



HAL
open science

Méthode de Relaxation Dynamique incrémentale

Javier Rodriguez Garcia, Gérard Rio, Jean-Marc Cadou, Julien Troufflard

► **To cite this version:**

Javier Rodriguez Garcia, Gérard Rio, Jean-Marc Cadou, Julien Troufflard. Méthode de Relaxation Dynamique incrémentale. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592946

HAL Id: hal-00592946

<https://hal.science/hal-00592946>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode de Relaxation Dynamique incrémentale

J. Rodriguez¹, G. Rio¹, J.M. Cadou¹, J. Troufflard¹

¹ LIMATB, Université de Bretagne-Sud, France

{javier.rodriguez-garcia, gerard.rio, jean-marc.cadou, julien.troufflard}@univ-ubs.fr

Résumé — Dans le contexte de la recherche de forme de structures souples gonflées, on présente une généralisation de la méthode de Barnes-Han-Lee à des éléments quelconques 2D-3D. La méthode est ensuite adaptée aux chargements incrémentaux, permettant également ainsi d'obtenir les pseudo-équilibres des phases intermédiaires. Enfin, la méthode est testée avec succès dans le cas de l'utilisation d'une loi incrémentale non réversible.

Mots clés — Relaxation dynamique, Structures gonflables, Recherche de forme

1 Introduction et objectif

Dans le domaine de la recherche de forme (voir par exemple : de structures architecturales [1], de câbles [2] ou de structures gonflables [4]), l'obtention de la forme finale de la structure calculée est le seul objectif fixé. Ainsi, des méthodes de Relaxation Dynamique (RD) sont classiquement utilisées pour accélérer le calcul vers la solution finale. Notons que la phase transitoire, pendant laquelle la structure n'est pas stable, est dans ce cas non physique.

La forme classique de RD (voir par exemple [5], [6]) repose sur la recherche de l'amortissement critique via une viscosité artificielle. Dans notre cas, on s'intéresse à une méthode différente proposée en particulier par Barnes [3] pour des éléments câble, puis élargie par Han et Lee [7] à des éléments triangulaires. Cette méthode repose sur la combinaison d'une Relaxation (ou amortissement) Cinétique (remise à zéro de la vitesse à chaque pic d'énergie cinétique), utilisée en particulier en recherche de forme sur des structures tendues, et d'une optimisation de la matrice masse (proposée par Han et Lee).

Dans ce travail, nous proposons de généraliser la méthode de Barnes-Han-Lee à des éléments quelconques : interpolations linéaires et quadratiques, découpages 2D et 3D. Ensuite la méthode est déclinée sous forme incrémentale, permettant alors de suivre un trajet de chargement quasi-statique donné (fixé en étapes intermédiaires, pour lesquelles l'équilibre à la fin de chaque incrément est calculé). Cette méthode se présente alors comme une alternative intéressante aux méthodes itératives classiques (type Newton-Raphson), dans le cas où l'équilibre est instable.

2 Nouvelles formulations

A partir du modèle de Barnes [3], pour le calcul de la matrice masse Han et Lee [7] ont proposé l'expression d'une masse arbitraire m_i pour le noeud "i", calculée en vue de conserver la stabilité numérique (via la condition CFL) :

$$m_i = \lambda \frac{\Delta t^2}{2} k_{imax} \quad \text{avec} \quad k_{imax} = \sum_e \frac{e_p}{4 S_0^e} \left(\frac{E}{1-\nu^2} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy} \right) \quad (1)$$

L'expression est établie pour des éléments triangulaires et une loi élastique linéaire de paramètres E et ν avec : Δt l'incrément de temps fixé arbitrairement à 1, e_p et S_0^e l'épaisseur et la surface de l'élément "e", σ_x , σ_y , σ_{xy} les contraintes dans le plan de l'élément selon un repère orthonormé, et la sommation effectuée sur l'ensemble des éléments contenant le noeud "i". λ est un paramètre global ajusté pour optimiser le processus de stabilisation d'un type de structure.

J. Troufflard ([4]) propose de supprimer le terme S_0^e de manière à obtenir une grandeur m_i homogène à une masse. Il montre alors que le paramètre λ optimum pour un jeu de maillages différents, est alors bien plus stable que pour la formule originale.

