



**HAL**  
open science

## Optimisation des propriétés équivalentes de motifs périodiques: Cas d'un panneau architecturé en flexion

Laurent Laszczyk, Rémy Dendievel, Olivier Bouaziz, Yves Bréchet

### ► To cite this version:

Laurent Laszczyk, Rémy Dendievel, Olivier Bouaziz, Yves Bréchet. Optimisation des propriétés équivalentes de motifs périodiques: Cas d'un panneau architecturé en flexion. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592940

**HAL Id: hal-00592940**

**<https://hal.science/hal-00592940>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation des propriétés équivalentes de motifs périodiques : Cas d'un panneau architecturé en flexion

L. Laszczyk<sup>1</sup>, R. Dendievel<sup>1</sup>, O. Bouaziz<sup>2</sup>, Y. Bréchet<sup>1</sup>

<sup>1</sup> SIMAP, Grenoble-INP, France, {laurent.laszczky, remy.dendievel, yves.brechet}@grenoble-inp.fr

<sup>2</sup> ArcelorMittal Research, France, olivier.bouaziz@arcelormittal.com

**Résumé** — L'objectif d'allègement de produits pour le transport motive à explorer la classe des "matériaux architecturés". La question posée est celle de la distribution de matière donnant le meilleur compromis entre masse, propriétés structurales et fonctionnelles. Le cas d'un panneau construit à partir d'une géométrie périodique bidimensionnelle est étudié. Le couplage d'un outil numérique d'optimisation de forme avec le calcul des rigidités et conductivités équivalentes du motif périodique permet de proposer des géométries optimisées en fonction des différents paramètres du problème d'optimisation.

**Mots clés** — optimisation de forme, matériaux architecturés, homogénéisation, éléments finis.

## 1 Introduction

Les cahiers des charges de plus en plus contraignants issus des domaines applicatifs (énergie, transport ...) conduisent à des requêtes multifonctionnelles, souvent contradictoires. Face à ces requêtes, les solutions en termes de matériaux monolithiques peuvent devenir inopérantes. Il ne suffit plus alors d'optimiser des propriétés à l'échelle de la microstructure ou d'optimiser des formes à l'échelle de la structure. L'association de matériaux, leur architecturation à une échelle intermédiaire entre la microstructure et la structure offrent des degrés de liberté supplémentaires.

Des matériaux tels que les mousses, les treillis, les assemblages de sphères creuses, les nids d'abeille, les sandwichs présentent des architectures relativement maîtrisables [1] [2]. Afin de répondre à des cahiers des charges faisant intervenir des propriétés mécaniques, thermiques, acoustiques, une approche consiste à explorer ces architectures et à les optimiser par rapport à certains paramètres de design tels que densité, épaisseurs, distribution de taille [3].

Par ailleurs, les méthodes numériques d'optimisation de forme ou topologique sont classiquement utilisées dans une problématique de conception optimale des structures [4]. L'objectif de la présente étude est d'utiliser les degrés de liberté offerts par l'optimisation de forme, non pas à l'échelle d'une structure, mais à l'échelle de l'hétérogénéité d'un matériau. Il ne s'agit pas d'optimiser une structure vis-à-vis d'une sollicitation donnée, mais d'optimiser l'hétérogénéité d'un matériau vis-à-vis de ces propriétés équivalentes, comme proposé par exemple par Sigmund [5].

Plus précisément, on considère ici un cas modèle de panneaux soumis à la fois à des requêtes de rigidité en flexion et d'isolation thermique dans la direction perpendiculaire au plan du panneau. Ce type de cahier des charges se retrouve dans plusieurs contextes applicatifs, par exemple les écrans thermiques pour l'automobile ou encore les panneaux isolants pour la construction industrielle ou navale (figure 1). De plus, ce panneau sera considéré comme la répétition périodique d'un motif élémentaire, de telle sorte que les calculs d'optimisation topologique seront effectués sur ce motif. La technique d'optimisation topologique est présentée à la section 2.

