



**HAL**  
open science

## Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées

Ali Jibawy, Boris Desmorat, Angela Vincenti

► **To cite this version:**

Ali Jibawy, Boris Desmorat, Angela Vincenti. Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592939

**HAL Id: hal-00592939**

**<https://hal.science/hal-00592939>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées

A. Jibawy<sup>1,3</sup>, B. Desmorat<sup>1,2</sup>, A. Vincenti<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IJLRA, UPMC Univ Paris 06 / CNRS UMR 7190, France, {boris.desmorat,angela.vincenti}@upmc.fr

<sup>2</sup> Univ Paris-Sud 11, France

<sup>3</sup> Segula Technologies, France

**Résumé** — L'optimisation de structures composites stratifiées à rigidité variable peut être réalisée en appliquant des méthodes et des algorithmes d'optimisation topologique. En prenant comme objectif la maximisation de la rigidité globale, on présente dans ce travail la formulation du problème d'optimisation pour le cas de coques minces stratifiées. Un algorithme adapté est présenté pour la résolution de cette classe de problèmes d'optimisation et des exemples d'application sont illustrés.

**Mots clés** — Optimisation, stratifiés, coques, rigidité, propriétés élastiques.

## 1 Introduction

Les nouvelles technologies de fabrication de structures stratifiées par déposition de fibres permettent d'envisager une conception approfondie de l'architecture des renforts dans ces structures visant à distribuer la position et la quantité des renforts afin d'exploiter au mieux le rôle de ces mêmes renforts. Les auteurs ont proposé une méthodologie originale de conception optimale de structures composites stratifiées à rigidité variable [1] articulée en deux étapes : l'optimisation topologique de la structure dans un premier temps, et ensuite la conception optimale du matériau constitutif dont la structure interne est susceptible de varier d'un point à l'autre de la structure (stratifié à orientations variables ou à rigidité variable). Cette méthodologie, basée sur la combinaison de techniques d'optimisation topologique de structures et sur l'utilisation de la représentation polaire de propriétés élastiques anisotropes, a été développée et appliquée dans le cas de structures de type plaque, aussi bien dans le cas de chargements de membrane seule que de flexion seule.

Dans ce travail, cette méthodologie est étendue au cas de structures constituées de coques minces, pour lesquelles il faut prendre en considération des chargements mixtes (membrane et flexion) et la contribution du cisaillement transverse. On donne la formulation du problème d'optimisation de la rigidité de la structure pour un modèle de type coque mince et on montre sous quelles hypothèses l'on peut appliquer le même algorithme d'optimisation que dans le cas des structures de type plaque. La validité de cette approche est prouvée par des calculs sur des exemples d'application.

## 2 Modèle de coque mince stratifiée

### 2.1 Description de la géométrie d'une coque

Un point  $P$  inclus dans la coque  $C$  et au voisinage de la surface moyenne  $S$ , est défini à l'aide d'un point  $M$  de la surface moyenne et des coordonnées curvilignes  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  :

$$\mathbf{OP} = \Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{OM}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2) \quad (1)$$

En chaque point  $M$  de la surface moyenne  $S$ , on définit la base covariante du plan tangent à  $S$  :

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{OM}(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2) \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|} \quad (2)$$

Cette base  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  n'est en général ni orthogonale, ni normée.

La base contravariante  $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$  de la surface moyenne est telle que

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3)$$

La première forme fondamentale de  $S$ , dite tenseur métrique de  $S$ , est définie par :

$$\underline{a} = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (4)$$

La deuxième forme fondamentale (symétrique) de  $S$ , dite tenseur de courbure de  $S$ , est définie par :

$$\underline{b} = b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta = b_{\beta\alpha}^\alpha \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = -\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha \quad b_{\beta}^\alpha = \mathbf{a}_{,\beta}^\alpha \cdot \mathbf{a}_3 \quad (5)$$

La troisième forme fondamentale (symétrique) de  $S$  est définie par :

$$\underline{c} = c_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad c_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^\gamma b_{\gamma\beta} \quad (6)$$

En chaque point  $P$  de la coque, on définit la base covariante d'espace  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  :

