

Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées

A. Jibawy^{1,4}, B. Desmorat^{1,3}, A. Vincenti^{1,2}

¹UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert
4 place Jussieu, Case 161, F-75252 Paris CEDEX 05, France, {boris.desmorat,angela.vincenti}@upmc.fr

²CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert
4 place Jussieu, Case 161, F-75252 Paris CEDEX 05, France

³Univ Paris-Sud 11 – F-91405 Orsay, France

⁴Segula Technologies – 5 rue Albert Durand, F-31700 Blagnac, France

Résumé — L'optimisation de structures composites stratifiées à rigidité variable peut être réalisée en appliquant des méthodes et des algorithmes d'optimisation topologique. En prenant en compte l'objectif de maximisation de la rigidité globale, on présente dans ce travail la formulation du problème d'optimisation pour le cas de coques minces stratifiées. Un algorithme adapté est présenté pour la résolution de cette classe de problèmes d'optimisation et des exemples d'application sont illustrés.

Mots clefs — Optimisation, stratifiés, coques, rigidité, propriétés élastiques.

Introduction

Les nouvelles technologies de fabrication de structures stratifiées par déposition de fibres permettent d'envisager une conception approfondie de l'architecture des renforts dans ces structures visant à distribuer la position et la quantité des renforts afin d'exploiter au mieux le rôle de ces mêmes renforts. Les auteurs ont proposé une méthodologie originale de conception optimale de structures composites stratifiées à rigidité variable [1] articulée en deux étapes : l'optimisation topologique de la structure dans un premier temps, et ensuite la conception optimale du matériau constitutif dont la structure interne est susceptible de varier d'un point à l'autre de la structure (stratifié à orientations variables ou à rigidité variable). Cette méthodologie, basée sur la combinaison de techniques d'optimisation topologique de structures et sur l'utilisation de la représentation polaire de propriétés élastiques anisotropes, a été développée et appliquée dans le cas de structures de type plaque, aussi bien dans le cas de chargements de membrane seule que de flexion seule.

Dans ce travail, on montre que cette méthodologie peut s'appliquer aussi au cas de structures de constituées de coques minces, pour lesquelles il faut prendre en considération des chargements mixtes (membrane et flexion à la fois) et la contribution du cisaillement transverse. On donne la formulation du problème d'optimisation de la rigidité de la structure pour un modèle de type coque mince et on montre que l'on peut appliquer le même algorithme d'optimisation que dans le cas des structures de type plaque. La validité de cette approche est prouvée par des calculs sur des exemples d'application.

Formulation du problème d'optimisation et algorithme de résolution

L'objectif proposé pour l'optimisation structurale est la maximisation de la rigidité globale, qui peut s'exprimer comme la minimisation de la compliance G de la structure [1] par rapport aux paramètres constitutifs (propriétés élastiques du matériau), qui sont les variables du problème d'optimisation. En prenant en considération un modèle de coque de Naghdi [2,3] dans le cadre des hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin et en supposant le découplage du comportement membrane/flexion au niveau de la loi de comportement, le critère peut s'écrire sous la forme :

$$G(\beta_i) = \iint_S W(\beta_i) \, dS = \iint_S \left(\frac{N^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^* N^{\gamma\delta}}{H} + 12 \frac{M^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta\gamma\delta}^* M^{\gamma\delta}}{H^3} + \frac{1}{k} \frac{Q^\alpha F_{\alpha\lambda}^* Q^\lambda}{H} \right) dS \quad (1)$$

où β_i sont les paramètres matériau, composantes indépendantes des tenseurs de souplesse homogénéisée en membrane \mathbf{A}^* , en flexion \mathbf{D}^* et de cisaillement \mathbf{F}^* , H est l'épaisseur de la coque et \mathbf{N} , \mathbf{Q} et \mathbf{M} sont respectivement les efforts de membrane et de cisaillement et les moments de flexion. Les indices correspondent aux composantes de ces tenseurs dans les bases covariante et contravariante.

On montre que le passage à un repère local orthonormé permet de donner une expression du critère local $W(\beta_i)$ (voir équation (1)) où les tenseurs de souplesse homogénéisés sont indépendants de la géométrie de la structure [4]. Cette nouvelle écriture permet d'appliquer au cas des coques minces le même algorithme d'optimisation utilisé dans le cadre des structures de type plaque [1]. Il s'agit d'un algorithme convergent et numériquement performant, dont chaque itération se compose de deux phases de minimisation successives :

1. des minimisations locales du critère $W(\beta_i)$ en fonction des paramètres matériau β_i à état de contraintes fixé ;
2. une minimisation globale du critère $G(\beta_i)$ en fonction des contraintes à paramètres matériau fixés (calcul aux éléments finis).

Le résultat de l'algorithme d'optimisation structurale est donc la distribution optimale de propriétés matériau (souplesse homogénéisée) dans la structure pour la maximisation de la rigidité globale. Il sera ensuite nécessaire de passer à la conception optimale de la stratification en tenant compte de la fabricabilité de la stratification en terme de continuité de l'orientation des fibres au sein de chaque pli.

Application de la méthodologie à des stratifications remarquables

Le principal avantage de cet algorithme d'optimisation tient dans le caractère local des minimisations par rapport aux propriétés élastiques du matériau. Dans le cas où les minimisations locales peuvent être résolues analytiquement, le coût de l'algorithme d'optimisation est défini par le temps de résolution du calcul EF à chaque itération. Pour cela, dans ce travail, nous avons appliqué cette méthodologie d'optimisation à des stratifications remarquables permettant au mieux de satisfaire à la contrainte de continuité de l'orientation des fibres au sein de chaque pli. Les stratifications considérées sont des angle-ply avec un comportement découplé membrane/flexion et quasi-homogène ($\mathbf{A}^*=\mathbf{D}^*$) [5]. Dans ce cas la minimisation locale est résolue analytiquement et des exemples numériques [4] démontrant la mise en œuvre de cette approche seront présentés.

Références

- [1] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, F. Léné. *Optimisation de plaques stratifiées en représentation polaire*, Comptes-rendus du 9^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, pages 499-504, 2009.
- [2] P. M. Naghdi, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, vol 4, pages 1-90 (1963).
- [3] P. M. Naghdi, *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physik, vol 6, a 2, pages 425-640, 1972.
- [4] A. Jibawy, *Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées*, Thèse de Doctorat en Mécanique de l'Université Paris 6-UPMC, 2010.
- [5] P. Vannucci, G. Verchery. *A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates*, Composite Science and Technology, vol 61, 1465-1473, 2001.