



**HAL**  
open science

# Optimisation topologique de structures élastiques par la méthode des éléments de frontière

Gaëtan Hello, Alain Rassineux, Hocine Kebir, Laurent Chambon

► **To cite this version:**

Gaëtan Hello, Alain Rassineux, Hocine Kebir, Laurent Chambon. Optimisation topologique de structures élastiques par la méthode des éléments de frontière. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592938

**HAL Id: hal-00592938**

**<https://hal.science/hal-00592938>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation topologique de structures élastiques par la méthode des éléments de frontière

G. Hello<sup>1</sup>, A. Rassineux<sup>1</sup>, H. Kebir<sup>1</sup>, L. Chambon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Roberval, Université de Technologie de Compiègne, France, gaetanhello@gmail.com, {alain.rassineux,hocine.kebir}@utc.fr

<sup>2</sup> EADS-IW, Centre de Toulouse, France, laurent.chambon@eads.net

**Résumé** — Cette communication présente une procédure d'optimisation topologique des structures mécaniques bidimensionnelles pour le problème d'élasticité linéaire. La résolution du problème mécanique ainsi que l'obtention des champs d'intérêt s'appuient ici sur la méthode des éléments de frontière. La topologie optimale recherchée minimise l'énergie de déformation stockée par le système pour une masse (ou surface) donnée. L'approche retenue "Bi-directional Evolutionary Structural Optimization" gère à la fois la création et la suppression de matière et conduit à des solutions de densité homogène.

**Mots clés** — Optimisation topologique, élasticité, Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, méthode des équations intégrales de frontière.

## 1 Introduction

L'optimisation topologique des structures mécaniques a fait l'objet de nombreux travaux associant principalement la méthode des éléments-finis avec une approche d'homogénéisation [1]. Un certain nombre d'instabilités numériques ont été rencontrées (puis maîtrisées dans une bonne mesure) dans ce contexte : répartition en damier, dépendances aux maillages et topologies initiales, atteinte de minima locaux [2]... Les travaux présentés ici entendent aborder l'optimisation topologique pour l'élasticité linéaire en combinant la méthode des équations intégrales de frontière (BIEM) [3, 4, 5] avec l'approche "Bi-directional Evolutionary Structural Optimization" (BESO) [6, 7, 8, 9].

## 2 Problème d'élasticité linéaire par la méthode des éléments de frontière

### 2.1 Formulation de l'élasticité par équations intégrales

La formulation intégrale du problème d'élasticité linéaire sur un domaine  $\Omega$  de contour  $\partial\Omega$  s'exprime classiquement sous la forme d'une équation intégrale en déplacements :

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) \quad (1)$$

avec  $c_{ij}(\mathbf{x})$  coefficient dépendant de la position de  $\mathbf{x}$  sur  $\Omega$ ,  $u_j$  et  $t_j$  respectivement les champs de déplacements et de tensions sur  $\partial\Omega$ ,  $U_{ij}$  et  $T_{ij}$  des noyaux associés à la solution fondamentale de Kelvin [3, 4, 5],  $\int_{\partial\Omega}$  une intégrale évaluée au sens de la valeur principale de Cauchy.

Cette équation permet, si l'on connaît les champs de déplacements et de tensions sur  $\partial\Omega$ , d'estimer la valeur des déplacements en tout point de  $\Omega$ . Il apparaît donc possible de déduire une représentation intégrale pour les déformations dans  $\Omega$  à partir de Eq. (1) selon :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j(\mathbf{x})} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i(\mathbf{x})} \right) \quad (2)$$

L'application de la loi de comportement pour un milieu homogène isotrope linéaire à Eq. (2) conduit ensuite à l'expression d'une équation intégrale pour les contraintes internes :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) \quad (3)$$

où  $D_{ijk}$  et  $S_{ijk}$  sont de nouveaux noyaux associés à la solution fondamentale de Kelvin [3, 4, 5].

Cette équation intégrale (3) permet de déduire l'état de contrainte à partir de la connaissance des champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  sur  $\partial\Omega$ . En pratique, les champs sur  $\partial\Omega$  ne sont initialement que partiellement connus grâce aux conditions-limites du problème d'élasticité. L'objectif de la discrétisation de l'équation intégrale (1) selon l'approche des éléments de frontière va donc consister à obtenir un système linéaire inversible permettant l'estimation discrète de ces quantités sur la totalité du maillage de  $\partial\Omega$ .