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial \xi^\alpha} = (\delta_\alpha^\lambda - \xi^3 b_\alpha^\lambda) \mathbf{a}_\lambda \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial \xi^3} = \mathbf{a}_3 \quad (7)$$

Soient  $a$  et  $\mu$  les déterminants respectifs du tenseur métrique  $a_{\alpha\beta}$  et du tenseur mixte de surface  $\mu_\alpha^\lambda = (\delta_\alpha^\lambda - \xi^3 b_\alpha^\lambda)$ . Le volume élémentaire  $dV$  au voisinage d'un point  $P$  de la coque est défini par :

$$dV = \mu d\xi^3 dS \quad (8)$$

où  $dS = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$  est la surface élémentaire au voisinage du point  $M$  de la surface moyenne.

## 2.2 Équations locales de coques

L'hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin s'exprime par :

$$\mathbf{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \theta_\alpha(\xi^1, \xi^2) \mathbf{a}^\alpha \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) = u_i(\xi^1, \xi^2) \mathbf{a}^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

Le modèle de coque est obtenu en linéarisant par rapport à  $\xi^3$  le tenseur de déformation obtenu à partir de l'hypothèse cinématique (9). Le tenseur de déformation s'écrit alors :

$$\underline{e} = e_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + \xi^3 \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \theta) & (\alpha, \beta = 1, 2) \\ 2e_{\alpha 3} = \zeta_\alpha(\mathbf{u}, \theta) \\ e_{33} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

équation dans laquelle les composantes des tenseurs de déformations de membrane  $\gamma_{\alpha\beta}$ , de flexion  $\rho_{\alpha\beta}$  et de cisaillement  $\zeta_\alpha$  ont pour expressions :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\Phi}_{\alpha\beta} + \widehat{\Phi}_{\beta\alpha} \right] \quad \text{avec} \quad \widehat{\Phi}_{\alpha\beta} = u_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} u_3 \quad (11)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \theta) = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\theta}_{\alpha\beta} + \widehat{\theta}_{\beta\alpha} \right] \quad \text{avec} \quad \widehat{\theta}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha|\beta} - b_\alpha^\gamma \widehat{\Phi}_{\gamma\alpha} \quad (12)$$

$$\zeta_\alpha(\mathbf{u}, \theta) = \theta_\alpha + u_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda \quad (13)$$

avec  $u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  (où  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma$  sont les symboles de Christoffel de surface).

On note  $\sigma^{\alpha\beta}$  les composantes du tenseur des contraintes dans la base covariante d'espace (au point  $P$ ). L'application du principe des puissances virtuelles permet d'introduire les tenseurs des efforts intérieurs *symétriques* de membrane  $\underline{N}$ , de flexion  $\underline{M}$  et de cisaillement transverse  $\underline{Q}$  dont les composantes dans le repère covariant de la surface  $S$  sont

$$N^{\alpha\beta} = \int_H \sigma^{\alpha\beta} \mu d\xi^3 \quad M^{\alpha\beta} = \int_H \xi^3 \sigma^{\alpha\beta} \mu d\xi^3 \quad Q^\alpha = \int_H \sigma^{\alpha 3} \mu d\xi^3 \quad (14)$$

et de définir les équations d'équilibre locales :

$$\begin{aligned} N_{|\beta}^{\alpha\beta} - \left[ b_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta} \right]_{|\beta} - b_\beta^\alpha Q^\beta + p^\alpha &= 0 \\ M_{|\beta}^{\alpha\beta} - Q^\alpha + \mathfrak{M}^\alpha &= 0 \\ Q_{|\alpha}^\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} + p^3 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ainsi que les conditions aux limites en efforts sur la portion  $\partial S_1$  du contour de  $S$  :

$$\left[ N^{\alpha\beta} - b_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta} \right] \nu_\beta = T^\alpha \quad Q^\alpha \nu_\alpha = T^3 \quad M^{\alpha\beta} \nu_\beta = C^\alpha \quad (16)$$

A ce système d'équations locales peuvent être ajoutées des conditions aux limites en déplacements sur la portion  $\partial S_0$  du contour de  $S$  :

$$u_i = 0 \quad \theta_\alpha = 0 \quad (17)$$

### 2.3 Loi de comportement de coque stratifiée

Chaque couche de la coque est supposée être constituée d'un matériau élastique linéaire présentant une symétrie monoclinique. La loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \underline{H} : \underline{e} \quad (18)$$