Le choix de la fonction objectif à optimiser y est détaillé. Cette optimisation sera par ailleurs assortie de contraintes dimensionnelles (hauteur donnée et zone de matière imposée) et de masse (fraction volumique imposée). La démarche d'identification des propriétés équivalentes sur le motif de base est détaillée à la section 3. Enfin, des pistes d'architecture optimale sont présentées à la section 4. La sensibilité à la topologie initiale ainsi qu'au choix de la fonction objectif y est notamment discutée.

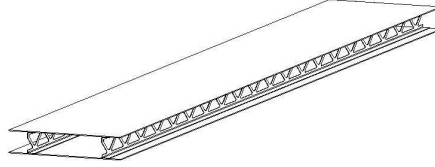


FIGURE 1 – Exemple de panneau sandwich constitué de deux parements maintenus par des raidisseurs espacés d'un intervalle constant.

## 2 Optimisation de forme

L'algorithme d'optimisation de forme utilisé dans cette étude est basé sur la méthode par ligne de niveau [6] autorisant les changements de topologie. Cette méthode se distingue des approches par matériaux fictifs [7] ou par homogénéisation [4] dans le sens où la géométrie est définie indirectement. Tout au long du processus itératif d'optimisation la géométrie reste "classique" dans le sens où aucun matériau composite de densité intermédiaire n'est introduit. La frontière entre les deux phases (matériau et vide) est définie par la ligne de niveau égale à zéro d'une fonction *level-set*. C'est le transport de cette fonction selon un certain champ de vitesse qui aboutit à la transformation de la géométrie. Ce champ de vitesse est choisi de sorte que la fonction objectif décroisse à chaque itération et que la contrainte de masse (de surface en deux dimensions) reste vérifiée par l'introduction d'un lagrangien. Ce choix de la vitesse résulte de résultats analytiques qui ne sont obtenus que pour des cas simples tels que les équations linéaires stationnaires de la mécanique et de la conductivité thermique.

### 2.1 Méthode par ligne de niveau

La méthode par ligne de niveau est utilisée pour définir les frontières de la géométrie et les faire évoluer. La fonction *level-set*, notée  $\varphi$ , est définie sur un domaine admissible  $\mathbb{D}$  en lien avec le domaine  $\Omega$  où est positionnée la matière :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \Leftrightarrow x \in \partial\Omega \cap \mathbb{D} \\ \varphi(x) < 0 & \Leftrightarrow x \in \Omega \\ \varphi(x) > 0 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{D} \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

La résolution du problème physique (mécanique ou thermique) est faite par méthode des éléments finis sur le domaine  $\mathbb{D}$  entier avec comme propriété celle du matériau constitutif pondérée par la fonction caractéristique régularisée de  $\varphi$ . À chaque itération, la géométrie est transformée en résolvant l'équation de transport de Hamilton-Jacobi par méthode des différences finies [8] :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V|\nabla \varphi| = 0 \quad (2)$$

Le point clef est alors de trouver une expression pour la vitesse de transport  $V$  de sorte que la fonction objectif diminue. Dans le cas de la mécanique linéaire et de la conduction thermique linéaire, la méthode de dérivation rapide du Lagrangien [9] donne une expression analytique du gradient de forme. Ainsi, lorsque l'on cherche à minimiser l'énergie  $W(\Omega)$  du domaine  $\mathbb{D}$  soumis à des conditions aux limites de Neumann sur  $\Gamma_N$  et de Dirichlet homogène sur  $\partial\mathbb{D} \setminus \Gamma_N$ , son gradient de forme dans la direction  $\theta$  (champ vectoriel sur  $\mathbb{D}$ ) est [6] :

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)(\theta) = - \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n w(x) dx \quad (3)$$

où  $n$  est le vecteur normal à la frontière et  $w(x)$  la densité d'énergie mécanique ou thermique telle que :

$$W(\Omega) = \int_{\Omega} w(x) dx \quad (4)$$

Puisque l'équation de transport (2) correspond à une transformation de la frontière dans la direction  $\theta = Vn$ , en choisissant l'expression suivante pour la vitesse on obtient bien une direction de descente pour le gradient de forme :

$$V = w(x) \quad (5)$$

Les contraintes géométriques sont intégrées implicitement : celle sur l'encombrement par les dimensions du domaine  $\mathbb{D}$ , celle sur une zone de matière imposée en forçant la fonction *level-set* à rester négative localement dans la zone voulue. Au contraire, la contrainte sur la fraction volumique  $V_f$  (i.e. sur la masse) est gérée explicitement en introduisant un multiplicateur de Lagrange, dont on cherche la valeur du coefficient à chaque itération afin de contrôler la fraction volumique au cours de l'optimisation.

