



**HAL**  
open science

## Simulation de la rupture ductile par la méthode des éléments de frontière

Gaëtan Hello, Hocine Kebir, Alain Rassineux, Laurent Chambon

► **To cite this version:**

Gaëtan Hello, Hocine Kebir, Alain Rassineux, Laurent Chambon. Simulation de la rupture ductile par la méthode des éléments de frontière. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592937

**HAL Id: hal-00592937**

**<https://hal.science/hal-00592937v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simulation de la rupture ductile par la méthode des éléments de frontière

G. Hello<sup>1</sup>, H. Kebir<sup>1</sup>, A. Rassineux<sup>1</sup>, L. Chambon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Roberval, Université de Technologie de Compiègne, France, gaetanhello@gmail.com, {hocine.kebir,alain.rassineux}@utc.fr

<sup>2</sup> EADS-IW, Centre de Toulouse, France, laurent.chambon@eads.net

**Résumé** — Cette communication présente une procédure numérique de simulation du phénomène de déchirure ductile intervenant dans des panneaux aéronautiques minces en alliages d'aluminium. La méthode des équations intégrales de frontière est ici retenue pour représenter le problème élastoplastique continu. L'évolution du dommage s'appuie sur des modèles découplés et l'extension des fissures se gère en modifiant la géométrie ou les conditions limites. Le recalage de la valeur critique du paramètre de dommage permet une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux.

**Mots clés** — Dual boundary element method, élastoplasticité, déchirure ductile, Rice&Tracey.

## 1 Introduction

Le phénomène de la déchirure ductile est ici modélisé dans le contexte de la mécanique non-linéaire de la rupture. L'influence de l'endommagement s'exerce ainsi au travers d'une modification de la géométrie du système étudié. L'évolution du dommage pilote donc l'extension des fissures. Cette approche exige la maîtrise conjointe des non-linéarités dans le comportement du matériau et des discontinuités associées aux fissures. La méthode des équations intégrales de frontière a prouvé son aptitude à gérer ces deux aspects de manière robuste [1, 2, 3]. L'endommagement, dont l'évolution se traduit par une actualisation de la géométrie, est représenté de manière découplé. Tant le modèle local de Rice&Tracey [4] que les critères globaux du Crack-Tip Opening Displacement/Angle [5] peuvent ainsi être employés pour simuler des expériences de déchirure ductile.

## 2 Formulation intégrale et discrétisation par éléments de frontière

### 2.1 Formulation intégrale classique

La formulation intégrale classique du problème d'équilibre d'un milieu soumis à un champ de déformations initiales (plastiques en l'espèce) est désormais bien décrite dans la littérature [1, 2, 3]. Elle repose sur deux équations intégrales, l'une en déplacements :

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varepsilon_{jk}^p(\mathbf{y})d\Omega(\mathbf{y}) \quad (1)$$

l'autre en contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = & \int_{\partial\Omega} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) \\ & + \int_{\Omega} \Sigma_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y})d\Omega(\mathbf{y}) + f_{ij}(\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (2)$$

Contrairement à la formulation intégrale pour le problème d'élasticité, les intégrales ne concernent plus seulement le contour  $\partial\Omega$  mais également désormais le domaine  $\Omega$ . Il faut toutefois noter que seules les zones subissant de la plasticité contribuent à ces intégrales de domaine. L'application de l'équation intégrale en déplacements Eq. (1) peut s'envisager pour certains problèmes de fissuration (éprouvettes symétriques, ...). Cependant, lorsque  $\partial\Omega$  comprend des fissures, cette seule équation ne permet plus d'assurer l'unicité de la solution ou de garantir un rang suffisant au système linéaire ultérieurement engendré. Une nouvelle formulation intégrale plus générale doit donc dans ce cas être employée.

## 2.2 Formulation intégrale duale

L'extension de la formulation intégrale précédente aux milieux fissurés s'opère par l'approche duale [7]. Elle consiste à obtenir de nouvelles identités intégrales pour les points situés sur les lèvres de fissure à partir de Eqs. (1) et (2). Les points situés sur l'ensemble des lèvres supérieures de fissures  $\Gamma^+$  se voient alors associer une nouvelle équation intégrale en saut de déplacements en lieu et place de Eq. (1) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (u_i(\mathbf{x}^+) + u_i(\mathbf{x}^-)) &= \int_{\partial\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) \cdot t_j(\mathbf{y}) \cdot dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial\Omega} T_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) \cdot u_j(\mathbf{y}) \cdot dS(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{\Omega} \sigma_{ijk}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) \cdot \varepsilon_{jk}^p(\mathbf{y}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3)$$