Les composantes  $H^{ijkl}$  de  $\underline{H}$  dans la base covariante d'espace (au point  $P$ ) vérifient les propriétés de symétrie

$$H^{ijkl} = H^{klij} = H^{jikl} = H^{ijlk} \quad (19)$$

et la symétrie monoclinique impose les relations supplémentaires

$$H^{3\beta\gamma\delta} = H^{333\delta} = 0 \quad (20)$$

En supposant que la contrainte transverse  $\sigma^{33}$  est nulle, la loi de comportement (18) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} \\ \sigma^{\alpha 3} = \widehat{C}^{\alpha\beta} 2e_{\beta 3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C^{\alpha\beta\gamma\delta} = H^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{H^{33\gamma\delta} H^{\alpha\beta 33}}{H^{3333}} \\ \widehat{C}^{\alpha\beta} = H^{\alpha 3\beta 3} \end{cases} \quad (21)$$

Après intégration directe de (14), la loi de comportement de coque s'écrit

$$\underline{N} = \underline{A} : \underline{\gamma} + \underline{B} : \underline{\rho} \quad \underline{M} = \underline{B} : \underline{\gamma} + \underline{D} : \underline{\rho} \quad (22)$$

avec

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C^{\alpha\beta\gamma\delta} \mu d\xi^3 \quad B^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C^{\alpha\beta\gamma\delta} \xi^3 \mu d\xi^3 \quad D^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C^{\alpha\beta\gamma\delta} (\xi^3)^2 \mu d\xi^3 \quad (23)$$

La loi de comportement en cisaillement transverse s'écrit

$$\underline{Q} = k \underline{F} : \underline{\xi} \quad (24)$$

avec

$$F^{\alpha\beta} = \int_H \widehat{C}^{\alpha\beta} \mu d\xi^3 \quad (25)$$

$k$  est le coefficient correcteur des cisaillements, ici supposé indépendant de la courbure de la coque ainsi que de la de la stratification (ce coefficient valant 5/6 dans le cas d'un comportement en cisaillement transverse homogène suivant l'épaisseur).

Pour la loi de comportement (22), on supposera dans la suite de l'article que les comportements de membrane et de flexion sont découplés, soit  $\underline{B} = 0$  (les hypothèses nécessaires à ce choix seront présentées dans la section 4.1).

On notera

$$\underline{a} = \underline{A}^{-1} \quad \underline{d} = \underline{D}^{-1} \quad \underline{f} = \underline{F}^{-1} \quad (26)$$

**Remarque :** Les composantes  $H^{ijkl}$  du tenseur  $\underline{H}$  intervenant dans les expressions (23) et (25) sont les composantes du tenseur exprimé dans la base covariante d'espace (c'est à dire au point  $P$ ) : elles font donc intervenir la coordonnée  $\xi^3$  ainsi que les rayons de courbures. Ces composantes au point  $P$  sont reliées aux composantes  $H_M^{ijkl}$  du tenseur  $\underline{H}$  au point  $M$  dans la base covariante de la surface  $S$  par les relations suivantes :

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = m_{\alpha'}^\alpha m_{\beta'}^\beta m_{\gamma'}^\gamma m_{\delta'}^\delta H_M^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \quad H^{\alpha 3\beta 3} = m_{\alpha'}^\alpha m_{\beta'}^\beta H_M^{\alpha'3\beta'3} \quad (\text{avec} \quad \mu_{\gamma'}^\alpha m_{\beta'}^\gamma = \delta_{\beta'}^\alpha) \quad (27)$$

## 2.4 Formulations variationnelles

Le problème d'élasticité de référence ( $P$ ) est défini par l'ensemble des équations (15)(16)(17)(22)(24).

On appelle  $U_{ad}$  l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites en déplacements (17) et  $\Sigma_{ad}$  l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles, c'est-à-dire vérifiant les équations d'équilibre (15) et les conditions aux limites en efforts (16).