## 2.2 Choix de la fonction objectif

La fonction objectif à minimiser doit intégrer les propriétés du cahier des charges à maximiser : la rigidité en flexion et l'isolation thermique.

**Fonction objectif mécanique** Les modules de rigidité équivalents du panneau qui entrent en jeu sont les modules de rigidité de flexion et de cisaillement. Ainsi l'optimisation mécanique est déjà intrinsèquement multi-fonctionnelle car elle consiste à trouver le meilleur compromis entre ces deux modules équivalents. L'importance à attribuer à chaque module peut trouver un sens physique en utilisant par exemple la rigidité trois points (figure 2) qui a l'avantage de n'introduire qu'un seul paramètre géométrique  $l$  représentatif de l'élancement. En utilisant une approche en contrainte de type Reissner [10], la souplesse en flexion trois points  $S_f$  est donnée par :

$$S_f = \frac{\delta}{Q} = \frac{l^3}{48}d + \frac{3l}{10}f \quad (6)$$

où  $Q$  est la force appliquée,  $\delta$  le déplacement de l'appui supérieur et  $l$  la portée. Les propriétés élastiques du matériau constitutif et la géométrie interne du raidisseur sont intégrées dans les modules équivalents : le module de souplesse de flexion pure  $d$  et le module de souplesse de cisaillement  $f$ . Le problème d'optimisation mécanique choisi est donc la minimisation d'une fonction objectif  $J_m$  égale à la souplesse en flexion trois points :

$$J_m(\Omega) = S_f(l, \Omega) \quad (7)$$

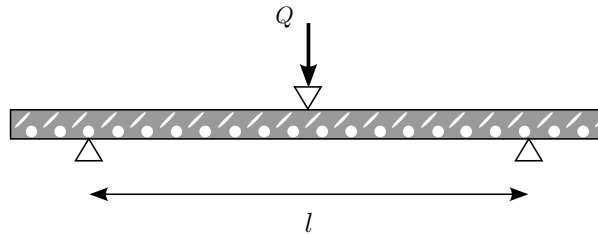


FIGURE 2 – Essai de flexion trois points.

Finalement, il reste à mettre en place une méthode d'homogénéisation afin de calculer les modules équivalents en fonction de la géométrie :  $d(\Omega)$  et  $f(\Omega)$ . La géométrie étant la reproduction d'un motif périodique (figure 2), chaque module est obtenu par un calcul par éléments finis sur la cellule de base comme décrit dans la section 3.

**Fonction objectif thermique** Afin d'obtenir un panneau isolant, on cherche naturellement à minimiser la conductivité  $k_3$  dans la direction  $e_3$  perpendiculaire au plan du panneau. Or elle est inversement proportionnelle à l'énergie thermique calculée pour des conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet homogène, et ne permet pas de se ramener au contexte décrit dans la section 2. D'un point de vue pratique, il est souhaitable de minimiser une fonction objectif proportionnelle à l'énergie comme précédemment pour l'aspect mécanique.

Dans la suite, le problème d'optimisation thermique est alors traité en minimisant l'inverse de la conductivité thermique  $k_1$  dans la direction  $e_1$  horizontale. Sans apporter de preuve théorique, les résultats montrent que par ce biais la conductivité selon  $e_3$  est minimisée. Ainsi, la fonction objectif thermique  $J_{therm}$  à minimiser est :

$$J_{th}(\Omega) = k_1(\Omega)^{-1} \quad (8)$$

**Fonction objectif multi-critère** La répartition dans la fonction objectif entre mécanique et thermique n'a pas de sens physique. C'est un choix à faire vis-à-vis du cahier des charges. On définit donc un coefficient d'échange  $\alpha$  compris entre 0 et 1 de sorte que la fonction objectif totale s'écrit comme le produit de puissances suivant :

$$J(\Omega) = J_m^{(1-\alpha)} J_{th}^\alpha \quad (9)$$

où  $J_m$  et  $J_{th}$  sont respectivement les fonctions objectif mécanique et thermique définies précédemment.