Dans ce travail, nous proposons deux voies pour généraliser les précédentes approches. Une première idée est d'étendre l'expression de k_{imax} de (1) : la partie contrainte par une combinaison d'invariants permettant ainsi de prendre en compte des éléments quelconques, la partie comportement par une combinaison linéaire d'un module de compressibilité "K" et de cisaillement " μ ", permettant a priori d'utiliser une loi de comportement plus générale.

$$k_{imax} = \sum_e \frac{l_e}{4} \left(\alpha K + \beta \mu + \gamma \frac{trace(\sigma)}{3} + \frac{\theta}{2} \sigma_{mises} \right) \quad (2)$$

avec l_e une grandeur caractéristique géométrique valant pour des éléments 2D : l'épaisseur de l'élément et pour des éléments 3D : la racine cubique du volume.

Notons que la présence des termes en contraintes nécessite une mise à jour de la matrice masse au cours de l'avancement du calcul. Cependant, dans le cadre de nos simulations, quelques soient les cas considérés, l'influence des termes de contraintes s'est révélée très faible, due aux ordres de grandeur très différents entre K et $trace(\sigma)$ par exemple.

La seconde voie se réfère aux éléments théoriques proposés par Underwood [8] en utilisant le théorème de Gerschgorin qui permet d'obtenir une borne supérieure à la valeur propre " i " de la matrice de raideur "K" du système :

$$\rho_i \leq \sum_j |K_{ij}| \quad (3)$$

La matrice masse est alors construite pour satisfaire la condition CFL avec un pas de temps unitaire.

$$m_i = \frac{\lambda}{2} MAX_{k=1}^3 (\rho_{3(i-1)+k}) \quad (4)$$

Contrairement aux masses physiques, on peut s'attendre à une variation de la matrice masse ainsi construite, pendant le calcul. Compte tenu du fait que d'une part l'on choisit la valeur maximale sur les 3 axes (boucle sur k dans (4)), et que d'autre part la raideur du comportement matériel initial est en général plus importante qu'en cours de déformation, il s'est avéré dans la pratique de nos simulations, que la matrice masse calculée en début de processus était suffisante pour conduire l'ensemble de la simulation, i.e. la mise à jour en cours de calcul de la matrice masse n'a apporté aucun gain de temps de calcul dans le cas de nos simulations.

Dans le cas d'une loi de comportement de type incrémentale, a priori non totalement réversible, lorsque le chargement conduit à des états finaux de grandes déformations-contraintes, la procédure de recherche de forme finale en une opération n'est plus correcte. L'état final dépend en effet du chemin de chargement qui dans le cas de la relaxation dynamique peut être très différent du chemin réel. Une solution est d'utiliser une procédure de chargement incrémental. En supposant des incréments suffisamment petits, la procédure garantit alors une succession de points d'équilibres physiques statiques qui permettent de se rapprocher de la réponse réelle de la structure durant le chargement.

Le critère de convergence à l'équilibre doit garantir deux points. D'une part la structure doit être en équilibre mécanique, ce que nous traduisons par une norme du résidu des forces généralisées statiques, internes et externes, inférieure à une consigne. D'autre part, dans le cas où les conditions limites cinématiques bloquent les mouvements solides globaux, nous imposons à l'énergie cinétique finale d'être également inférieure à une consigne ce qui garantit également l'équilibre dans le cas où les efforts engendrés sont très faibles. Dans la pratique, ces conditions s'appliquent sous une forme relative selon :

$$Max \left(\frac{\|Résidu\|_{\infty}}{\|Réactions\|_{\infty}}, \frac{\text{énergie cinétique}}{\text{énergie interne}} \right) \leq \varepsilon \quad (5)$$

avec ε la consigne fixée.

Enfin, notons que les méthodes intègrent une technique de relaxation cinétique, qui s'appuie sur l'évolution de l'énergie cinétique. Lorsqu'un pic d'énergie cinétique est détecté, on considère, que l'état est proche d'un équilibre. De manière à freiner la structure autour de cet état, les vitesses sont arbitrairement mises à 0, on parle alors d'amortissement cinétique. Cette méthode s'avère dans la pratique très efficace.

3 Applications

La première application a pour objectif de vérifier l'obtention d'un calcul identique entre la méthode proposée par Han et Lee [7] modifiée par Troufflard ([4]) et celles s'appuyant sur les relations (2) et (4). Remarquons que la prise en compte du terme σ_{xy} dans la formule (1) est problématique, car dépendant du repère dans lequel il est calculé. Dans notre travail, de manière à supprimer cette dépendance, on propose de se situer dans le repère principal de contraintes, ce qui conduit en hypothèse de contraintes planes à $\sigma_{xy} = 0$ et $\sigma_x + \sigma_y = \text{trace}(\sigma)$ et $\gamma = 3$. dans (1).