Quant aux points situés sur l'ensemble des lèvres inférieures de fissures  $\Gamma^-$ , il leur correspond désormais une nouvelle équation intégrale en saut de tensions :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (t_i(\mathbf{x}^-) - t_i(\mathbf{x}^+)) &= n_j(\mathbf{x}^-) \cdot \int_{\partial\Omega} D_{ijk}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \cdot t_k(\mathbf{y}) \cdot dS(\mathbf{y}) - n_j(\mathbf{x}^-) \cdot \int_{\partial\Omega} S_{ijk}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \cdot u_k(\mathbf{y}) \cdot dS(\mathbf{y}) \\ &+ n_j(\mathbf{x}^-) \cdot \int_{\Omega} \Sigma_{ijkl}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \cdot \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{y}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \\ &+ n_j(\mathbf{x}^-) \cdot \frac{1}{2} \cdot \{f_{ij}[\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}^+)] + f_{ij}[\varepsilon_{kl}^p(\mathbf{x}^-)]\} \end{aligned} \quad (4)$$

L'obtention de cette nouvelle équation intégrale en tension s'accompagne d'une élévation de l'ordre de singularité des intégrales de contour. L'intégrale faiblement singulière devient fortement singulière tandis que l'intégrale fortement singulière devient elle hypersingulière. Les procédures d'intégration doivent alors permettre d'évaluer des intégrales tant au sens classique de Riemann qu'aux sens de la valeur principale de Cauchy ou de la partie finie d'Hadamard.

## 2.3 Discrétisations par éléments de frontière

La géométrie du problème est discrétisée par des segments concernant  $\partial\Omega$  et par des cellules triangulaires pour  $\Omega$ . Comme évoqué précédemment, la discrétisation du domaine ne concerne que les seules zones susceptibles de subir la plasticité. Cette caractéristique s'avère avantageuse s'il on souhaite par exemple étudier la propagation ductile de défauts (échelle du cm) dans des panneaux aéronautiques (échelle du m). Les champs mécaniques d'intérêt sont ensuite approchés sur chaque support d'intégration au moyen d'approximations polynomiales élémentaires non-conformes respectivement quadratique pour le 1D et linéaire pour le 2D :

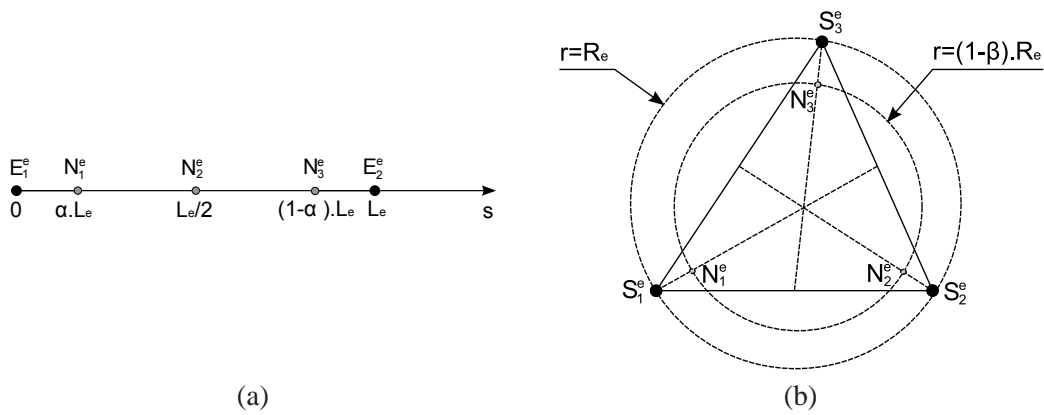


FIGURE 1 – Discrétisations des supports d'intégration pour : (a) le contour  $\partial\Omega$ , (b) le domaine  $\Omega$

Une fois opérées les discrétisations de la géométrie et des champs élémentaires, il devient alors possible d'obtenir la représentation algébrique du problème mécanique. La collocation de Eq. (1) et éventuellement celle de Eqs. (3) (4) offre le système algébrique suivant :

$$[A]\{u\} = [B]\{t\} + [D]\{\varepsilon^p\} \quad (5)$$

où  $\{u\}$  and  $\{t\}$  représentent les déplacements et tensions discrétisés sur  $\partial\Omega$  et  $\{\varepsilon^p\}$  les déformations plastiques discrétisées sur  $\Omega$ .