### 3 Calcul des propriétés équivalentes : homogénéisation

La géométrie du raidisseur est la répétition dans la seule direction horizontale  $e_1$  d'une cellule de base notée  $Y$ , figure 3. La hauteur  $h$  de cette cellule est celle du raidisseur alors que sa largeur  $w$  est égale à la période. Puisque l'épaisseur est faible devant la hauteur et la largeur, une modélisation bidimensionnelle en contraintes planes est justifiée.

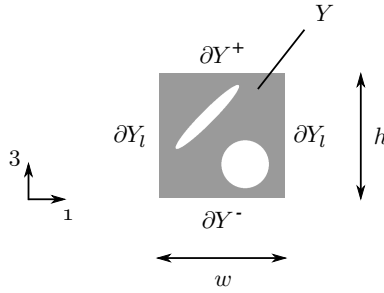


FIGURE 3 – Exemple de cellule de base répétée périodiquement dans la direction  $e_1$ .

L'approche utilisée est celle de l'homogénéisation en contrainte, i.e. une sollicitation moyenne est appliquée à la cellule de base et le module de rigidité associé est déduit de l'énergie élastique.

#### 3.1 Module de souplesse de flexion pure

Les efforts généralisés sont la force de traction  $N$  et le moment de flexion  $M$ , respectivement duaux de l'allongement  $e$  et de la courbure  $\chi$ . La figure 4 présente une cellule périodique soumise à un moment de flexion  $\bar{M}$ , i.e. vérifiant les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\mathbf{y}) : (\nabla^s \mathbf{u} + \mathbf{e} + \chi \mathbf{y}_3) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial Y^\pm \\ \mathbf{u} \text{ } y_1\text{-périodique sur } \partial Y_l \\ \langle N \rangle = 0 \\ \langle M \rangle = \bar{M} \end{cases} \quad (10)$$

où  $e$  et  $\chi$  sont traités comme des variables globales supplémentaires permettant de vérifier les deux dernières équations intégrales. Le module de souplesse de flexion pure est alors proportionnel à l'énergie élastique :

$$d = \frac{2W_m}{\bar{M}^2} \quad (11)$$

#### 3.2 Module de souplesse de cisaillement

Le module de rigidité de cisaillement est souvent calculé en appliquant sur la cellule périodique une contrainte (ou déformation) de cisaillement homogène. Cependant, un tel chargement est incompatible avec les conditions de bord libre sur les faces supérieure et inférieure. L'effort tranchant et le gradient du moment sont indissociables au travers de l'équation d'équilibre. Partant de cette constatation, le calcul d'homogénéisation proposé par Cecchi and Sab [11] est le suivant :

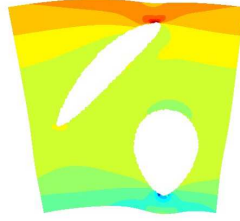


FIGURE 4 – Motif périodique de la figure 3 soumis à un moment de flexion  $\bar{M}$ .

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{in } Y \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\mathbf{y}) : (\nabla^s \mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial Y^\pm \\ \mathbf{u} & \text{y}_1\text{-périodique sur } \partial Y_l \end{cases} \quad (12)$$

où la force volumique  $\mathbf{f}$  est ajoutée aux conditions aux limites afin d'appliquer un effort tranchant  $\bar{Q}$  équilibré et cohérent avec les conditions de bord libre. Son expression est :

$$\mathbf{f} = \sigma_{11}^{(\bar{M})} \frac{\bar{Q}}{\bar{M}} \mathbf{e}_1 \quad (13)$$

et dépend de la première composante du champ de contrainte solution du problème (10) notée  $\sigma_{11}^{(\bar{M})}$ . Le module de souplesse de cisaillement est alors proportionnel à l'énergie élastique :

$$\mathbf{f} = \frac{2W_m}{\bar{Q}^2} \quad (14)$$

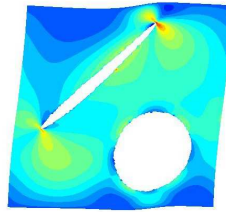


FIGURE 5 – Motif périodique de la figure 3 soumis à un effort tranchant  $\bar{Q}$ .

