



HAL
open science

Comportement asymptotique des structures soumises à des chargements thermo-mécaniques cycliques

Aurélie Benoit, Habibou Maitournam, Luc Rémy, Frédéric Oger

► **To cite this version:**

Aurélie Benoit, Habibou Maitournam, Luc Rémy, Frédéric Oger. Comportement asymptotique des structures soumises à des chargements thermo-mécaniques cycliques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. hal-00592936

HAL Id: hal-00592936

<https://hal.science/hal-00592936v1>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement asymptotique des structures soumises à des chargements thermo-mécaniques cycliques

A. Benoit^{1,2,3}, H. Maitournam³, L. Rémy², F. Oger¹

¹ PSA Peugeot Citroën, France, {aurelie.benoitalaguillaume, frederic.oger}@mpsa.com

² CdM, Ecole des Mines Paristech, France, luc.remy@ensmp.fr

³ LMS, Ecole Polytechnique Paristech, France, maitournam@lms.polytechnique.fr

Résumé — Les structures soumises à des chargements cycliques présentent différents types de comportement asymptotique : l'adaptation, l'accommodation ou le rochet. Cette étude vise à caractériser ces différents comportements et à les identifier pour une structure soumise à des chargements thermo-mécaniques cycliques et dont le matériau possède des caractéristiques mécaniques variant avec la température. Les définitions proposées sont ensuite illustrées sur quelques cas simples.

Mots clés — chargement cyclique, comportement asymptotique, chargement thermo-mécanique.

Introduction

Les structures soumises à des chargements cycliques présentent quatre types de comportement asymptotique : l'élasticité parfaite, l'adaptation, l'accommodation ou le rochet [1]. L'allure des déformations plastiques asymptotiques est étroitement lié à l'endommagement subi par la structure [2, 3, 4, 5, 6, 7]. L'accommodation et le rochet sont associés à la fatigue à faible nombre de cycles, tandis que l'élasticité parfaite et l'adaptation conduisent à la fatigue à grand nombre de cycles. Pour les composants industriels, un comportement de rochet est à proscrire car le cumul des déformations plastiques réduirait considérablement la durée de vie de la structure. Dans l'industrie automobile, les pièces froides telles que les suspensions ont généralement un comportement asymptotique adapté tandis que les pièces chaudes telles que les collecteurs d'échappement et les culasses sont soumises à des chargement thermomécaniques et présentent souvent un comportement accommodé. Concernant les pièces chaudes, le chargement est essentiellement d'origine thermique. Pour évaluer la durée de vie de ces composants, une approche couplant endommagement et comportement mécanique est possible. Cependant, dans l'industrie automobile, on préfère utiliser un modèle de fatigue en post-traitement, essentiellement pour les économies de temps de calcul réalisées. La durée de vie d'une structure est estimée à partir de quantités thermomécaniques macroscopiques évaluées sur un cycle stabilisé. Il est alors nécessaire de disposer d'un critère pour vérifier que la structure atteint bien un état stabilisé. Si le comportement n'est pas encore stabilisé, il est intéressant de quantifier le taux de rochet et son évolution au cours des cycles. En effet, le rochet peut décroître progressivement jusqu'à l'accommodation de la structure, ou rester suffisamment important pour réduire considérablement la durée de vie de la structure. Etudier cette évolution permet également l'utilisation de méthodes de calcul variées, telles que le saut de cycle [8, 9] - qui prédit le comportement de la structure en calculant uniquement certains cycles éloignés - ou les méthodes de type "cyclic direct" [10, 11] - qui déterminent la réponse asymptotique sans suivre le trajet de chargement complet. Cette étude traite de la caractérisation du comportement asymptotique d'une structure inélastique soumise à des chargement thermomécaniques. Après avoir défini précisément ces différents états asymptotiques, nous présentons la méthode de caractérisation proposée par Begley et Hutchinson [12] et adoptée par Ambrico et Begley [13, 14]. Nous proposons ensuite un critère modifié pour la définition de la norme des déformations plastiques cycliques et pour la détection des différentes types de comportement asymptotique. Nous concluons par un exemple d'application qui consiste en un essai de durée de vie isotherme réalisé sur éprouvette plate.