L'imposition des conditions limites permet de fixer la moitié des quantités de contour. Le système (5) est ensuite réorganisé de sorte que les inconnues de contour restantes  $\{x\}$  soient regroupées dans la partie gauche du système. Si les conditions limites sont fixées dans  $\{\bar{x}\}$  et les déformations plastiques connues, la partie droite du système suivant est un vecteur fixé :

$$[K_x]\{x\} = [K_{\bar{x}}]\{\bar{x}\} + [D]\{\varepsilon^p\} \quad (6)$$

A ce stade, la détermination des inconnues de contour passe par la résolution de Eq. (6). A cette fin, une procédure basée sur une décomposition  $LU$  avec pivotage partiel est employée. Cette stratégie apparaît adaptée au contexte de la résolution de problèmes élastoplastiques par BEM. En effet, dans Eq. (6) seuls  $\{\bar{x}\}$  et  $\{\varepsilon^p\}$  évoluent durant l'histoire de chargement. Ainsi, une décomposition  $PA = LU$  de  $[K_x]$  ne doit être entreprise qu'une fois seulement. Lorsqu'il s'agit de résoudre des systèmes linéaires à matrice fixe avec des seconds membres variables, le coût de  $n^3$  opérations est uniquement rencontré pour la première résolution. Les résolutions suivantes ne nécessiteront elles que  $n^2$  opérations pour les substitutions.

Une fois que toutes les variables de contour et de domaine ont été déterminées, les contraintes peuvent être post-traitées en tout point du domaine avec Eq. (2). Du fait de la procédure d'intégration locale de la plasticité, contraintes et déformations plastiques doivent être connues aux mêmes points. Ainsi, la collocation de l'équation intégrale en contraintes s'opère sur les points d'interpolation des cellules 2D et conduit à :

$$\{\sigma\} = [A']\{u\} + [B']\{t\} + [E]\{\varepsilon^p\} \quad (7)$$

avec  $\{\sigma\}$  vecteur des contraintes dans le domaine.

### 3 Modélisations de la plasticité et du dommage

L'intégration locale de la loi de comportement s'appuie sur l'algorithme du retour radial [8]. Le caractère implicite de cette première assure la convergence inconditionnelle de l'actualisation locale. Du point de vue global, l'algorithme élastoplastique s'avère quant à lui de nature explicite et permet de conserver les matrices constantes au cours de l'historique de chargement. En contrepartie, il convient de réaliser plusieurs pas de chargement pour obtenir une réponse stabilisée. La gestion de l'endommagement découplé s'intègre avec aisance dans la procédure de calcul plastique. Pour le modèle de Rice&Tracey [4], un champ scalaire de dommage est actualisé à l'issue de chaque pas de chargement convergé. L'extension de fissure intervient quand une valeur critique du dommage est atteinte en un fond de fissure potentiel. Concernant l'approche par CTO(A/D) [5], la fissure s'étend lorsque son ouverture (angle ou déplacement) dépasse une limite prescrite.

#### 3.1 Intégration locale de la plasticité

Dans le contexte de la plasticité multiaxiale des métaux, le domaine d'élasticité est défini dans l'espace des contraintes à 6 dimensions. Ce domaine est borné par une hyper-surface dont l'évolution dépend de celle de la plasticité. Pour un écrouissage isotrope, la surface subit une dilatation homothétique lorsque s'accroît la plasticité. Un unique paramètre est alors nécessaire à la description de la non-linéarité matérielle. L'équation implicite de la surface d'écrouissage pour une fonction seuil de Von-Mises prend comme forme :

$$f(\sigma_{ij}, p) = \sigma_{eq}^{vm}(\sigma_{ij}) - \sigma_y(p) \quad (8)$$

où  $p = \int_0^t 2/3 \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\tau$  est la déformation plastique cumulée,  $\sigma_{eq}^{vm}$  la contrainte équivalente de Von-Mises,  $\sigma_y$  la limite d'élasticité.

Pour un point situé sur la frontière du domaine d'élasticité, l'écoulement plastique s'oriente perpendiculairement à la surface-seuil en direction de l'extérieur. La direction normale se détermine en différenciant

l'équation implicite de la surface au point. Le multiplicateur plastique vaut  $\dot{p}$  pour la fonction-seuil de Von-Mises. L'écoulement plastique s'écrit alors :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3\dot{p}}{2\sigma_{eq}^{vm}} s_{ij} \quad (9)$$

avec  $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$  la partie déviatorique des contraintes.

L'intégration temporelle est réalisée par un schéma implicite et la détermination des champs mécaniques locaux actualisés s'appuie sur l'Algorithme du Retour Radial (RRA) décrit par Simo et Taylor [8].