## 2.2 Méthode des éléments de frontière

La discrétisation du problème d'élasticité par la méthode des éléments de frontière (BEM) repose dans un premier temps sur la discrétisation de la géométrie du problème. Pour les applications visées, le contour  $\partial\Omega$  est décomposé en un ensemble de mailles  $\partial\Omega_e$  ayant comme supports des segments de droite. Un nuage de points associé aux sites où l'on souhaite post-traiter les contraintes est également généré.

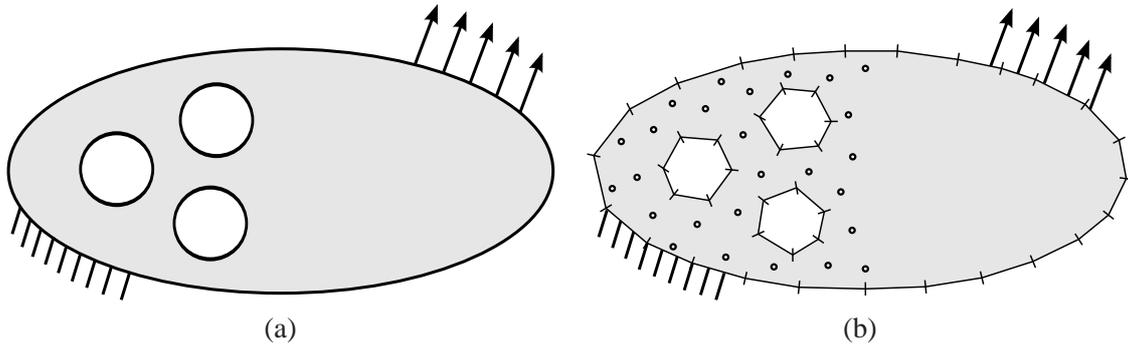


FIGURE 1 – Géométries pour le problème d'élasticité : (a) réelle, (b) discrétisée

La seconde étape de la discrétisation BEM concerne l'approximation locale des champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  sur les mailles de contour  $\partial\Omega_e$ . Une représentation polynomiale quadratique non conforme est choisie :

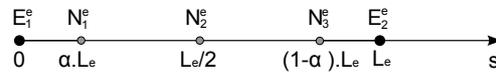


FIGURE 2 – Paramétrisation des points de collocation sur l'élément de frontière  $\partial\Omega_e$

L'aspect non-conforme de l'interpolation s'avère ici particulièrement avantageuse. En effet, le fait que deux mailles successives ne partagent aucun degré de liberté autorise celles-ci à avoir des mouvements relatifs. La gestion de topologies en "damier", problème majeur en optimisation topologique par FEM [2], est ainsi nativement évité par la BEM.

Ayant discrétisé tant la géométrie que les champs inconnus du contour, l'équation intégrale en déplacements (1) peut à son tour être discrétisée sur  $\partial\Omega$  selon :

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{\partial\Omega}} \int_{\partial\Omega_e} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \sum_{m=1}^{P_{1D}} N_{1D}^{e,m}(\mathbf{y}) t_j^{e,m} \right) dS(\mathbf{y}) - \sum_{e=1}^{n_{\partial\Omega}} \int_{\partial\Omega_e} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left( \sum_{m=1}^{P_{1D}} N_{1D}^{e,m}(\mathbf{y}) u_j^{e,m} \right) dS(\mathbf{y}) \quad (4)$$

avec  $n_{\partial\Omega}$  le nombre de mailles de contour,  $P_{1D}$  le nombre de fonctions de forme,  $N_{1D}^{e,m}$  les fonctions de forme,  $t_j^{e,m}$  et  $u_j^{e,m}$  les inconnues nodales.