1 Les états asymptotiques et leur caractérisation

La structure Ω considérée est constituée d'un matériau élasto-visco-plastique. Elle est soumise à un chargement thermomécanique cyclique de période T_c .

1.1 Définition théorique des états stabilisés et du rochet

La structure a atteint un état stabilisé lorsque ses variables internes, et en particulier ses déformations plastiques, deviennent périodiques. Si elles sont constantes le comportement asymptotique est adapté, sinon il est accommodé. Un critère de stabilisation peut être utilisé pour déterminer si le matériau a atteint un état stabilisé. Il est également possible de faire la différence entre adaptation et accommodation.

Dans un premier temps, étudions la caractérisation de l'adaptation. Cet état asymptotique est défini par le fait que l'énergie totale dissipée dans la structure, W_d , est finie. Dans ce cas, l'énergie dissipée par cycle, W_d^c , tend vers 0 lorsque le temps t tend vers $+\infty$. Ainsi, le comportement asymptotique de la structure est élastique, quel que soit le chemin parcouru par les déformations plastiques au cours des premiers cycles. En tout point M de la structure, les déformations viscoplastiques $\underline{\underline{\epsilon}}^{vp}(M, t)$ et les variables internes $\alpha(M, t)$ tendent vers une limite constante ($\underline{\underline{\epsilon}}_\infty^{vp}(M)$ et $\alpha_\infty(M)$ respectivement) lorsque le temps t tend vers $+\infty$. Toutes ces variables peuvent être utilisées pour définir un critère d'adaptation :

- Sur le plan énergétique, la structure est adaptée si :

$$W_d(t) = \int_0^t \int_\Omega \left(\underline{\underline{\sigma}}(M, \tau) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p(M, \tau) + \mathbf{A}(M, \tau) \cdot \dot{\alpha}(M, \tau) \right) dv d\tau$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} W_d(t) < \infty,$$

De plus, si l'on considère l'énergie dissipée par cycle W_d^c :

$$W_d^c(t) = \int_{t-T_c}^t \int_\Omega \left(\underline{\underline{\sigma}}(M, \tau) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p(M, \tau) + \mathbf{A}(M, \tau) \cdot \dot{\alpha}(M, \tau) \right) dv d\tau \quad (1)$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} W_d^c(t) = 0$$

Il en est de même pour l'énergie dissipée $W_d(M, t)$ et l'énergie dissipée par cycle $W_d^c(M, t)$, en tout point M de la structure.

- Si l'on s'intéresse aux variables internes, le critère peut être défini de la manière suivante : la structure est adaptée si en tout point M de la structure :

$$\forall i, j = 1, 2, 3, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_{ij}^{vp}(M, t) = \epsilon_{\infty ij}^{vp}(M)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{ij}^{vp}(M, t) = \alpha_{\infty ij}^{vp}(M)$$

Intéressons nous désormais à la définition de l'accommodation. Dans ce cas, l'énergie dissipée totale n'est pas finie mais l'énergie dissipée par cycle tend vers une limite constante en tout point M de la structure. Ainsi, le comportement asymptotique de la structure est toujours visco-plastique mais les déformations visco-plastiques et les variables internes deviennent périodiques de période T_c après un certain temps t_0 . Comme précédemment, le critère d'accommodation peut être défini à partir de l'énergie dissipée ou des variables internes :

- Sur le plan énergétique, la structure est accommodée si, en tout point M de la structure :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_d^c(M, t) = cte > 0$$