Il faut noter que le choix du modèle poutre ou plaque qui pourrait être utilisé avec les modules de souplesse calculés n'a aucune importance. On cherche ici seulement à optimiser leur valeur. Ce qui importe plus est la justesse des champs de contrainte locaux vis-à-vis d'un cas de chargement en utilisation, puisque le gradient de forme en découle. Cela justifie d'autant l'utilisation de ce calcul d'homogénéisation pour le cisaillement qui respecte les conditions aux limites.

### 3.3 Conductivité thermique

Comme justifié dans la section 2.2, la conductivité horizontale  $k_1$  est utilisée pour l'optimisation alors que la conductivité normale  $k_3$  mesure la performance d'isolation voulue.

Le calcul de  $k_1$  est fait en imposant un flux nul sur les faces  $\partial Y^\pm$  et un flux homogène  $\bar{\phi}$  entrant (resp. sortant) sur les faces latérales  $\partial Y_l$ . Ainsi, l'inverse de la conductivité  $k_1$  intervenant dans la fonction objectif s'exprime proportionnellement à l'énergie thermique :

$$k_1^{-1} = \frac{2W_{th}}{w\bar{\phi}} \quad (15)$$

De manière similaire, le calcul de  $k_3$  est fait en imposant un flux homogène  $\bar{\phi}$  entrant (resp. sortant) sur les faces  $\partial Y^\pm$  et une condition de périodicité sur les faces latérales  $\partial Y_l$ . Ainsi, la conductivité  $k_3$

s'exprime :

$$k_3 = \frac{h\bar{\phi}}{2W_{th}} \quad (16)$$

## 4 Résultats

La démarche d'optimisation consiste à modifier itérativement une géométrie initiale en utilisant la méthode décrite dans la section 2 afin de minimiser la fonction objectif multi-fonctionnelle (9). La valeur de cette fonction et son gradient de forme sont évalués à chaque itération par les calculs d'homogénéisation de la section 3.

Afin de limiter la sensibilité à la géométrie initiale, les deux géométries initiales choisies (figure 7) ont une fraction volumique  $V_f$  plus grande que celle imposée à travers le Lagrangien. Au cours de la procédure d'optimisation la fraction volumique diminue graduellement jusqu'à vérifier la contrainte. Ainsi, comparer la performance des géométries initiales à celle des géométries optimisées n'a pas de sens. Pour ce faire, des géométries intuitives avec la même fraction volumique finale (figure 6) sont proposées simplement à titre de comparaison.

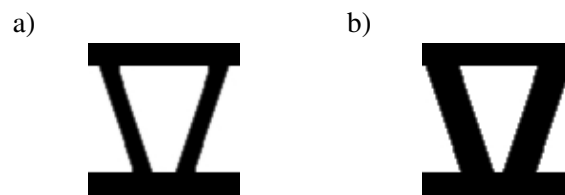


FIGURE 6 – Géométries intuitives proposées pour comparaison aux géométries optimisées : a)  $V_f = 0.5$  ; b)  $V_f = 0.6$  ;

La contrainte mentionnée précédemment consistant à imposer de la matière dans une zone prédéfinie est utilisée pour remplir une contrainte de procédé. Pour des raisons d'assemblage, on ne souhaite pas avoir de vide plus près des bords  $\partial Y^\pm$  qu'une distance donnée. La valeur de cette distance se retrouve sur les géométries de la figure 6.

### 4.1 Influence de la fraction volumique et de la géométrie initiale

La rigidité en flexion trois points et la conductivité normale dépendent au premier ordre de la fraction volumique imposée. Deux valeurs de la fraction volumique  $V_f = 0.5$  et  $0.6$  sont choisies pour illustrer cette dépendance. Les résultats pour ces deux valeurs, présentés sur les figures 8 et 9, sont très similaires. On notera cependant que plus la fraction volumique est importante plus les différences entre géométries sont grandes et plus les écarts sur les performances sont grands.

