

# Optimisation topologique de structures élastiques par la méthode des éléments de frontière

G. Hello<sup>1</sup>, A. Rassineux<sup>1</sup>, H. Kebir<sup>1</sup>, L. Chambon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Roberval, Université de Technologie de Compiègne, France, gaetanhello@gmail.com, {alain.rassineux,hocine.kebir}@utc.fr

<sup>2</sup> EADS-IW, Centre de Toulouse, France, laurent.chambon@eads.net

**Résumé** — Cette communication présente une procédure d'optimisation topologique des structures mécaniques bidimensionnelles pour le problème d'élasticité linéaire. La résolution du problème mécanique ainsi que l'obtention des champs d'intérêt s'appuient ici sur la méthode des éléments de frontière. La topologie optimale recherchée minimise l'énergie de déformation stockée par le système pour une masse (ou surface) donnée. L'approche retenue "Bi-directional Evolutionary Structural Optimization" gère à la fois la création et la suppression de matière et conduit à des solutions de densité homogène.

**Mots clés** — Optimisation topologique, élasticité, Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, méthode des équations intégrales de frontière.

## 1 Introduction

L'optimisation topologique des structures mécaniques a fait l'objet de nombreux travaux associant principalement la méthode des éléments-finis avec une approche d'homogénéisation [1]. Un certain nombre d'instabilités numériques ont été rencontrées (puis maîtrisées dans une bonne mesure) dans ce contexte : répartition en damier, dépendances aux maillages et topologies initiales, atteinte de minima locaux ... Les travaux présentés ici entendent aborder l'optimisation topologique pour l'élasticité linéaire en combinant la méthode des équations intégrales de frontière (BIEM) [2] [3] [4] avec l'approche "Bi-directional Evolutionary Structural Optimization" (BESO) [5] [6].

## 2 Problème d'élasticité linéaire par la méthode des éléments de frontière

La formulation intégrale du problème d'élasticité linéaire sur un domaine  $\Omega$  de contour  $\partial\Omega$  s'exprime classiquement sous la forme d'équations intégrales en déplacements sur le contour (1) et en contraintes internes (2) :

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (2)$$

Les intégrales n'ayant comme support que  $\partial\Omega$ , le maillage ne porte donc que sur le seul contour du domaine. La discrétisation de (1) par la méthode des éléments de frontière conduit à un système linéaire dont la résolution fournit les valeurs nodales des champs de contour. Discrétisée à son tour, la seconde équation intégrale (2) permet ensuite de déduire l'état de contrainte en tout point de  $\Omega$ .

## 3 Optimisation de la topologie par BESO/BIEM

La topologie optimale recherchée minimise l'énergie de déformation globale  $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega$  stockée par la structure sous la contrainte que la masse (ou surface) atteigne une valeur prescrite  $m^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i = 0$  avec  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ . Dans le contexte BESO, les  $\alpha_i$  valent exclusivement 0 ou 1 et non une valeur comprise entre 0 et 1. L'uniformité de la densité est ainsi assurée dans toute la structure pour les solutions proposées par cette méthode.

Pour le problème considéré, le domaine est décomposé artificiellement en cellules carrées identiques. Ce choix offre une discrétisation immédiate du contour permettant d'alimenter le solveur BEM. Les cellules présentent également l'avantage d'offrir une répartition harmonieuse des points de post-traitement pour les contraintes où peuvent ensuite être calculées des énergies de déformations locales. Sur la base du champ d'énergie de déformation, certaines des cellules sont jugées inutiles et supprimées tandis que d'autres, très sollicitées, sont soulagées par l'ajout de matière à proximité (fig. 1)

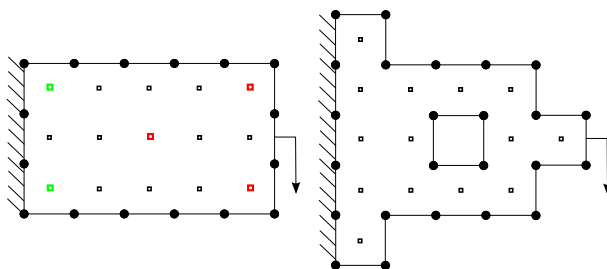


FIGURE 1 – Création et suppression de matière pour une itération d'optimisation

## 4 Résultats de simulations

La procédure numérique développée autorise la résolution de nombreux problèmes classiques en optimisation topologique. En particulier, les solutions aux problèmes de la poutre cantilever et d'un "pont" soumis à une charge ponctuelle sont ici illustrées (fig. 2).

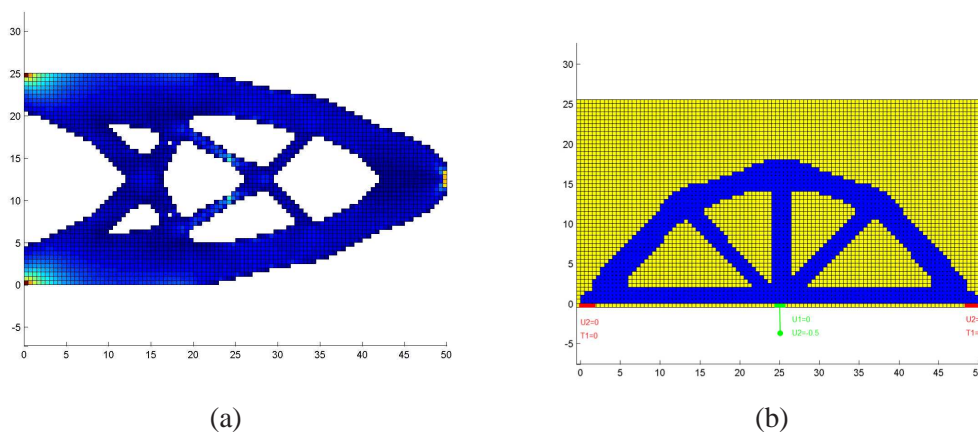


FIGURE 2 – (a) Problème de la poutre cantilever - (b) Problème du pont

## Références

- [1] M.P. Bendsoe, O. Sigmund. *Optimization of structural topology, shape, and material*, Springer, 2003.
- [2] C. Brebbia, L. Wrobel, J. Telles. *Boundary element techniques : theory and applications in engineering*, Springer Verlag, 1984.
- [3] M. Bonnet. *Boundary integral equation methods for solids and fluids*, Wiley, 1999.
- [4] F. Aliabadi. *The boundary element method : applications in solids and structures*, Wiley, 2002.
- [5] X. Huang, Y.M. Xie, M.C. Burry. *A new algorithm for bi-directional evolutionary structural optimization*, JSME International Journal Series C, JSME, 1091-1099, 2006.
- [6] X. Huang, Y.M. Xie. *Evolutionary topology optimization of continuum structures : methods and applications*, Wiley-Blackwell, 2010.