Le calcul s'effectue en élasticité linéaire $E = 125\text{MPa}$ et $\nu = 0.41$. La solution permettant la détermination des termes α et β dans (1) n'est pas unique. On retient :

$$\alpha = \frac{3(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)}, \quad \beta = \frac{1}{1-\nu} \text{ compte tenue de : } K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

Dans ce cadre les relations (1) et (2) sont identiques. Concernant la relation (4), on retient pour cet exemple une valeur de $\lambda = 0.6$.

La géométrie est constituée d'un coussin carré constitué de deux membranes jointes sur leur pourtour, de dimension $500\text{mm} \times 500\text{mm} \times 0.27\text{mm}$. Due aux symétries, seul 1/8 du coussin est étudié. Le coussin est soumis à une pression interne instantanée de 0.015 MPa. Le maillage est constitué d'un découpage réglé triangulaire, $25 \times 25 \rightarrow 1250$ éléments.

Enfin, le critère de convergence (5) retenu est fixé à : $\varepsilon = 1.e - 3$.

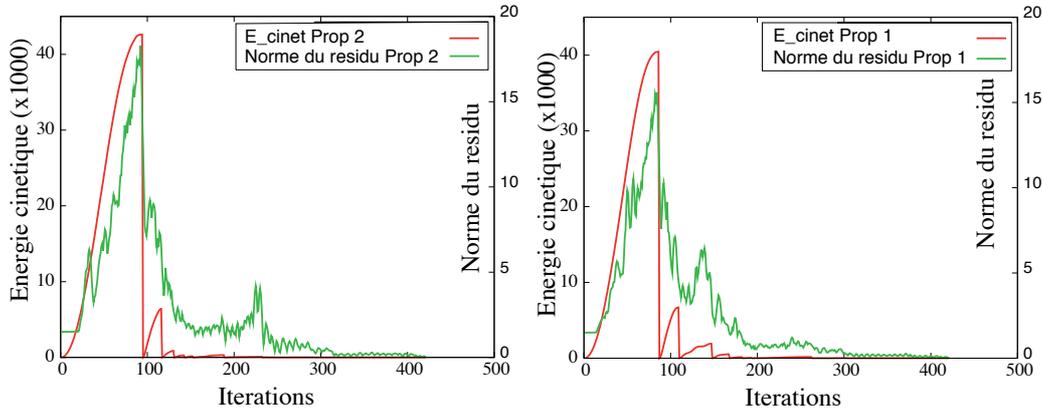


FIGURE 1 – Gonflage d'un coussin carré. Évolution en fonction du nombre d'itérations, de l'énergie cinétique et du résidu d'équilibre statique, pour les deux propositions

L'évolution de l'énergie cinétique en fonction du nombre d'itérations, Figure 2, met bien en évidence les points de relaxation cinétique (i.e. remise à 0 des vitesses). Globalement, les évolutions pour les deux propositions sont très semblables. Dans le détail, on peut noter que le premier pic d'énergie cinétique intervient un plus tard dans le cas de la deuxième proposition, par contre le gradient de décroissance semble plus important pour la seconde méthode. On note également une diminution régulière de la norme du résidu statique, assez semblable pour les deux méthodes, avec une diminution importante à chaque relaxation cinétique.

Membranes : maillages complexes La deuxième application a pour objectif de valider les deux nouvelles propositions dans le cas de maillages plus complexes. On se propose ainsi d'étudier des maillages 2D, avec découpages triangulaires et quadrangulaires, et avec interpolations linéaires et quadratiques. De plus deux finesses de maillage sont considérées : une grille de 25×25 et une grille de 50×50 . La géométrie et le comportement matériel sont identiques au cas de la première application. Pour la proposition 1, on retient les paramètres : $\alpha = 0.9022557$, $\beta = 0.9022557$, $\gamma = 1$, $\theta = 1$.

La figure 3 présente un exemple de déformée. Pour chaque géométrie, le tableau 2 présente les résultats obtenus avec un λ optimum.

Tout d'abord on observe que la convergence est obtenue dans tous les cas. En particulier, l'interpolation quadratique n'introduit pas de difficulté particulière.