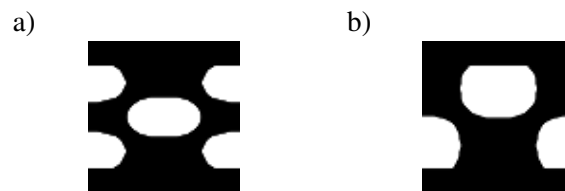


FIGURE 7 – Géométries initiales pour l'optimisation ayant une topologie différente.

Contrairement à des applications de conception optimale des structures, les sollicitations dans les problèmes d'homogénéisation sur une cellule périodique sont très peu contrastées spatialement. Il en résulte une sensibilité à la géométrie initiale marquée comme le montre les résultats suivants pour les deux géométries initiales de la figure 7. En effet, les figures 8 et 9 mettent en évidence que la topologie est conservée, vraisemblablement dû aux nombreuses symétries du système. Les performances de ces géométries optimisées sont représentées sur la figure 10, où optimiser se traduit par chercher à atteindre le coin supérieur gauche.

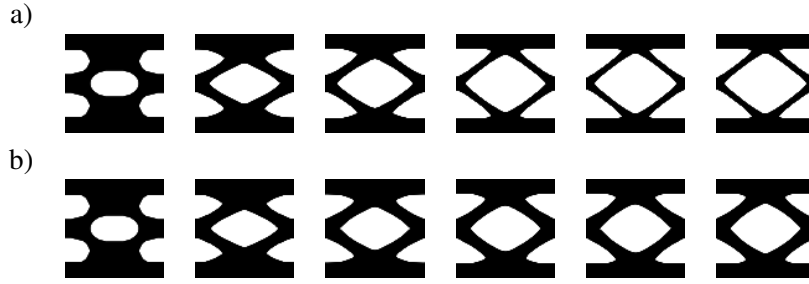


FIGURE 8 – Optimisation de la géométrie Fig. 7-a sur 50 itérations avec une contrainte de : a)  $V_f = 0.5$  ; b)  $V_f = 0.6$ . Le coefficient d'échange est fixé à  $\alpha = 0.4$ .

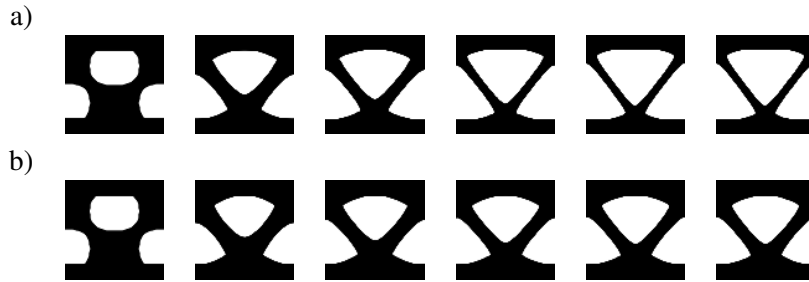


FIGURE 9 – Optimisation de la géométrie Fig. 7-b sur 50 itérations avec une contrainte de : a)  $V_f = 0.5$  ; b)  $V_f = 0.6$ . Le coefficient d'échange est fixé à  $\alpha = 0.4$ .

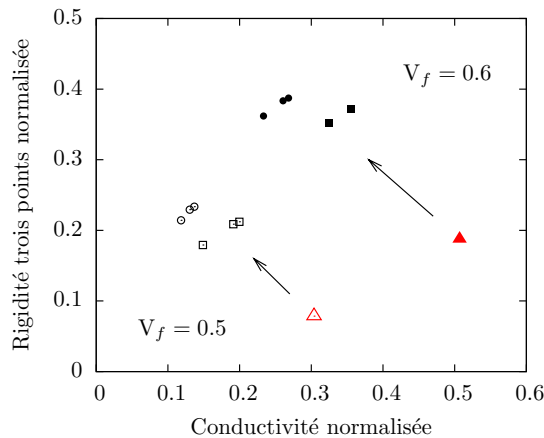


FIGURE 10 – Comparaison des propriétés des géométries intuitives de la figure 6 (triangles) avec les géométries optimisées de la figure 8 (ronds) et de la figure 9 (carrés). Les résultats sont donnés pour les deux contraintes de fraction volumique :  $V_f = 0.5$  (points vides) ;  $V_f = 0.6$  (points pleins).

