] ont proposé un montage de bulge test rapide présenté Figure 7 intégré au sein d'un jeu

de barres viscoélastiques de Hopkinson permettant une sollicitation en expansion biaxiale de tôles fines jusqu'à des vitesses de déformation équivalentes de $800s^{-1}$. L'exploitation de ces essais recourt à une identification paramétrique du comportement de la tôle via une simulation numérique de l'essai.

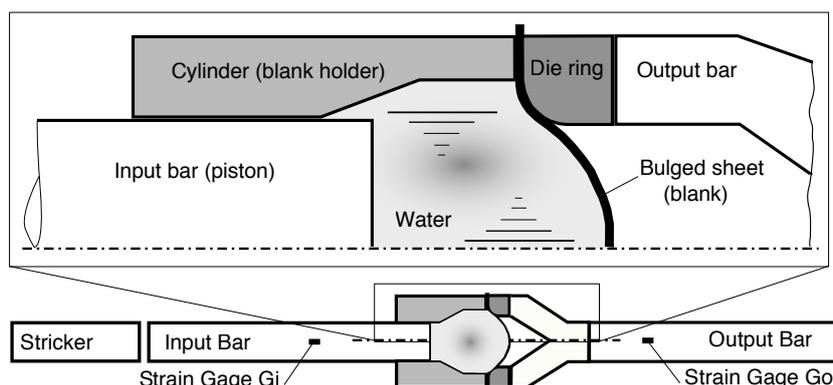


FIGURE 7 – Essai de bulge test rapide. La cellule est placée entre la barre d'entrée et la barre de sortie d'un banc de compression de Hopkinson.

Dans le cas des essais aux barres de Hopkinson, l'essai est le fruit d'une interaction entre les barres et le montage engendrée par l'arrivée de l'onde incidente, elle-même issue du choc entre le projectile et la barre d'entrée [7]. Faut-il dans ce cas simuler le choc initial, ou bien utiliser comme chargement l'onde incidente mesurée, ou bien encore le déplacement ou la force en bout de barre ? Simuler le choc initial ou bien appliquer l'onde incidente mesurée nécessiterait une simulation très lourde de l'ensemble de la barre d'entrée avec une loi de comportement visco-élastique. De plus, les oscillations parasites générées au cours de ce calcul perturberaient l'identification, alors que le transport des ondes dans un cylindre visco-élastique peut être résolu séparément par une méthode semi-analytique [1]. Nous avons donc choisi d'utiliser les ondes transportées en bout de barre comme paramètre d'entrée de la simulation numérique, et de limiter l'utilisation de méthodes amortissantes. Le chargement utilisé dans la simulation peut alors être de deux formes : (i) l'onde incidente mesurée transportée en bout de barre d'entrée et appliquée à une modélisation élastique de la barre avec un coefficient de poisson nul pour éliminer tout effet de dispersion géométrique déjà pris en compte ; (ii) le déplacement mesuré en bout de barre d'entrée appliqué à l'eau. Ces deux chargements se sont montrés équivalents vis-à-vis de l'identification des paramètres.

Références

- [1] M. Bussac, P. Collet, G. Gary, and O. Ramzi. *An optimisation method for separating and rebuilding one-dimensional dispersive waves from multi-point measurements. Application to elastic or viscoelastic bars.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 50(2) :321-349, 2002.
- [2] M. Géradin, D. Rixen. *Mechanical vibrations : theory and applications to structural dynamics.* John Wiley & Son Ltd, 1997.
- [3] V. Grolleau, G. Gary and D. Mohr. *Biaxial Testing of Sheet Materials at High Strain Rates Using Viscoelastic Bars,* Experimental Mechanics ,293-306 , 2008.
- [4] Landshoff, R.. *A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks,* technical report, Los Alamos National Laboratory , 1955.
- [5] Von Neuman, J. and Richtmeyer, R.D. *A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks,* Journal of Applied Physics, 232-237, 1950.
- [6] G. Rio, A. Soive, V. Grolleau. *Comparative study of numerical explicit time integration algorithms,* Advances in Engineering Software, 252-265, 2005.
- [7] L. Rota. *Application de méthodes inverses au dépouillement de l'essai aux barres de Hopkinson.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1997.