### 3.2 Modélisations du dommage ductile

L'endommagement intervenant dans les matériaux métalliques ductiles conduit à une altération de leurs propriétés mécaniques macroscopiques. Il s'agit du résultat de processus micros-mécaniques irréversibles. Plus précisément, l'endommagement ductile peut être schématiquement décomposé en trois étapes successives. Tout d'abord, durant l'étape de nucléation, des microcavités s'initient au niveau d'inclusions ou de défauts dans la matrice. Ensuite, ces cavités croissent sous les effets des contraintes appliquées et de la plasticité locale. Enfin, lorsque le matériau atteint un niveau de porosité critique, des microfissures apparaissent à la faveur de la coalescence des cavités.

Pour l'alliage d'aluminium ductile 2024 T3 employé, l'étape de croissance des cavités consomme l'essentiel de l'énergie impliquée dans l'endommagement. Le modèle d'endommagement découplé de Rice et Tracey [4, 6] se fonde sur cette hypothèse. Il considère la croissance d'une cavité sphérique isolée soumise à des chargements lointains dans une matrice parfaitement plastique. Le taux de croissance relatif de la cavité dépend exponentiellement de la triaxialité des contraintes  $\sigma_h/\sigma_{eq}^{vm}$  tout en étant proportionnel au taux de déformation plastique cumulée  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ . Ces dépendances s'accordent bien avec les constatations expérimentales. Le modèle est le suivant :

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0.283 \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}^{vm}}\right) \dot{\varepsilon}_{eq}^p \quad (10)$$

avec  $\dot{R}$  la vitesse de croissance de la cavité,  $R$  le rayon de la cavité and  $\sigma_h$  la contrainte hydrostatique.

Si l'on considère que le dommage macroscopique apparaît à l'instant  $\tau$ , l'intégration temporelle de Eq. (10) du premier instant jusqu'à  $\tau$  permet une évaluation de la valeur critique du dommage :

$$\log\left(\frac{R(\tau)}{R_0}\right) = \int_{\varepsilon_{eq}^p(0)}^{\varepsilon_{eq}^p(\tau)} 0.283 \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_h(\tau)}{\sigma_{eq}^{vm}(\tau)}\right) d\varepsilon_{eq}^p \quad (11)$$

Comme l'histoire de chargement a été discrétisée afin d'intégrer la plasticité correctement, l'intégration du paramètre de dommage  $\log(R/R_0)$  est également définie de manière incrémentale :

$$\log\left(\frac{R}{R_0}\right)_{t+1} = \log\left(\frac{R}{R_0}\right)_t + 0.283 \left( \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}^{vm}}\right) \Delta\varepsilon_{eq}^p \right)_t \quad (12)$$

Cette quantité est actualisée pour chaque point de collocation dans le domaine à l'issue de chaque pas de chargement convergé. Grâce à la nature découplée de notre modèle de dommage, l'actualisation du paramètre d'endommagement s'opère au travers d'un simple post-traitement des champs mécaniques convergés. La rupture intervient lorsque le paramètre de dommage atteint une valeur critique prescrite  $(R/R_0)_c$ .

## 4 Résultats de simulation

Une expérience de déchirure sur une éprouvette Center Crack Tension (CCT160) permet de valider la procédure numérique proposée. Pour cette application, le chemin de fissuration connu a priori permet

de raffiner les mailles de contour et de domaine à proximité des fonds de fissure successifs. Du fait des symétries rencontrées, les approches BEM classique et duale peuvent l'une et l'autre être employées pour résoudre le problème posé. Pour la taille de maille considérée, il est possible de recaler une valeur critique du modèle de rupture pour atteindre un bon niveau de corrélation avec l'expérience.

#### 4.1 Solutions en formulation BEM classique

Grâce aux symétries du problème, la propagation de la fissure peut dans ce contexte être gérée par le relâchement successif d'éléments de contour du quart d'éprouvette. Les mailles de contour et de domaine sont raffinées le long du chemin de fissuration afin d'assurer une bonne représentation des champs mécaniques à proximité des fonds de fissure successifs :

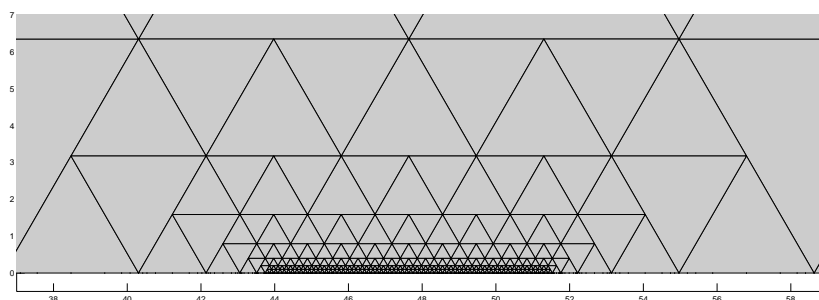


FIGURE 2 – Exemple de raffinement des mailles 1D et 2D sur le chemin de fissuration

Comme les courbes expérimentales reliant la charge à la taille de fissure exhibent un comportement adoucissant au-delà de la charge limite, il convient donc de piloter en déplacements le modèle numérique associé. La BEM permet indifféremment de piloter en tensions ou déplacements. Des procédés de pilotage par longueur d'arc peuvent même s'envisager le cas échéant.