- En ce qui concerne les variables internes, la structure est accommodée à l'instant t_0 si :

$$\forall M, \forall i, j = 1, 2, 3, \forall t > t_0, \quad \epsilon_{ij}^{vp}(M, t + T_c) = \epsilon_{ij}^{vp}(M, t)$$

$$\alpha_{ij}^{vp}(M, t + T_c) = \alpha_{ij}^{vp}(M, t)$$

Pour les chargements thermomécaniques, l'énergie dissipée par cycle, W_d^c , est une variable significative pour distinguer l'adaptation de l'accommodation. En effet, certaines études utilisent l'énergie dissipée par cycle telle quelle comme critère de fatigue [15] ou la combinent à la pression hydrostatique [16] pour déterminer la durée de vie des structures lorsque la pression hydrostatique présente un effet non négligeable sur l'endommagement. Ainsi, les déformations viscoplastiques et l'énergie dissipée par cycle peuvent être utilisées pour vérifier que la structure a atteint un état stabilisé. Si le comportement asymptotique n'est pas stabilisé, il est nécessaire de quantifier le taux de rochet afin de déterminer l'endommagement induit par la dérive des déformations inélastiques. Pour les chargements isothermes, Hutchinson, Begley et Ambrico [12, 13, 14] proposent une définition du rochet et une méthode pour identifier les différents états asymptotiques.

1.2 Le rochet défini par Begley et Hutchinson

Nous supposons que le comportement asymptotique de la structure présente du rochet. Pour les chargements isothermes Begley et Hutchinson proposent une méthode pour identifier les déformations plastiques cycliques $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^c$ et le taux de rochet $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^r$ (voir Fig. 1).

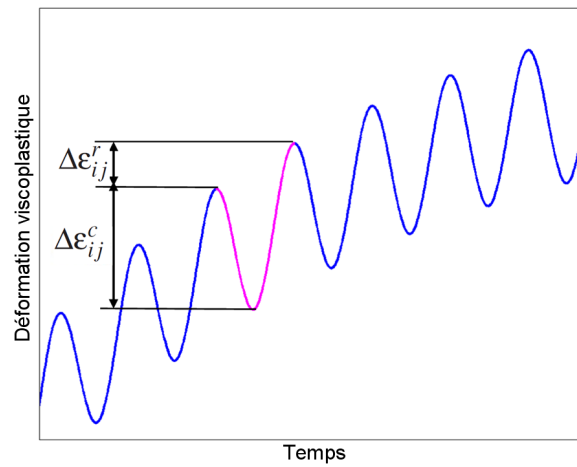


FIGURE 1 – Définition du taux de déformation plastique cyclique $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^c$ et du rochet $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^r$

Pour tout cycle k , le taux de rochet par cycle $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^r(k)$ est évalué en comparant deux instants correspondants de deux cycles consécutifs. Cet instant de référence t_k peut être le début du cycle ou le maximum ou le minimum de la déformation plastique au cours du cycle. Le taux de rochet est ainsi défini par :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^r(k) = \varepsilon_{ij}^{vp}(t_k) - \varepsilon_{ij}^{vp}(t_k - T_c)$$

et la norme associée :

$$\left\| \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^r(k) \right\| = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^r(k) : \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^r(k)} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta\varepsilon_{ij}^r(k) \cdot \Delta\varepsilon_{ij}^r(k)}$$

Cette définition peut être étendue pour définir le taux de rochet à tout instant t supérieur à T_c :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^r(t) = \varepsilon_{ij}^{vp}(t) - \varepsilon_{ij}^{vp}(t - T_c) \quad (2)$$

Le taux de déformation plastique cyclique au cours du cycle k , $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^c(k)$, est alors définie selon l'axe ij comme la différence entre l'amplitude de déformation inélastique selon ij et le taux de rochet :

$$\Delta\varepsilon_{ij}^c(k) = \max_{t \in [(k-1)T_c, kT_c]} (\varepsilon_{ij}^{vp}) - \min_{t \in [(k-1)T_c, kT_c]} (\varepsilon_{ij}^{vp}) - \Delta\varepsilon_{ij}^r(k)$$

Le taux de déformation plastique cyclique effectif est la norme de la quantité définie ci-dessus, $\left\| \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^c(k) \right\|$. L'amplitude des déformations plastiques cycliques ε_{aBH}^{vp} est alors : $\varepsilon_{aBH}^{vp} = \left\| \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}^c(k) \right\| / 2$. Cette

définition prend en compte les chargements multi-axiaux mais, de manière générale, l'amplitude plastique cyclique fait intervenir des composantes prises à différents instants du cycle : cette amplitude résultante ne correspond pas à des niveaux de déformation effectivement atteints au cours du chargement. Une autre définition de l'amplitude plastique cyclique sera introduite dans la section suivante ; cette définition permettra de mieux considérer la forme du trajet des déformations plastiques cycliques au cours des cycles.