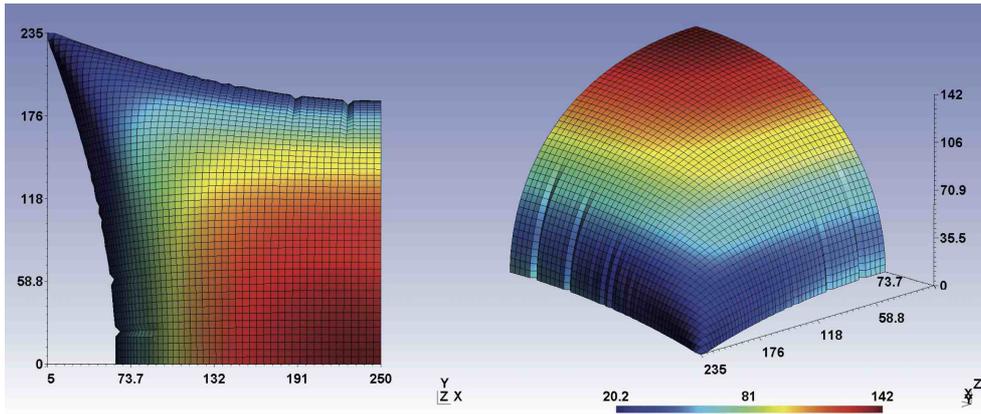


FIGURE 2 – Coussin carré gonflé : représentation de 1/8 de la pièce, isovalues de déplacements

T : Éléments Triangulaires	R : Éléments Rectangulaires
L : Interpolation Linéaire	Q : Interpolation Quadratique
1 : Grille de 25x25	2 : Grille de 50x50

TABLE 1 – Notation

Le nombre d'itérations est légèrement plus important avec la proposition 2, mais les temps de calcul associés restent néanmoins plus faibles ou équivalents, du au fait que la matrice de raideur n'est pas recalculée à chaque itération, contrairement à la proposition 1.

La plage de variation du paramètre λ , bien que beaucoup plus faible que dans la méthode originale de Barnes-Han-Lee [7], reste importante pour la proposition 1. Ce point est important, car il impose des essais préliminaires dans le cas d'un nouveau maillage, en vue de déterminer une valeur optimum pour λ . Dans le cas de la proposition 2, une valeur de 0.6 ou 0.7 garantit une convergence proche de l'optimum dans tous ces cas traités.

L'augmentation du nombre d'itérations semble plutôt proportionnelle à la racine carrée du nombre de ddl, c'est-à-dire à la finesse du maillage.

La troisième application concerne le gonflage d'un coussin circulaire de diamètre 400mm, dont le maillage, Figure 3, intègre des éléments triangulaires et des éléments quadrangulaires linéaires. Les autres caractéristiques géométriques, matérielles, méthodes... sont identiques aux cas des coussins carrés.

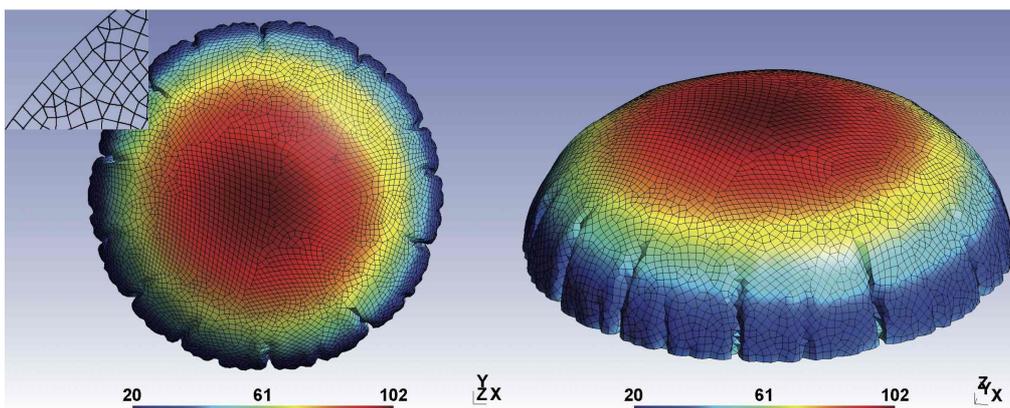


FIGURE 3 – Coussin circulaire gonflé : isovalues de déplacements

Le tableau 3 montre que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence, est cohérent avec ceux relevés dans le cas des géométries carrées. La mixité des éléments ne semble pas altérer la convergence.