#### 4.2 Influence du coefficient d'échange mécanique-thermique

Les grappes de points représentées sur la figure 10 représentent plusieurs simulations avec différentes valeurs du coefficient d'échange  $\alpha$ . La figure 11 donne une représentation complète des géométries obtenues en optimisant la géométrie Fig. 7-b pour un coefficient d'échange allant de  $\alpha = 0$  (optimisation mécanique seule) jusqu'à  $\alpha = 1$  (optimisation thermique seule).

### Conclusion

Dans un contexte de conception de matériaux architecturés multi-fonctionnels, la démarche de l'optimisation topologique appliquée à un motif périodique a été validée. Bien que la sensibilité à la géométrie initiale reste prononcée, les paramètres de la fonction objectif (l'élancement caractéristique et le coefficient d'échange) et les contraintes (fraction volumique et zone de matière imposée) sont la traduction du



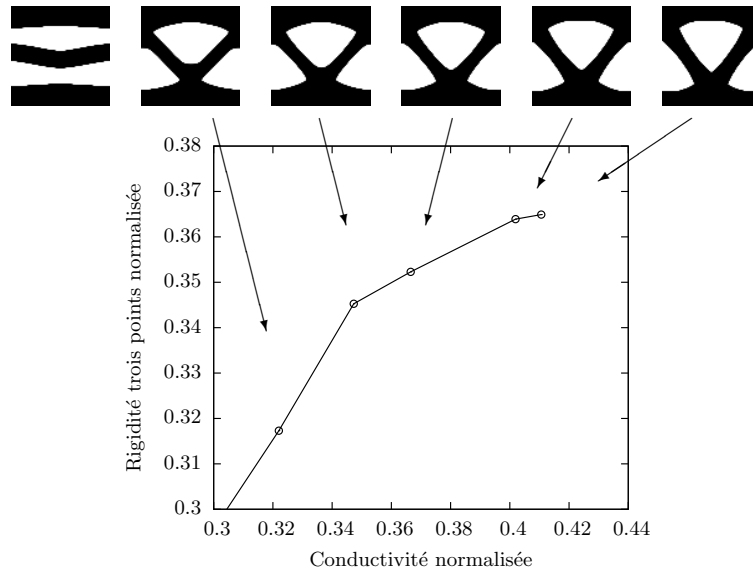


FIGURE 11 – Propriétés mécanique et thermique de géométries optimisées avec un coefficient d'échange respectivement de  $\alpha = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$  et  $0$  de gauche à droite.

cahier des charges et donnent les résultats attendus.

L'élaboration de prototypes issus de cette approche d'optimisation constitue la prochaine étape afin de fournir une validation expérimentale. En outre, l'application de cette approche à un motif tridimensionnel semble prometteuse dans le sens où les degrés de liberté topologiques sont plus nombreux et l'intuition plus réduite.

## Références

- [1] M F Ashby. Designing hybrid materials. *Acta Materialia*, 51(19) :5801–5821, 2003.
- [2] A G Evans, J W Hutchinson, N A Fleck, M F Ashby, and H N G Wadley. The topological design of multi-functional cellular metals. *Progress in Materials Science*, 46(3-4) :309–327, 2001.
- [3] M F Ashby. Multi-objective optimization in material design and selection. *Acta Materialia*, 48(1) :359–369, 2000.
- [4] G Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*. Applied mathematical sciences. Springer, 2002.
- [5] O Sigmund. Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials*, 20(4) :351–368, June 1995.
- [6] G Allaire. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :363–393, 2004.
- [7] M P Bendsøe and O Sigmund. *Topology optimization : theory, methods, and applications*. Engineering online library. Springer, Berlin Heidelberg New-York, 2003.
- [8] J A Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [9] J Cea. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20(3) :371–402, 1986.
- [10] E Reissner. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5) :569–573, 1975.
- [11] A Cecchi and K Sab. A homogenized Reissner–Mindlin model for orthotropic periodic plates : Application to brickwork panels. *International Journal of Solids and Structures*, 44(18-19) :6055–6079, September 2007.