Pour déterminer les zones de la structure dominées par un type de réponse asymptotique (adaptation, accommodation ou rochet), Begley et Hutchinson comparent l'amplitude de déformation cyclique avec le taux de rochet :

- Si $\|\underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r\|$ et $\epsilon_{a\ BH}^{vp}$ sont en dessous d'un seuil, dépendant du matériau, cette zone est adaptée. Le seuil peut être basé sur la limite d'élasticité.
- Si $\epsilon_{a\ BH}^{vp} > \|\underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r\|$, la zone est accommodée.
- Si $\|\underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r\| > \epsilon_{a\ BH}^{vp}$ la zone présente du rochet.

L'utilisation de ces définitions ne permet pas de prendre en compte correctement l'endommagement. En effet, une zone dominée par le rochet peut également présenter des déformations cycliques non négligeables et une zone dominée par l'accommodation peut présenter un taux de rochet nuisible à la structure. Pour prendre en compte toutes les sources d'endommagement, le rochet et l'accommodation doivent être définis par l'intermédiaire de seuils. Cette nouvelle procédure de caractérisation des états asymptotiques est présentée dans la section suivante.

2 Nouvelles méthodes de caractérisation des états asymptotiques

Pour tout instant t supérieur à $\frac{T_c}{2}$, les variables suivantes peuvent être définies pour le cycle $[t - \frac{T_c}{2}, t + \frac{T_c}{2}]$:

1. Un taux de rochet par cycle, $\underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r(t)$. Il est défini comme précédemment par Eq. (2).
2. Une déformation plastique moyenne $\underline{\underline{\epsilon}}^*(t)$. Elle est définie comme le centre de la plus petite hypersphère entourant le chemin des déformations plastiques $\{\underline{\underline{\epsilon}}^{vp}(\tau), \tau \in [t - \frac{T_c}{2}, t + \frac{T_c}{2}]\}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(t) = \arg \min_{\underline{\underline{\epsilon}}_1} \max_{\tau \in [t - \frac{T_c}{2}, t + \frac{T_c}{2}]} \|\underline{\underline{\epsilon}}^{vp}(\tau) - \underline{\underline{\epsilon}}_1\| \quad (3)$$

3. La déformation cyclique $\underline{\underline{\epsilon}}^c(t)$ est obtenue en soustrayant la déformation plastique moyenne aux déformations inélastiques :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^c(t) = \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}(t) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(t)$$

4. Enfin l'amplitude de déformation plastique cyclique ϵ_a^{vp} est définie comme le rayon de la plus petite hypersphère entourant la déformation cyclique $\underline{\underline{\epsilon}}^c(t)$ au cours du cycle $[t - \frac{T_c}{2}, t + \frac{T_c}{2}]$, voir Fig. 2 :

$$\epsilon_a^{vp} = \min_{\underline{\underline{\epsilon}}_1} \max_{t \in [kT_c - \frac{T_c}{2}, kT_c + \frac{T_c}{2}]} \|\underline{\underline{\epsilon}}^c(t) - \underline{\underline{\epsilon}}_1\|$$

La figure 2 illustre la définition de l'amplitude plastique cyclique ϵ_a^{vp} .

Pour les chargements anisothermes, l'énergie dissipée par cycle, définie par Eq. (1) est un meilleur indicateur de l'endommagement induit par les déformations inélastiques cycliques.