La proposition 2 est ici plus intéressante, de plus même avec la valeur $\lambda = 0.6$, qui n'est pas optimum, on garde une très bonne convergence.

Maillage	Proposition 1			Proposition 2		
	λ_{opt}	nb itérations	temps [s]	λ_{opt}	nb itérations	temps [s]
TL1 (2028 dof)	10	546	14,1	0,6	565	13,8
TL2 (7803 dof)	10	923	101,5	0,7	1081	111,8
TQ1 (7803 dof)	13	1128	118,4	0,6	1185	119,8
TQ2 (30603 dof)	14	2158	943,3	0,7	2358	970,1
RL1 (2028 dof)	6	422	23,7	0,5	423	22,6
RL2 (7803 dof)	6	671	150,4	0,6	841	183,9
RQ1 (7803 dof)	10	1015	159,8	0,5	970	148,8
RQ2 (30603 dof)	9	1688	1085,6	0,5	1889	1552,1

TABLE 2 – Gonflage d’un huitième de coussin carré en un seul pas de chargement, pour différents maillages

Maillage	Proposition 1			Proposition 2		
	λ_{opt}	itérations	temps [s]	λ_{opt}	itérations	temps [s]
Ronde (17856 dof)	$\lambda_{opt}=10$	2096	1068,3	$\lambda_{opt}=0,4$	1322	616,745
				$\lambda=0,6$	1703	792,6

TABLE 3 – Gonflage d’une moitié d’un coussin ronde avec un mélange d’éléments triangulaires et quadrangulaires linéaires

On remarque également la présence de plis sur les déformées : Figures 2 et 3. D’une manière analogue aux calculs en dynamique explicite classique, la prise en compte des ces instabilités locales ne pose pas de problème apparent. Cependant, le processus ne permet pas une maîtrise du choix de la solution bifurquée.

Plaques : maillages en éléments 3D On s’intéresse maintenant aux cas des éléments 3D. Deux types de simulation, assez différents sont étudiés : une plaque carrée, soumise à une pression transversale, et une plaque trouée soumise à un chargement dans le plan. L’épaisseur des plaques est de 5mm.

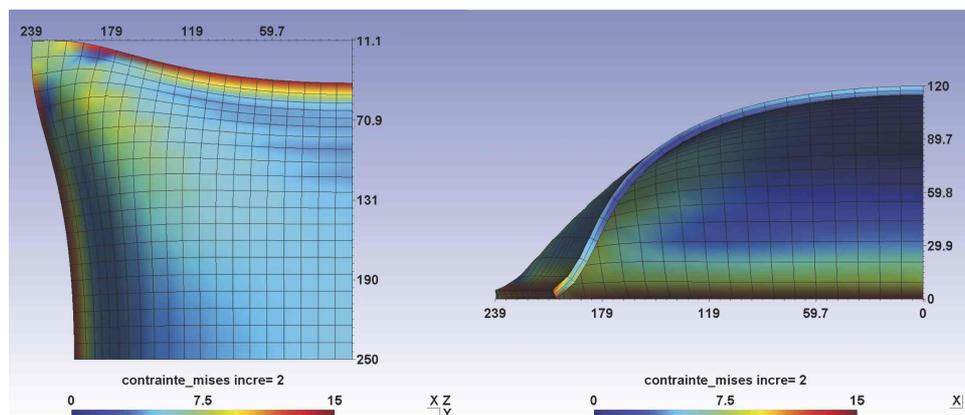


FIGURE 4 – 1/4 plaque 3D sous pression, résultat en un incrément : isovaleurs de contraintes de Mises en MPa

Le premier cas représente la version en élément 3D du comportement de gonflage précédemment étudié, avec en plus, dans le cas d’élément 3D, une rigidité en flexion de la plaque. Alors que dans le premier cas, les champs de déformation-contraintes sont assez homogènes, et que les déplacements sont importants, dans le second cas la présence du trou induit un gradient de champ important, et les déplacements sont comparativement plus petits. Les deux interpolations classiques : linéaire et quadratique sont utilisées ainsi que deux types de découpage : hexaédrique et pentaédrique. Les deux propositions ayant des performances assez équivalentes, seule la proposition 2 est présentée ici avec $\lambda = 0.7$.