La collocation de Eq. (4) sur l'ensemble des points d'interpolation des mailles  $\partial\Omega_e$  permet d'aboutir à une représentation algébrique du problème d'élasticité discrétisé :

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} \quad (5)$$

L'imposition des conditions-limites permet de déterminer la moitié des inconnues de contour. Le système (5) est ensuite réordonné de sorte que toutes les inconnues de contour restantes  $\{x\}$  soient regroupées

dans le membre de gauche. On aboutit alors au système final :

$$[K_x]\{x\} = [K_{\bar{x}}]\{\bar{x}\} \quad (6)$$

Ce système linéaire est résolu par une méthode directe *LU* avec pivotage partiel. Une fois pleinement connus les champs de contour discrétisés  $\{u\}$  et  $\{t\}$ , la discrétisation de l'équation intégrale en contraintes (3) permet de post-traiter directement l'état de contrainte aux points intérieurs choisis :

$$\{\sigma\} = [A']\{u\} + [B']\{t\} \quad (7)$$

### 3 Optimisation de la topologie par BESO/BIEM

Pour l'heure, deux méthodes sont principalement employées afin de résoudre des problèmes d'optimisation topologique en élasticité linéaire. La première d'entre elles, la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [1, 10], consiste à optimiser les densités matérielles locales dans l'espace de conception de la structure. Cette approche est capable d'engendrer des solutions micro-structurées optimales. Toutefois, la nécessité de gérer des densités matérielles intermédiaires peut conduire à des instabilités numériques [2] et n'offre pas nativement des topologies pratiquement exploitables. La méthode (B)ESO (Bi-directionnal) Evolutionary Structural Optimization [6, 7, 8, 9] considère elle une répartition binaire de la matière dans le système. Une heuristique exploitant les champs mécaniques est utilisée pour guider la suppression et l'ajout de matière. Bien que non-optimales d'un point de vue mathématique [11], les solutions proposées par cette approche conduisent à des designs mécaniquement satisfaisants et exploitables pratiquement.

Pour l'essentiel, les approches SIMP et BESO ont été associées à des solveurs mécaniques FEM [12]. S'agissant de l'approche SIMP, il semble naturel de s'appuyer sur une méthode numérique faisant intervenir une discrétisation complète du domaine afin de pouvoir gérer les densités intermédiaires. Concernant l'approche BESO, la BEM peut s'avérer une alternative séduisante pour les problèmes homogènes linéaires isotropes. Son emploi en optimisation topologique est récent [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. L'heuristique de suppression de la matière y est guidée (à l'exception du plus ancien article [13]) par un critère mécanique de gradient topologique [21]. La sensibilité d'une zone à la croissance d'une cavité va conditionner son maintien ou sa suppression au fil des itérations d'optimisation.

L'usage du gradient topologique exige que les topologies initiales et finales soient homéomorphes. La naissance ou le comblement d'un trou conduisant à une modification de la topologie, le gradient topologique est en pratique calculé entre deux configurations où le rayon du trou varie. Souhaitant gérer à la fois la création et la suppression de matière, il semble également raisonnable de s'appuyer sur une heuristique basée sur l'énergie de déformation locale.

La topologie optimale recherchée a vocation à minimiser l'énergie de déformation globale sous contrainte de masse prescrite :

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_e \int_{\Omega_e} \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e d\Omega_e \\ & \text{subject to} \quad m^* - \sum_e \alpha_e m_e = 0, \quad \alpha_e \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (8)$$

Dans le contexte BESO, les  $\alpha_e$  valent exclusivement 0 ou 1 et non plus une valeur comprise entre 0 et 1. L'uniformité de la densité est ainsi assurée dans toute la structure pour les solutions proposées par cette approche. En toute rigueur, la solution convergée n'est mathématiquement pas optimale. Toutefois, il semble raisonnable d'espérer qu'une heuristique d'ajout/suppression ayant un bien-fondé mécanique puisse conduire à des topologies raisonnablement sous-optimales.

Pour chaque problème considéré, le domaine de conception est décomposé en cellules carrées identiques. Ce choix offre une discrétisation immédiate du contour permettant d'alimenter le solveur BEM. Les cellules présentent également l'avantage d'offrir une répartition harmonieuse des points de post-traitement pour les contraintes où peuvent ensuite être calculées des énergies de déformations locales. Sur la base

du champ d'énergie de déformation, certaines des cellules sont jugées inutiles et supprimées tandis que d'autres, très sollicitées, sont soulagées par l'ajout de matière à proximité (fig. 3).