### Formulation variationnelle en déplacement.

Si  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$  est un champs de déplacement solution du problème ( $P$ ) alors

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \in U_{ad} \\ \alpha((\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}), (\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}')) = L(\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}') \quad \forall (\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}') \in U_{ad} \end{cases} \quad (28)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha((\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}), (\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}')) &= \iint_S \left( A^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \gamma_{\gamma\delta}(\mathbf{u}') + D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \rho_{\gamma\delta}(\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}') + k F^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \zeta_{\beta}(\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}') \right) dS \\ L(\mathbf{u}', \boldsymbol{\theta}') &= \iint_S (p^i u'_i + \mathfrak{M}^{\alpha} \theta'_{\alpha}) dS + \int_{\partial S_1} (T^i u'_i + C^{\alpha} \theta'_{\alpha}) ds \end{aligned}$$

### Théorème de l'énergie complémentaire.

Si  $(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q})$  est un champs de contraintes solution de ( $P$ ) alors

$$\begin{cases} (\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}) \in \Sigma_{ad}, \\ J(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}) \leq J(\underline{N}', \underline{M}', \underline{Q}') \quad \forall (\underline{N}', \underline{M}', \underline{Q}') \in \Sigma_{ad} \end{cases} \quad (29)$$

avec

$$J(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}) = \frac{1}{2} \iint_S \left( a_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta} + d_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} + \frac{1}{k} f_{\alpha\beta} Q^{\alpha} Q^{\beta} \right) dS$$

### Relation entre compliance et énergie de déformation.

Si  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$  et  $(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q})$  sont solutions du problème ( $P$ ), alors

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = 2J(\underline{N}, \underline{M}, \underline{Q}) \quad (30)$$

## 3 Problème et algorithme d'optimisation

### 3.1 Problème d'optimisation

L'optimisation de la rigidité structurale d'une coque mince stratifiée soumise à un chargement en membrane et en flexion est formulée comme la minimisation du travail des efforts extérieurs (ou *compliance*) par rapport à un ensemble de paramètres d'optimisation distribués  $\beta_i \in [\beta_i^{\min}, \beta_i^{\max}]$  (c'est à dire continûment variables sur la surface  $S$  de la coque) :

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{\min}, \beta_i^{\max}]} \left[ \iint_S (p^i u_i + \mathfrak{M}^{\alpha} \theta_{\alpha}) dS + \int_{\partial S_1} (T^i u_i + C^{\alpha} \theta_{\alpha}) ds \right] \quad (31)$$

La compliance étant égale au double de de l'énergie complémentaire (voir éq (30)), l'utilisation du théorème de l'énergie complémentaire (29) permet de transformer le problème d'optimisation (31) en un problème de double minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation et par rapport aux efforts généralisés de membrane, de flexion et de cisaillement transverse statiquement admissibles :

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{\min}, \beta_i^{\max}]} \min_{(\underline{N}', \underline{M}', \underline{Q}') \in \Sigma_{ad}} \left[ \iint_S \left( a_{\alpha\beta\gamma\delta} N'^{\alpha\beta} N'^{\gamma\delta} + d_{\alpha\beta\gamma\delta} M'^{\alpha\beta} M'^{\gamma\delta} + \frac{1}{k} f_{\alpha\beta} Q'^{\alpha} Q'^{\beta} \right) dS \right] \quad (32)$$

## 3.2 Algorithme d'optimisation

Le problème d'optimisation (32) est résolu en utilisant un algorithme d'optimisation introduit par *Allaire et al.* [2] :

– **Initialisation :**

Le maillage, les conditions aux limites en déplacements et en efforts appliquées sur la coque et le champ initial des paramètres d'optimisation  $\beta_i^{(0)}$  sont définis afin de calculer par une méthode aux éléments finis les efforts généralisés  $(\underline{N}^{(0)}, \underline{M}^{(0)}, \underline{Q}^{(0)})$

– **Itération :**

Chaque itération est composée de deux parties :