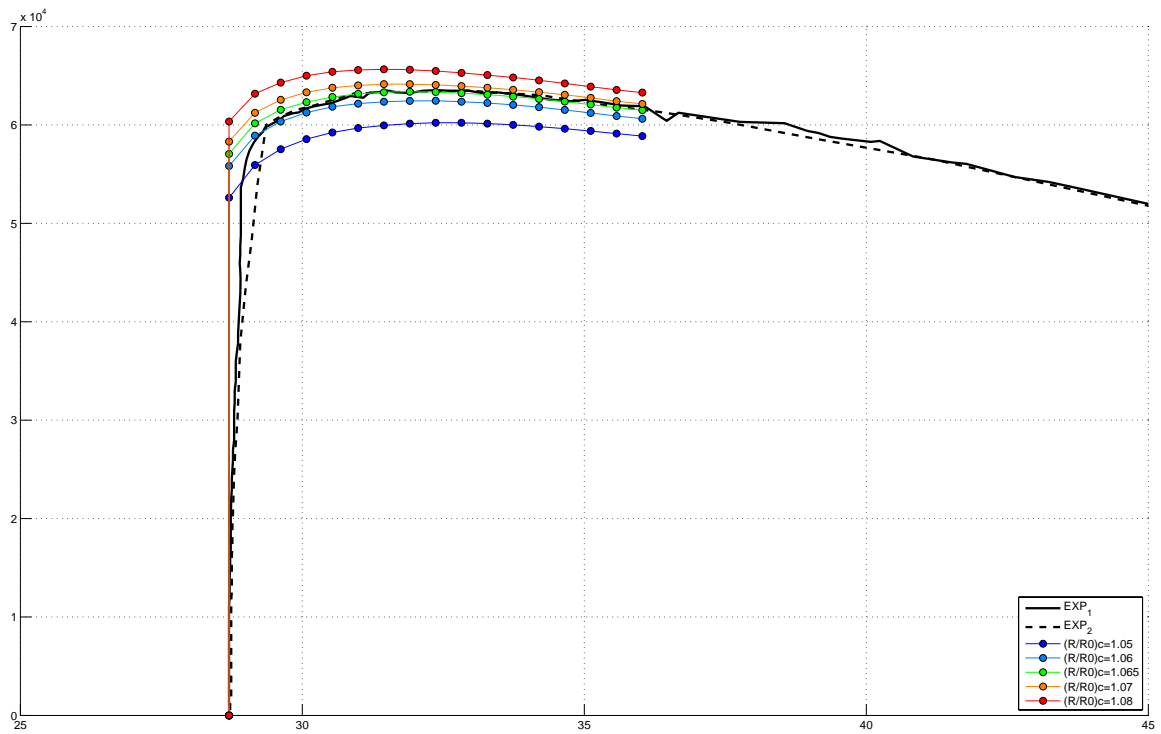
A tailles de mailles données, plusieurs simulations sont successivement réalisées avec des valeurs croissantes du paramètre de dommage critique  $(R/R_0)_c$ . Il en ressort l'existence d'une valeur "optimale" de  $(R/R_0)_c$  permettant de s'approcher au mieux des résultats expérimentaux (Fig. 3). Cette valeur est dépendante du niveau de raffinement des mailles le long du chemin de fissuration. Ainsi, lorsque le maillage se raffine, la valeur optimale tend à augmenter comme les points de collocation pour la plasticité tendent alors à se rapprocher des fonds de fissure.