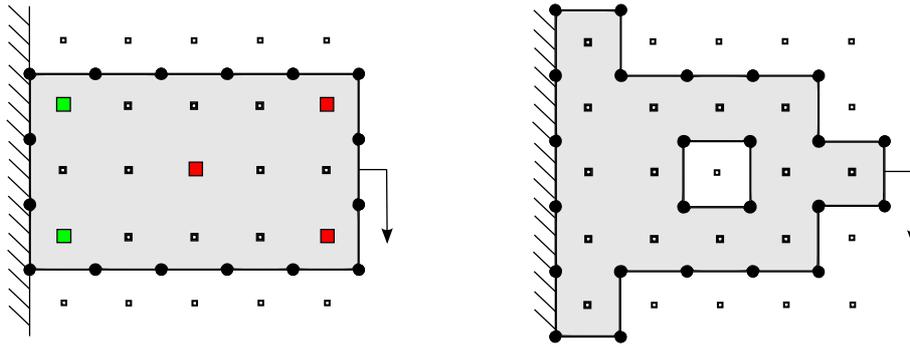


FIGURE 3 – Création et suppression de matière pour une itération d'optimisation

La procédure d'optimisation topologique développée repose ainsi sur le couplage d'une heuristique BESO avec une méthode de résolution BEM du problème d'élasticité sur le domaine pixelisé. L'algorithme d'optimisation peut ainsi se résumer à :

```

Import du maillage de contour et de la grille de post-traitement
Imposition des conditions-limites
Calcul des matrices
while convergence non-atteinte
  Résolution du système linéaire  $\rightarrow \{u\}, \{t\}$ 
  Post-traitement des contraintes  $\rightarrow \{\sigma\}$ 
  Calcul des énergies de déformation locales
  Actualisation du statut des cellules pleine/vide selon l'heuristique
  Mise à jour du maillage de contour
  Imposition des conditions-limites
  Re-calculation des matrices
end
  
```

## 4 Résultats de simulations

La procédure numérique développée autorise la résolution de nombreux problèmes classiques en optimisation topologique. En particulier, les solutions aux problèmes de la poutre cantilever et d'un "pont" soumis à une charge ponctuelle sont ici illustrées (fig. 4).

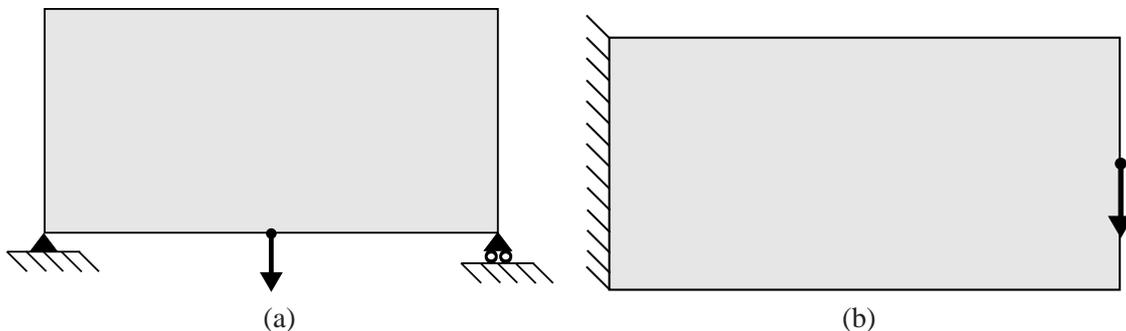


FIGURE 4 – Domaines initiaux et conditions-limites pour les problèmes : (a) du pont, (b) de la poutre cantilever

Les domaines associés à des itérations successives d'optimisation sont décrites pour ces deux problèmes dans Fig. (5) et Fig. (6). Dans ces deux cas, seule l'option de suppression de matière est activée. Le domaine initial consiste en l'ensemble du domaine de conception. La suppression concerne un pourcentage fixé des cellules activées afin de supprimer une quantité de plus en plus faible de cellules à mesure que

la structure s'allège.

Pour le problème du "pont", les cellules situées entre les deux appuis sont délibérément exclues de la procédure de suppression afin de préserver l'existence d'un "tablier". Les solutions obtenues sont en bonne concordance avec les solutions de référence (treillis de Michell). Concernant le problème de la poutre cantilever, la solution convergée possède une structure interne classique en "croisillons". A la différence des méthodes SIMP+FEM habituelles, ces motifs apparaissent spontanément sans nécessiter de procédure spéciale d'homogénéisation des densités.