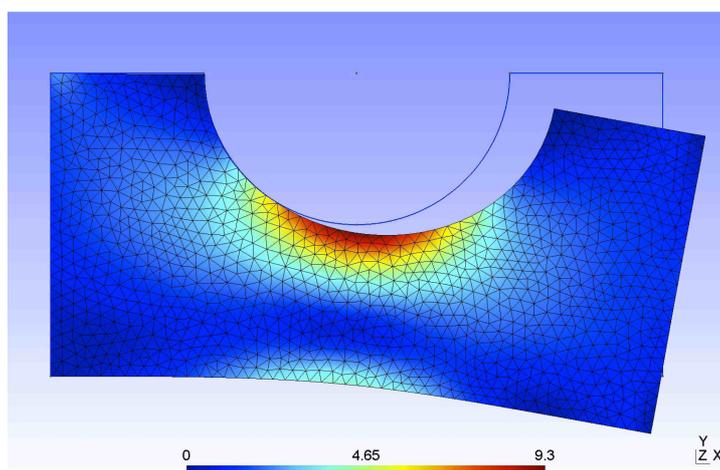


FIGURE 5 – plaque trouée, résultat en un incrément : isovaleurs de contraintes de Mises en MPa

Cas	Type d'éléments	Nb d'élém.	Dof	Itérations	Temps [s]
Gonflage	Hexaèdre linéaire	100	726	914	21.8
Gonflage	Hexaèdre quadr (27 pt)	100	3969	2687	520.2
Traction	Pentaèdre linéaire	2239	7200	1550	177.2
Traction	Pentaèdre quadr (6 pt)	2239	31428	4140	2410

TABLE 4 – Tests avec des éléments 3D : maillages et résultats

Le tableau 4 montre que dans tous les cas le calcul converge que ce soit pour de grandes déformations dans le plan : Figure 5 ou que ce soit pour de grands déplacements transversaux intégrant de la flexion : Figure 4. Dans le cas des hexaèdres quadratiques, il s'agit d'une interpolation complète à 27 noeuds et d'une intégration à 27 points d'intégration. A priori, ce choix permet d'éviter le blocage en flexion, et malgré le fait de retenir qu'un seul élément dans l'épaisseur, le comportement en flexion est a priori correctement approché. Ce n'est évidemment pas le cas pour le maillage en hexaèdres linéaires, il faudrait pour approcher correctement le comportement de flexion, un nombre plus important d'éléments dans l'épaisseur (ici 1) et au moins une intégration sélective pour éviter le blocage. Cependant, nous présentons les deux types d'interpolations pour montrer d'une part que l'algorithme converge dans les deux cas, et d'autre part que les temps de calcul et nombres d'itérations sont cohérents entre eux et avec les résultats obtenus précédemment. En effet en tenant compte du rapport du nombre de ddl entre les deux maillages : environ 5,5 ; et du rapport du nombre de points d'intégration (27/8) on obtient un rapport global d'environ 18,5. On observe par ailleurs un rapport du nombre d'itérations à convergence d'environ 3 et un rapport des temps de calcul d'environ 24.

Concernant le test de traction sur plaque trouée, le découpage est pentaédrique et le rapport global ddl et points d'intégration entre quadratiques et pentaédriques est d'environ 13, alors que le rapport des temps de calcul est d'environ 13,5. Ainsi, là aussi on observe des rapports cohérents.

Calculs incrémentaux : De manière à pouvoir utiliser la méthode dans le cas d'une loi incrémentale, nous avons introduit une version incrémentale des propositions 1 et 2. La méthode de relaxation dynamique est en fait ici utilisée pour trouver l'équilibre à la fin de chaque incrément de chargement. Elle est donc analogue à une méthode itérative classique, si ce n'est qu'elle ne nécessite pas la détermination d'une évolution tangente, par contre en contrepartie elle demande un grand nombre d'itérations.

Les différents types de simulation 2D, 3D présentés précédemment sont étudiés en considérant 10 incréments de chargement. On observe que la méthode fonctionne pour tous les types d'éléments. La Figure 6 présente l'évolution du nombre d'itérations en fonction du nombre d'incrément. On retrouve des nombres cohérents avec le calcul en un pas. On remarque que le nombre d'itérations, globalement assez constant, est moins stable avec les éléments quadratiques qu'avec les éléments linéaires.

La Figure 7 présente les différentes déformées constituant le résultat des pseudo-équilibres inter-

mémoires résultant du chargement progressif incrémental (pour améliorer la clarté de la figure, tous les incréments ne sont pas représentés).