#### 4.2 Solutions en formulation BEM duale

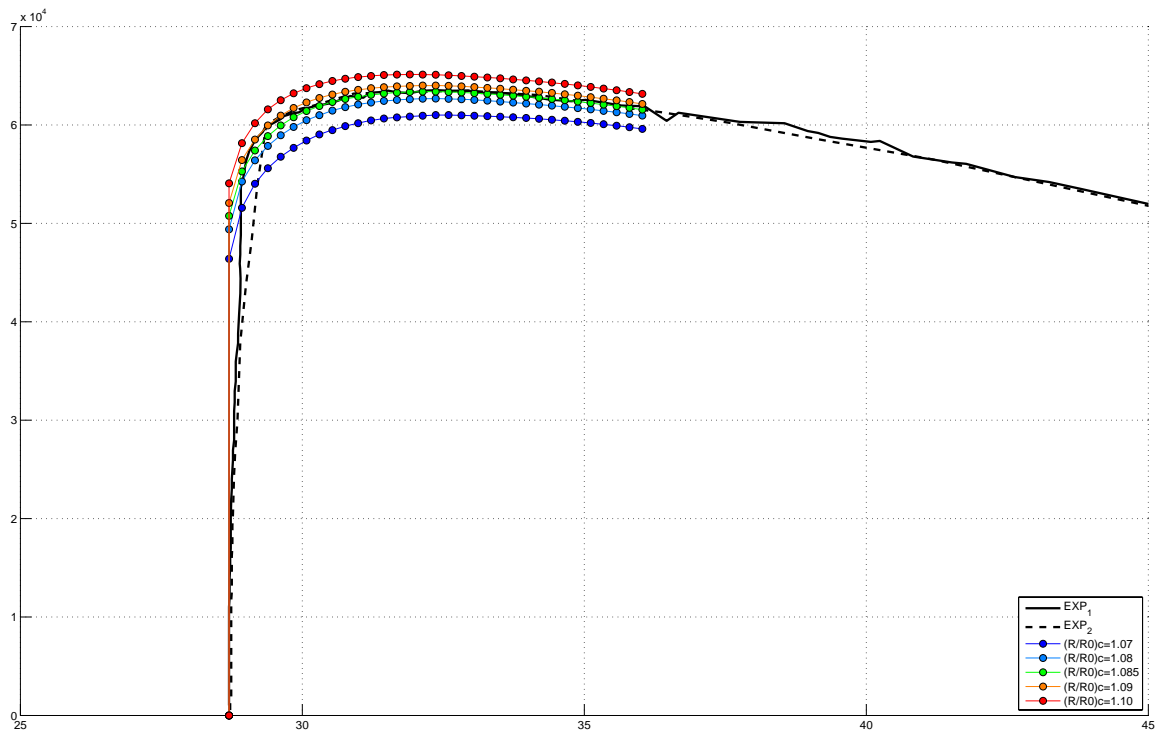
Dans le contexte de la formulation BEM duale, la gestion de la propagation passe par l'ajout de mailles 1D à mesure que progresse le défaut. La discrétisation du domaine demeure quant à elle fixe comme le chemin de fissuration est connu à priori pour cette application (Figs. 4-5). Les courbes de résistance à la rupture obtenues par la simulation s'accordent bien avec celle obtenue expérimentalement (Fig. 6).

#### 4.3 Extrapolation vers des éprouvettes de grande taille

La courbe de résistance à la rupture possède comme propriété d'être principalement dépendante du matériau et de l'épaisseur de la tôle. Il devient donc possible d'utiliser un couple taille de maille /  $(R/R_0)_c$  identifié numériquement pour une éprouvette de petite taille afin de simuler la déchirure ductile d'un panneau de grande taille de mêmes matériau et épaisseur. L'exploitation de propriétés identifiées sur éprouvette CCT160 permettent ainsi de déduire une courbe de résistance numérique pour éprouvette CCT400 en bon accord avec celle obtenue expérimentalement (Fig. 7).



(a)



(b)

FIGURE 3 – Evolutions des courbes de charge (N) en fonction de la taille de fissure (mm) pour différentes valeurs du paramètre critique du modèle de Rice&Tracey : (a) maillages de base, (b) maillages raffinés