## 5 Conclusion

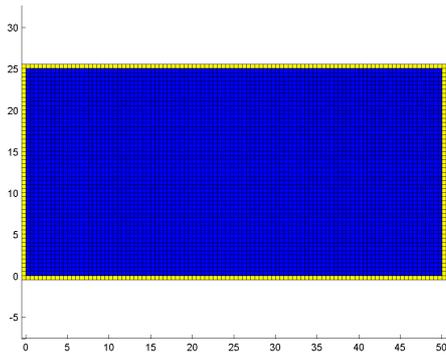
Une procédure d'optimisation topologique pour l'élasticité linéaire basée sur une approche BESO et un solveur BEM a été décrite. L'approche BESO permet d'atteindre de bonnes réponses suboptimales de densité constante par ajout/suppression de cellules. L'emploi de la BEM présente, pour la résolution numérique effective du problème d'élasticité, plusieurs intérêts :

- la discrétisation de la géométrie n'exige que le maillage du contour
- le calcul des contraintes s'effectue par simple post-traitement des champs de contour
- il est possible de déduire les contraintes en tout point du domaine
- la méthode est stable pour un domaine pixelisé en cellules carrées identiques
- l'apparition de zones en "damier" est nativement évitée

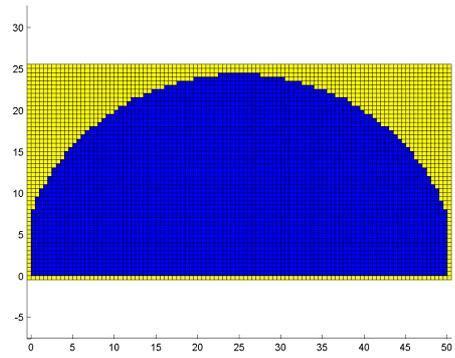
## Références

- [1] M.P. Bendsoe, O. Sigmund. *Optimization of structural topology, shape, and material*, Springer, 2003.
- [2] O. Sigmund, J. Petersson. *Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima*, Structural Optimization, Springer Verlag, 68-75, 1999.
- [3] C. Brebbia, L. Wrobel, J. Telles. *Boundary element techniques : theory and applications in engineering*, Springer Verlag, 1984.
- [4] M. Bonnet. *Boundary integral equation methods for solids and fluids*, Wiley, 1999.
- [5] F. Aliabadi. *The boundary element method : applications in solids and structures*, Wiley, 2002.
- [6] O.M. Querin, V. Young, G.P. Steven, Y.M. Xie. *Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 559-573, 2000.
- [7] X. Huang, Y.M. Xie, M.C. Burry. *A new algorithm for bi-directional evolutionary structural optimization*, JSME International Journal Series C, JSME, 1091-1099, 2006.
- [8] X. Huang, Y.M. Xie. *Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method*, Finite Elements in Analysis and Design, Elsevier, 1039-1049, 2007.
- [9] X. Huang, Y.M. Xie. *Evolutionary topology optimization of continuum structures : methods and applications*, Wiley-Blackwell, 2010.
- [10] G. Allaire *Conception optimale des structures*, Springer, 2007.
- [11] G.I.N. Rozvany. *A critical review of established methods of structural topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 217-237, 2008.
- [12] R. Mackerle. *Topology and shape optimization of structures using FEM and BEM - a bibliography (1999-2001)*, Finite elements in analysis and design, Elsevier, 243-253, 2003.
- [13] K. Tai, R.T. Fenner. *Optimum shape and topology design using the boundary element method*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 2021-2040, 1999.
- [14] A.P. Cisilino. *Topology optimization of 2D potential problems using boundary elements*, Computer Modeling in Engineering and Sciences, Tech Science Press, 99-106, 2006.
- [15] K. Abe, S. Kazama, K. Koro. *A boundary element approach for topology optimization problem using the level set method*, Communications in Numerical Methods in Engineering, John Wiley and Sons, 405-416, 2007.
- [16] R.J. Marczak. *Topology optimization and boundary elements—a preliminary implementation for linear heat transfer*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 793-802, 2007.