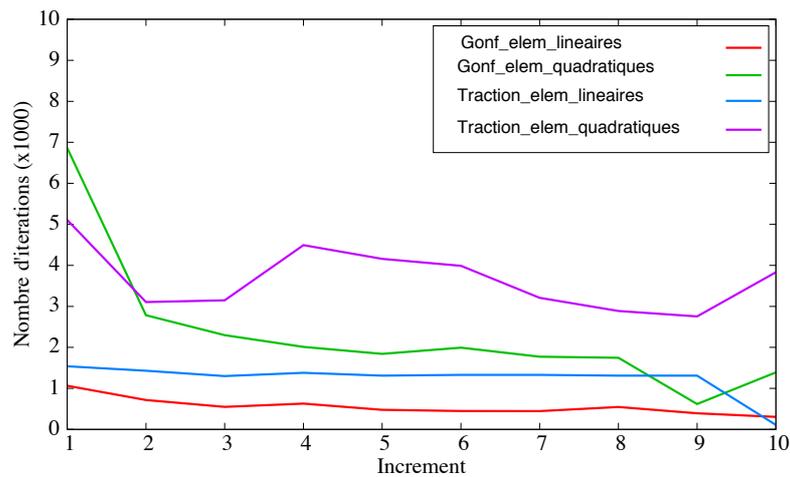


FIGURE 6 – Évolution du nombre d’itérations en fonction des incréments

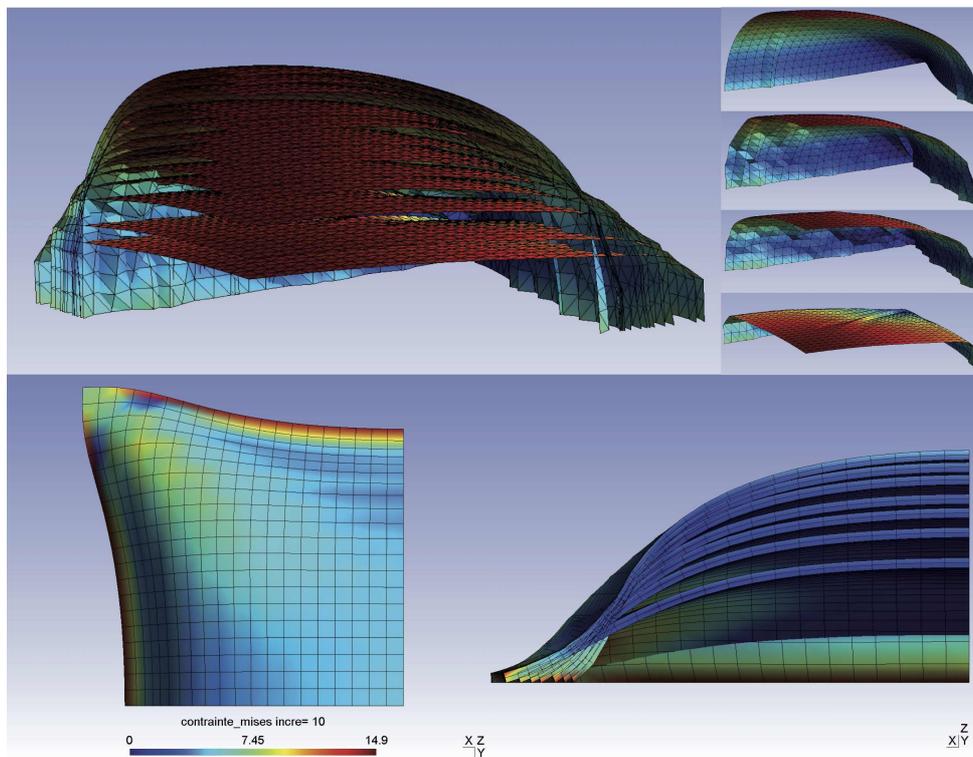


FIGURE 7 – Gonflage incrémentale d’un coussin, représentation de 1/8 de la pièce, maillages 2D et 3D