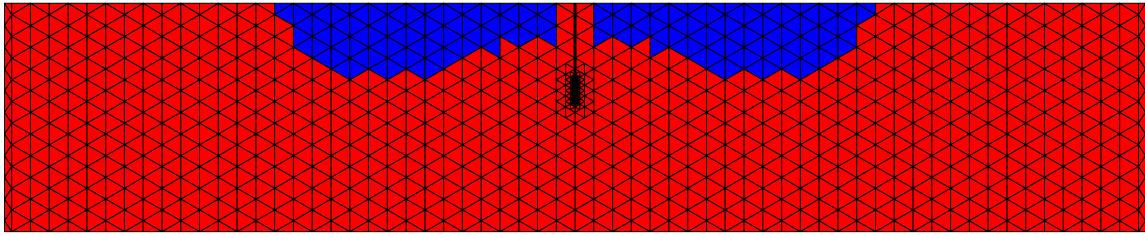


FIGURE 4 – Extension de la zone plastique à l’atteinte du chargement limite

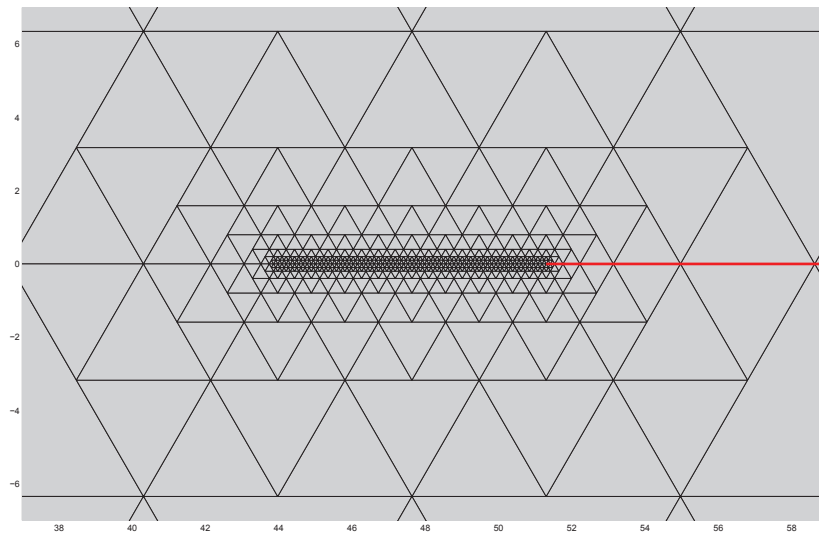


FIGURE 5 – Exemple de raffinement des mailles 1D et 2D sur le chemin de fissuration

## 5 Conclusion

La viabilité de la méthode des équations intégrales pour la simulation de la déchirure ductile de tôles minces en alliages d’aluminium a été démontrée. Le recours au modèle d’endommagement local découplé de Rice et Tracey s’est avéré pertinent pour les éprouvettes considérées. A partir d’un niveau de raffinement suffisant, il a été possible d’identifier une valeur de  $(R/R_0)_c$  optimale conduisant à des résultats numériques proches de ceux produits par l’expérience. La simulation de modèles de grande taille avec des paramètres identifiés sur petits spécimens s’avère également possible.

## Références

- [1] C. Brebbia, L. Wrobel, J. Telles. *Boundary element techniques : theory and applications in engineering*, Springer Verlag, 1984.
- [2] M. Bonnet. *Boundary integral equation methods for solids and fluids*, Wiley, 1999.
- [3] F. Aliabadi. *The boundary element method : applications in solids and structures*, Wiley, 2002.
- [4] J.R. Rice, D.M. Tracey. *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, J. Mech. Phys. Solids, Elsevier, 201-217, 1969.
- [5] J.C. Newman, M.A. James, U. Zerbst. *A review of the CTOA/CTOD fracture criterion*, Eng. Frac. Mech., Elsevier, 371-385, 2003.
- [6] D.M. Tracey. *Strain hardening and interaction effects on the growth of voids in ductile fracture*, Eng. Frac. Mech., Elsevier, 301-315, 1971.
- [7] A. Portela, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke. *The dual boundary element method - Effective implementation for crack problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., Wiley, 1269-1287, 1992.
- [8] J.C. Simo, R.L. Taylor. *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Elsevier, 101-118, 1985.