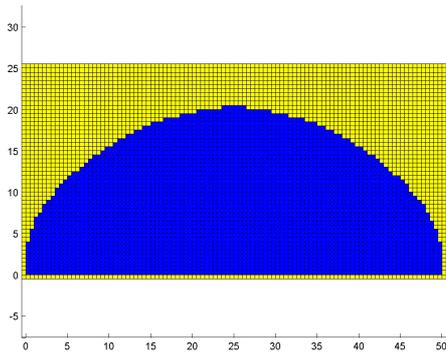
- [17] R.J. Marczak. *Optimization of elastic structures using boundary elements and a topological-shape sensitivity formulation*, Latin American Journal of Solids and Structures, LAJSS, 99-117, 2008.
- [18] L.C. Neches, A.P. Cisilino. *Topology optimization of 2D elastic structures using boundary elements*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 533-544, 2008.
- [19] C.T.M. Anflor, R.J. Marczak. *A boundary element approach for topology design in diffusive problems containing heat sources*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Elsevier, 4604-4611, 2009.
- [20] C. Bertsch, A.P. Cisilino, N. Calvo. *Topology optimization of three-dimensional load-bearing structures using boundary elements*, Advances in Engineering Software, Elsevier, 694-704, 2010.
- [21] A.A. Novotny, R.A. Feijoo, E. Taroco, C. Padra. *Topological sensitivity analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 803-829, 2003.



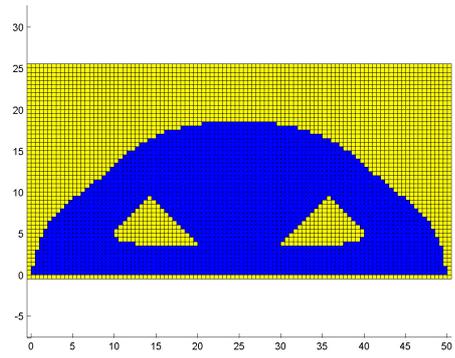
1



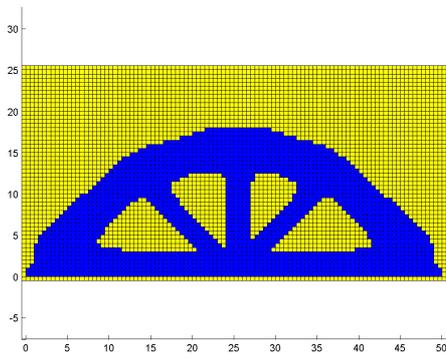
50



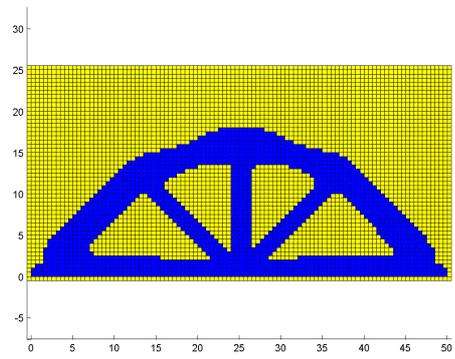
100



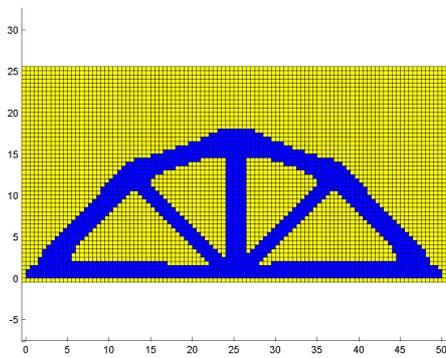
150



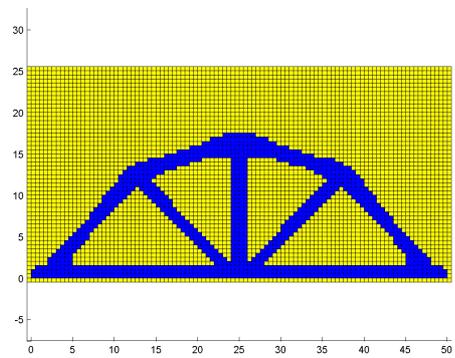
200



250



300



350

FIGURE 5 – Itérations successives pour le problème du "pont" soumis à une force ponctuelle - Suppression guidée par le critère en énergie de déformation