1. **Minimisations locales à contraintes fixées.**

Le critère local à contraintes  $(\underline{N}^{(n)}, \underline{M}^{(n)}, \underline{Q}^{(n)})$  fixées, est minimisé en résolvant en tout point de  $\Omega$  le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\beta_i \in [\beta_i^{min}, \beta_i^{max}]} \left[ \underline{N}^{(n)} : \underline{a}(\beta_i) : \underline{N}^{(n)} + \underline{M}^{(n)} : \underline{d}(\beta_i) : \underline{M}^{(n)} + \frac{1}{k} \underline{Q}^{(n)} \cdot \underline{f}(\beta_i) \cdot \underline{Q}^{(n)} \right] \quad (33)$$

2. **Minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés.**

Le problème d'élasticité associé au champ de paramètres  $\beta_i^{(n+1)}$  déterminé dans l'étape de minimisations locales est résolu afin d'obtenir le nouveau champ d'efforts généralisés  $(\underline{N}^{(n+1)}, \underline{M}^{(n+1)}, \underline{Q}^{(n+1)})$ .

Cet algorithme est démontré être convergent. Sa performance numérique est liée au caractère local des analyses de sensibilité (aucune analyse de sensibilité globale n'est à effectuer).

## 4 Optimisation de coques stratifiées

### 4.1 Optimisation et comportement découplé

Dans le cas d'une coque constituée d'un matériau homogène élastique isotrope, la loi de comportement de coque (22) est couplée ( $\underline{B} \neq 0$ ). En considérant une coque stratifiée, il est donc illusoire dans le cas général de trouver des stratifications particulières permettant d'obtenir une loi de comportement découplée.

Pour obtenir un découplage du comportement du stratifié, il est nécessaire de négliger les influences de la courbure sur  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{D}$ . En notant avec un indice  $M$  les composantes des tenseurs dans la base covariante de la surface  $S$ , cela revient à supposer que :

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} \simeq C^{\alpha\beta\gamma\delta}|_{\xi^3=0} = C_M^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{et} \quad \mu = \det(\mu_\alpha^\beta) \simeq 1 \quad (34)$$

Les composantes de  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{D}$  dans la base covariante de la surface  $S$  s'écrivent alors

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C_M^{\alpha\beta\gamma\delta} d\xi^3 \quad B^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C_M^{\alpha\beta\gamma\delta} \xi^3 d\xi^3 \quad D^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C_M^{\alpha\beta\gamma\delta} (\xi^3)^2 d\xi^3 \quad (35)$$

On note  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{a}_3)$  le repère orthonormé dans lequel est défini la loi de comportement (18) en terme de composantes physiques. On note  $\psi_\alpha^\beta$  et  $\varphi_\alpha^\beta$  ( $\psi_\alpha^\gamma \varphi_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta$ ) les matrices reliant cette base à la base covariante de la surface  $S$

$$\mathbf{a}_\alpha = \varphi_\alpha^\beta \mathbf{i}_\beta \quad \mathbf{i}_\alpha = \psi_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta$$

Les composantes dans la base orthonormée  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{a}_3)$  seront notées avec un tilde ( $\sim$ ).

On démontre que (voir ci-dessous) :

$$\tilde{A}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H \tilde{C}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} d\xi^3 \quad \tilde{B}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H \tilde{C}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} \xi^3 d\xi^3 \quad \tilde{D}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H \tilde{C}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} (\xi^3)^2 d\xi^3 \quad (36)$$

et les lois de comportements (approchées) de coques obtenues sont identiques à celles de plaques. Le découplage du comportement membrane/flexion peut alors être obtenu par les mêmes stratifications que celles des plaques stratifiées.

Par souci de cohérence, on négligera aussi les influences de la courbure dans la loi de comportement en cisaillement transverse (24), soit

$$F^{\alpha\beta} = \int_H \widehat{C}_M^{\alpha\beta} d\xi^3 \quad \widehat{F}^{\alpha\beta} = \int_H \widetilde{C}_M^{\alpha\beta} d\xi^3$$