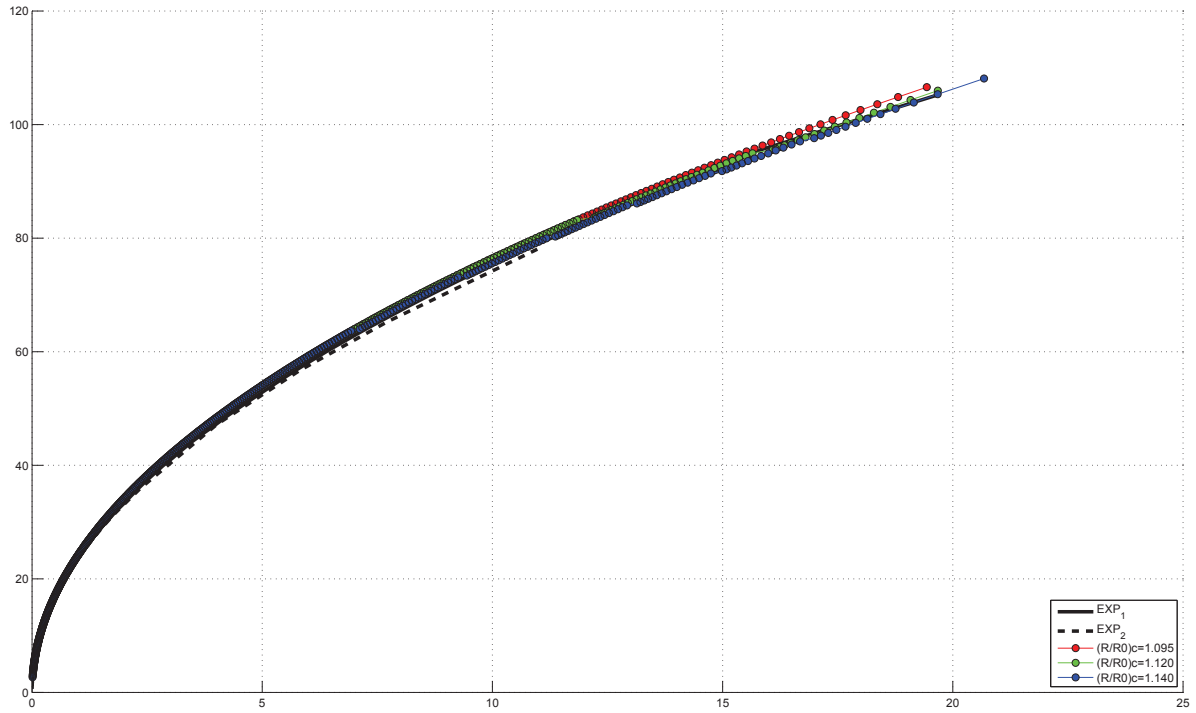


FIGURE 6 – Courbe-R pour CCT160 - Résultats expérimentaux et BEM dual

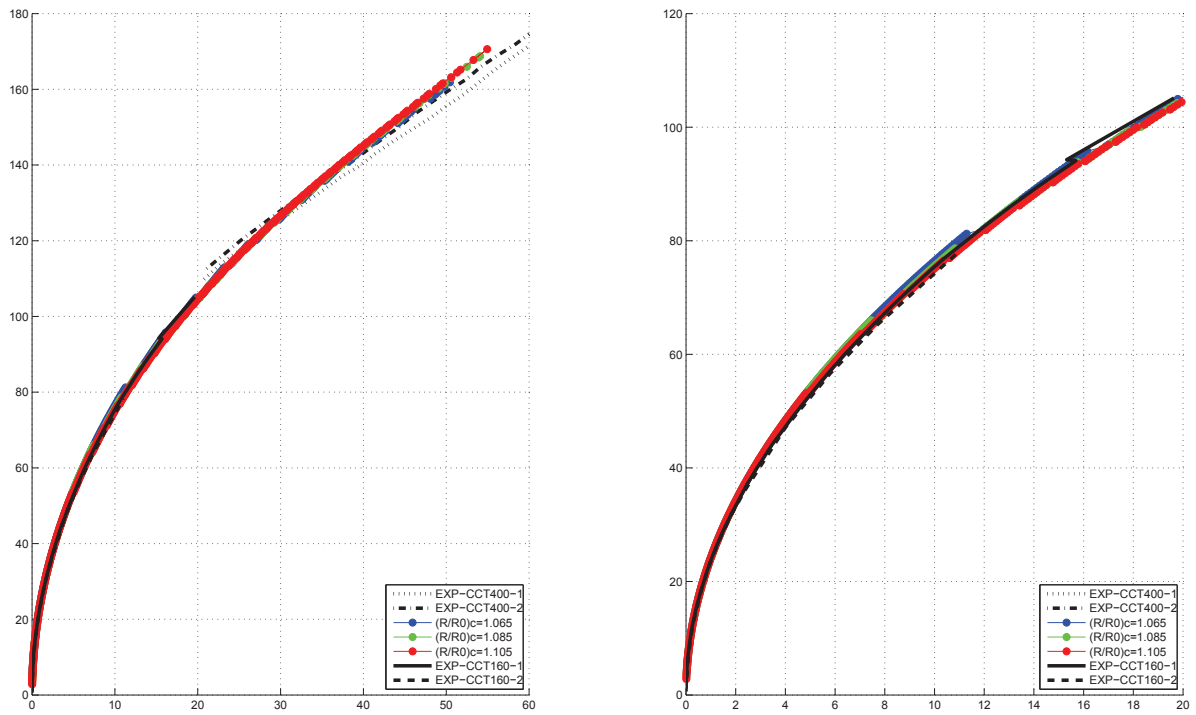


FIGURE 7 – Courbe-R pour l'éprouvette CCT400 - Résultats expérimentaux et numériques