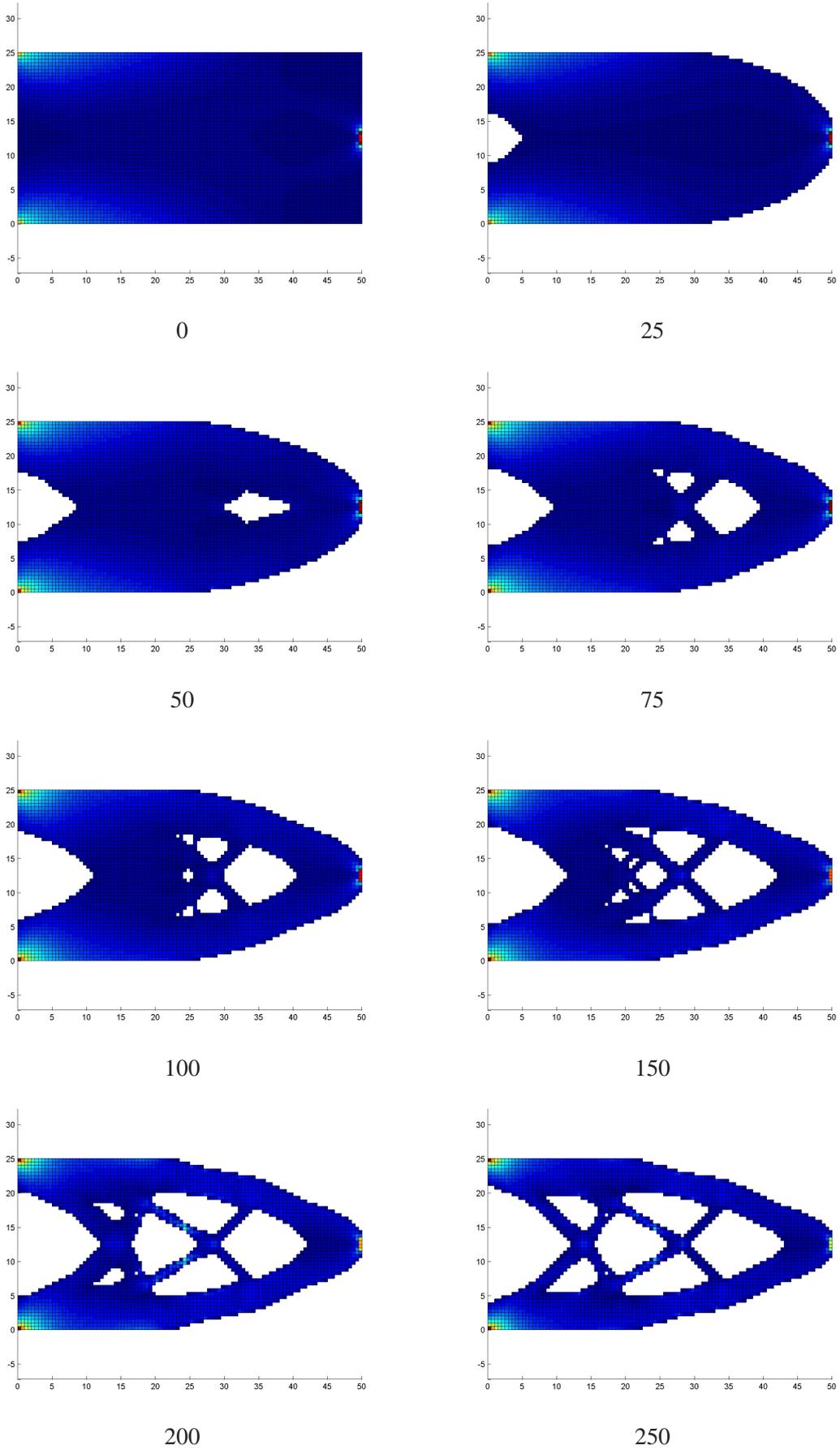


FIGURE 6 – Itérations successives pour le problème de la poutre cantilever - Suppression guidée par le critère en énergie de déformation