**Démonstration de (36).**

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H C_M^{\alpha\beta\gamma\delta} d\xi^3 = \int_H \Psi_{\alpha'}^{\alpha} \Psi_{\beta'}^{\beta} \Psi_{\gamma'}^{\gamma} \Psi_{\delta'}^{\delta} \widetilde{C}_M^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} d\xi^3 = \Psi_{\alpha'}^{\alpha} \Psi_{\beta'}^{\beta} \Psi_{\gamma'}^{\gamma} \Psi_{\delta'}^{\delta} \int_H \widetilde{C}_M^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} d\xi^3$$

or  $A^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Psi_{\alpha'}^{\alpha} \Psi_{\beta'}^{\beta} \Psi_{\gamma'}^{\gamma} \Psi_{\delta'}^{\delta} \widetilde{A}^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$  donc  $\widetilde{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_H \widetilde{C}_M^{\alpha\beta\gamma\delta} d\xi^3$

**Remarque.** En ne faisant pas l'hypothèse précédente dans la loi de comportement, on n'obtient pas d'équivalent à la relation (36).

## 4.2 Stratifications particulières à plis identiques

Considérons des stratifications à plis identiques (matériau identique dans chaque pli, plis de même épaisseur). La couche de base est supposée avoir un comportement élastique orthotrope.

Nous supposons que la stratification assure les propriétés de découplage de la loi de comportement ( $\underline{B} = 0$ ) et d'orthotropie en membrane *et* en flexion.

Le problème de minimisation locale (33) a été résolu théoriquement sous ces hypothèses pour une énergie locale de membrane *ou* de flexion (sans cisaillement transverse) dans le cas de plaques [3]. Pour les coques, ces énergies coexistent et aucune résolution théorique n'a été démontrée.

Nous considérerons dans ce travail des stratifications alternées (de type *angle-ply*) assurant de plus la propriété de quasi-homogénéité ( $\underline{A}^* = \underline{D}^*$ ). Cette propriété de quasi-homogénéité rajoute une contrainte d'optimisation au problème mais celle-ci peut être facilement contournée en se limitant à des séquences de stratifications particulières satisfaisant cette propriété [4]. A titre d'exemple une séquence à 8 plis de type *angle-ply* découpée, quasi-homogène et orthotrope est

$$[+\alpha/-\alpha/-\alpha/+\alpha/-\alpha/+\alpha/+\alpha/-\alpha] \quad (37)$$

Pour ce type de stratifications, les paramètres d'optimisation sont l'orientation du repère d'orthotropie du stratifié homogénéisé  $\Phi_1 \in [0^\circ, 90^\circ]$  et de l'angle de stratification  $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$ .

L'énergie de cisaillement transverse étant petite devant les énergies de membrane et de flexion, nous faisons à ce stade l'hypothèse que le comportement en cisaillement transverse des plis est isotrope. En terme de modules de l'ingénieur, cela revient à imposer  $G_{TT} = G_{LT}$ , et la loi de comportement en cisaillement transverse de la coque (24) devient

$$\mathbf{Q} = \frac{5}{6} H \widehat{C} \cdot \underline{\zeta} \quad (\underline{F} = H \widehat{C}) \quad (38)$$

## 4.3 Résolution du problème de minimisation locale

Sous les hypothèses présentées dans les sections 4.1 et 4.2, la minimisation locale du critère se réduit à la minimisation de la somme des énergies de déformation en membrane et en flexion car l'énergie en cisaillement transverse est constante lors de la minimisation locale. Dans ce cas, la partie du critère d'optimisation dépendant des paramètres d'optimisation s'écrit :

$$\widehat{W} = \frac{1}{H} \underline{N} : \underline{a}^* : \underline{N} + \frac{12}{H^3} \underline{M} : \underline{a}^* : \underline{M} \quad (39)$$

où  $\underline{a}^* = H \underline{a}$  est la souplesse homogénéisée de membrane (la souplesse homogénéisée en flexion est identique compte tenu de l'hypothèse de quasi-homogénéité).

Les minimisations locales par rapport à la direction d'orthotropie  $\Phi_1$  et l'angle de stratification  $\alpha$  sont interdépendantes. Pour résoudre ce problème de minimisation, un algorithme de point fixe est utilisé. Le choix de multiples initialisations permet de trouver le minimum global dans les cas de multiples minima locaux. La résolution numérique est facilitée par l'existence de solutions semi-analytiques [5] aux problèmes de minimisations locales par rapport à la direction d'orthotropie à angle de stratification fixé et par rapport à l'angle de stratification à direction d'orthotropie fixée .