Pour distinguer les zones adaptées, accommodées ou en rochet, nous proposons d'éviter la comparaison entre le taux de rochet et l'amplitude plastique cyclique. En effet, le rochet est défini comme une dérive des déformations inélastiques au cours du temps ; il peut avoir une amplitude plus faible que les déformations plastiques cycliques mais suffisamment importante pour endommager la structure. L'influence du rochet peut être évaluée par comparaison à un seuil correspondant à un cumul de déformation au sein du matériau. On peut définir ce seuil comme un pourcentage de la déformation à rupture en traction. Lorsque le taux de rochet dépasse ce seuil ϵ_{limit} , le rochet doit être pris en compte pour prédire la durée de vie de la structure. Pour distinguer l'accommodation et l'adaptation, on définit un seuil sur l'énergie dissipée par cycle, $W_d^c limit$. Ainsi, pour les chargements anisothermes, la caractérisation du comportement asymptotique se fait de la manière suivante

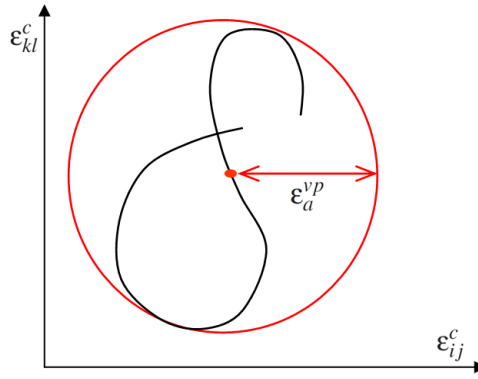


FIGURE 2 – Définition de l'amplitude de plasticité cyclique

- Si $\left\| \underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r \right\| < \epsilon_{limit}$ et $W_d^c < W_d^c limit$, la zone est adaptée.
- Si $\left\| \underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r \right\| < \epsilon_{limit}$ et $W_d^c > W_d^c limit$, la zone est accommodée
- Si $\left\| \underline{\underline{\Delta \underline{\underline{\epsilon}}}}^r \right\| > \epsilon_{limit}$, la zone présente du rochet.

3 Exemples d'application

Deux exemples sont proposés dans cette section. Le premier exemple consiste en l'application d'un chargement de type traction-cisaillement déphasé sur un élément de volume. Cet exemple illustre les différences entre les deux définitions de l'amplitude plastique cyclique. Le deuxième exemple est une éprouvette soumise à un essai de durée de vie isotherme sur laquelle nous avons déterminé le type de comportement asymptotique en tout point de la zone utile.

3.1 Traction-cisaillement déphasé sur un élément de volume

Dans cet exemple, 30 cycles de chargement sont réalisés sur un élément de volume. Un chargement de traction est appliqué selon la direction 11 et un chargement en cisaillement est appliqué selon la direction 12 avec un déphasage de $\pi/2$. Fig. 3 présente l'évolution des déformations selon les directions 11 et 12 au cours des premiers cycles.

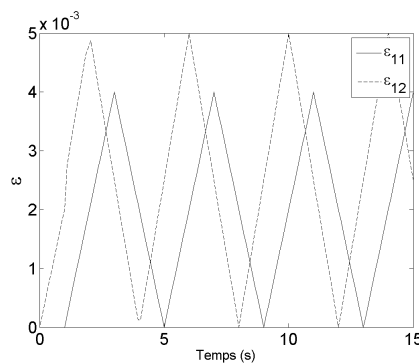


FIGURE 3 – Essai de traction-cisaillement déphasé : évolution des déformations

Le matériau est modélisé à l'aide d'une loi de comportement élasto-visco-plastique décrite par [17]. Au cours de ce chargement, le matériau présente un fort rochet lors des premiers cycles puis s'accommode à partir du 6^e cycle comme le montre Fig. 4a.

L'équation Eq. (3) permet de construire la déformation plastique moyenne puis la déformation inélastique cyclique présentées Fig. 4. Ainsi, la déformation plastique moyenne évolue au cours du cycle et nous pouvons donc étudier quelle partie du cycle contribue le plus à la formation de rochet.