Lois de comportement complexe : La dernière partie de l’étude est exploratoire. Il s’agit de voir l’influence d’une loi de comportement complexe, de préférence incrémentale. Pour cela nous considérons le gonflement d’une membrane carrée, maillée à l’aide d’éléments 3D hexaédriques quadratiques. Les dimensions géométriques sont $250\text{mm} \times 250\text{mm} \times 6\text{mm}$, le maillage est quadratique en hexaèdres avec une grille de $10 \times 10 \times 1$ et on retient un lambda de 3. Le chargement est quasi-statique d’où des effets de vitesse négligeables. Le matériau considéré est un élastomère Vitton dont la loi est modélisée par l’assemblage additif d’une contrainte hyperélastique et d’une contrainte d’hystérésis. On se reportera à [9] pour plus de détail sur la loi, notons simplement que la partie hyperélastique s’appuie sur le modèle de Hart-Smith : module de compressibilité $K = 2700\text{MPa}$ et les coefficients de la partie déviatoire : $C1 =$

0.067, $C2 = 0.402$, $C3 = 3.05$. Le comportement d’hystérésis est purement déviatoire et incrémental et peut être vu comme un assemblage infini et continu de patins-ressorts en parallèle. En cisaillement, la pente à l’origine est $\tau/\gamma = 4.59MPa$ et la contrainte de saturation est de $\tau_{max} = 0.27MPa$

Maillage	λ	Inc 1	Inc 2	Inc 3	Inc 4	Inc 5	Inc 6	Inc 7	Inc 8	Inc 9	Inc 10
3969 dof	3	32020	8470	6540	4730	2830	2910	970	2590	910	690

TABLE 5 – Gonflement d’une plaque en élastomère : Itérations nécessaires par incrément

Le calcul converge malgré un comportement complexe. On remarque sur le tableau 5 un nombre d’itérations ici beaucoup plus important pour le premier incrément, et ensuite une décroissance régulière et importante du nombre d’itérations, contrairement au cas de l’élasticité linéaire. La raison en est, la faible raideur initiale du matériau qui conduit à un très grand déplacement au premier incrément. Puis, le matériau se raidit, et les déplacements par incrément se réduisent très fortement. L’évolution observée du nombre d’itérations nécessaire en fonction du nombre d’incrément est donc logique.

4 Conclusion et discussion

Nous présentons dans ce travail deux propositions pour étendre la méthode de relaxation dynamique utilisant l’amortissement cinétique, proposée initialement par Barnes-Han-Lee dans le cas particulier d’une loi élastique linéaire et d’éléments triangulaires linéaires.

Les deux propositions s’avèrent efficaces pour des éléments 2D et 3D, avec interpolations linéaires et quadratiques. De manière à minimiser l’influence du trajet de chargement, une formulation incrémentale a été également testée avec succès.

Enfin, les premiers tests avec une loi de comportement complexe, incrémental, montrent que la seconde méthode peut également fonctionner dans ce cadre.

Dans ce contexte, la relaxation dynamique avec amortissement cinétique, en incrémental, peut s’avérer une alternative intéressante à la méthode classique de Newton, en particulier dans des situations d’instabilités.

Au stade actuel, seules les instabilités de membranes gonflées ont été testées, l’étude se poursuit sur d’autres types d’instabilités.

4.1 Références bibliographiques

Références

- [1] W.J. Lewis. *Tension Structures, Form and Behaviour*, T. Telford , 2003.
- [2] M.R. Barnes. *Form-finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*, Int. J. Space Struct., Multi Science Publishing, (14) 89-104, 1999.
- [3] M. R. Barnes. *Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes*. Computers & Structures, 30(3) :685-695, 1998.
- [4] J. Troufflard, J.-M. Cadou, and G. Rio. *Recherche de forme des gilets de sauvetage gonflables*, Mécanique et Industrie, AFM EDP Sciences, (11) 117-122, 2010.
- [5] John O. Hallquist, *LS-DYNA Theoretical Manual*, Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [6] G. R. Joldes, A. Wittek, K. Miller. *An adaptive dynamic relaxation method for solving nonlinear finite element problems. Application to brain shift estimation*, International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, John Wiley & Sons, Ltd., 2010.
- [7] S.-E. Han, K.-S. Lee, *A study of the stabilizing process of unstable structures by dynamic relaxation method*, Computers and structures, (81) 1677-1688, 2003.
- [8] T. Belytschko, T. J. Hughes, P. Underwood. *Computational methods for transient analysis : Dynamic Relaxation*, volume 1, chapter 5, pages 245–265., Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- [9] A. Vandenbroucke, H. Laurent, N. Hocine, and G. Rio. *A hyperelasto-visco-hysteresis model for an elastomeric behaviour : Experimental and numerical investigations*. , Computational Materials Science, (48) 495–503, 2010.