## 5 Exemple numérique

### 5.1 Mise en œuvre numérique du calcul EF

Afin de simuler numériquement le comportement des coques minces, nous utilisons l'élément fini *q4cs* qui se base sur la formulation en éléments finis de l'élément de coque *mitc4* (élément quadrangulaire à 5 degrés de liberté par nœud, trois déplacements et deux rotations). Cet élément permet de calculer les efforts généralisés de membrane  $\underline{N}$ , de flexion  $\underline{M}$ , et de cisaillement transverse  $\underline{Q}$  dans le repère orthonormé par élément fixé par l'utilisateur et qui est utilisé pour la définition du comportement matériau.

Le calcul de la loi de comportement homogénéisée dans l'épaisseur en utilisant l'élément fini *q4cs* du code éléments finis *OpenFEM-SDTools* s'effectue en tenant compte de l'hypothèse (34) : le comportement homogénéisé ne dépend pas de la courbure de la structure et le découplage du comportement de membrane et de flexion se formule de manière identique à celui des lois de comportement de plaque.

### 5.2 Exemple d'un cylindre avec plancher

La structure est constituée d'un cylindre dans lequel est encastré un plancher occupant la position d'un plan diamétral d'équation  $x = 0$ , (figure 1(a)). La structure est encastrée en  $z = 0$ . Une pression interne  $P$  est appliquée sur une moitié du cylindre ( $x < 0$ ). Le plancher et le cylindre stratifiés ont une couche de base unidirectionnelle Carbone/Epoxyde. Le calcul est initialisé par un unidirectionnel orienté de façon circonférentielle sur le cylindre et orienté suivant le diamètre dans le plancher (figure 1(b)).

La figure 5.2 montre les orientations optimales des plis à  $(\Phi_1 + \alpha)$  et à  $(\Phi_1 - \alpha)$ . On note que l'unidirectionnel ( $\alpha = 0$ ) est optimal sur le bord encastré et sur le bord libre, pour ensuite passer à un *l'angle ply* avec  $\alpha$  variant entre 0 et  $\pi/4$ . Cette variation se produit à certains endroits de façon brusque en passant d'un unidirectionnel à un *cross ply* équilibré ( $\alpha = \pi/4$ ).

Le tableau 1 présente les résultats de l'optimisation du cylindre avec plancher. Les gains en énergie et en déplacement sont respectivement 85 % et 76 %.

	Etat initial	Etat optimal	Diminution
Energie de membrane	26.3	3.0	89 %
Energie de flexion	1.2	1.1	8 %
Energie de cisaillement	0.021	0.024	-13 %
Critère global (en J)	27.5	4.1	85 %
Dépl. max.	3.4 mm	0.8 mm	76 %

TABLE 1 – Critères et déplacements maximaux

## Références

- [1] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, F. Léné. *Optimisation de plaques stratifiées en représentation polaire*, Comptes-rendus du 9ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, pages 499-504, 2009.
- [2] G. Allaire, R.V. Kohn. *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using external micro structures*, Eur. J. Mech. A/solids, 839-878, 1993.
- [3] C. Julien. *Conception optimale de l'anisotropie dans les structures stratifiées à rigidité variable par la méthode polaire-génétique*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [4] P. Vannucci, G. Verchery. *A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates*, Comp. Sci. Tech., 61, 1465-1473, 2001.
- [5] A. Jibawy. *Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2010.



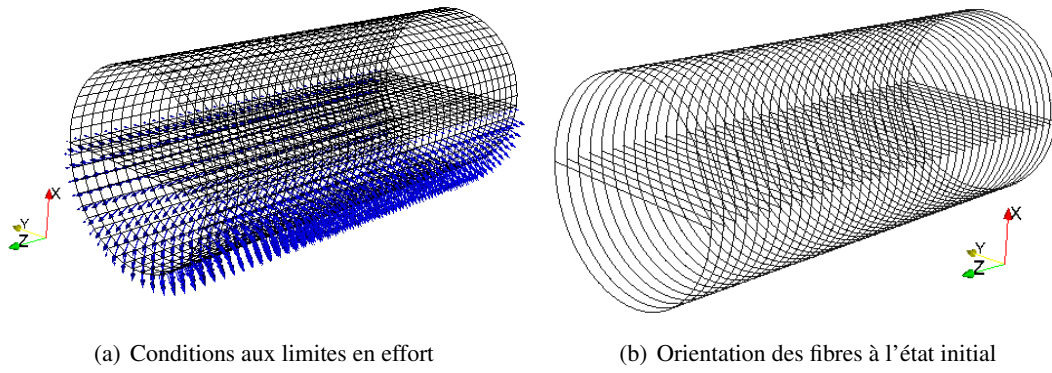


FIGURE 1 – Schéma du cylindre avec plancher

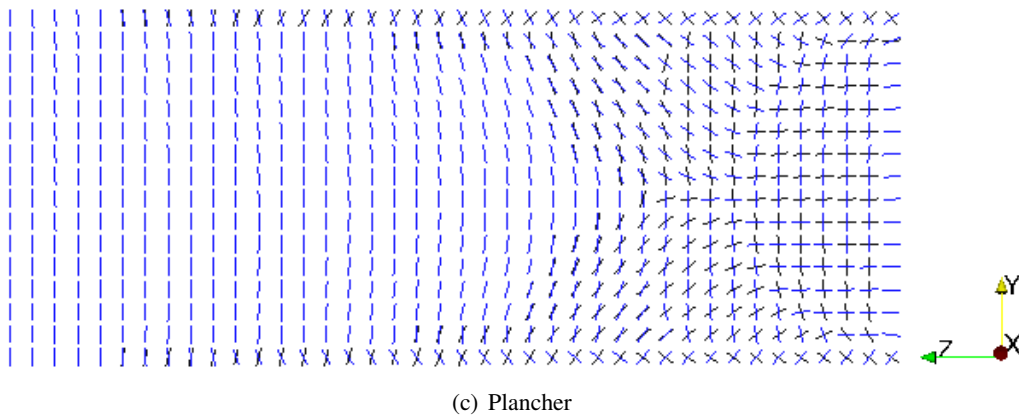
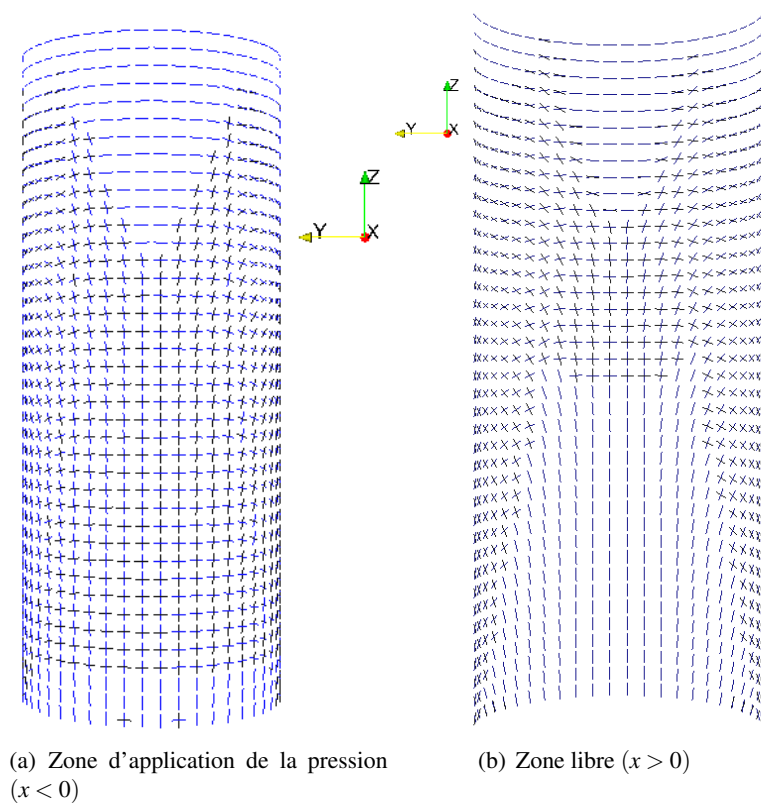


FIGURE 2 – Orientation optimale des plis à  $(\Phi_1 + \alpha)$  et à  $(\Phi_1 - \alpha)$