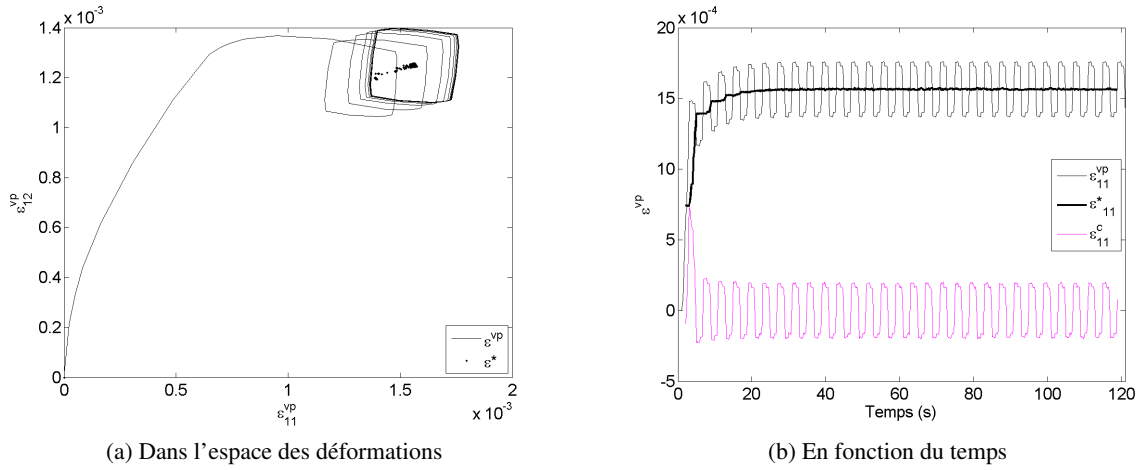


FIGURE 4 – Essai de traction-cisaillement déphasé : évolution des déformations viscoplastiques et de la déformation plastique moyenne

Sur la figure Fig. 5 nous pouvons étudier l'évolution de l'amplitude des déformations plastiques cycliques, ϵ_a^{vp} , au cours du chargement. Les deux définitions donnent des résultats différents :

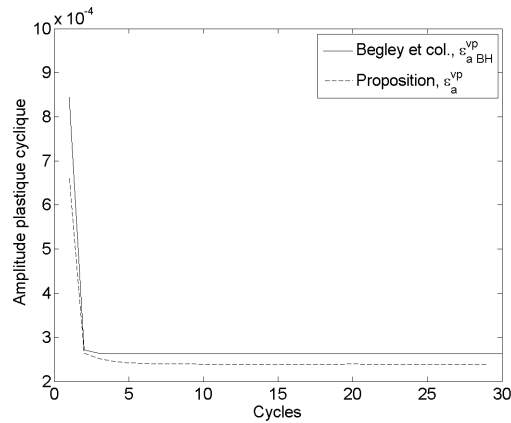


FIGURE 5 – Essai de traction-cisaillement déphasé : évolution des amplitudes de plasticité cyclique ϵ_a^{vp} et $\epsilon_{a\ BH}^{vp}$

- Sur le premier cycle, le rochet est très important et il est difficile de le prendre en compte correctement. Néanmoins, la norme définie par Begley et col. a tendance à sous-estimer son importance.
- A partir du 6^e cycle, le rochet disparaît, le matériau est accommodé. $\epsilon_{a\ BH}^{vp}$ reste néanmoins supérieur à la nouvelle définition proposée, ϵ_a^{vp} . Ce décalage est dû au déphasage du chargement qui donne une forme rectangulaire au trajet des déformations viscoplastiques. Begley et col. ont alors tendance à surestimer l'amplitude des déformations viscoplastiques cycliques.

3.2 Essai de durée de vie sur éprouvette plate

En vue de réaliser des essais de durée de vie sur éprouvette plate, certaines simulations ont été effectuées sous Abaqus pour dimensionner l'éprouvette et déterminer les conditions expérimentales appropriées. En effet, l'essai étant réalisé sur éprouvette plate, sans raidisseur, les conditions de chargement applicables sont limitées pour éviter le flambement de l'éprouvette. L'éprouvette est prélevée dans une tôle d'acier ferritique inoxydable F18TNb (correspondant aux nuances AISI 441 ou EN. 1.4509). La tôle a une épaisseur de 2 mm. Le comportement du matériau est de type élasto-visco-plastique. La simulation est effectuée à température ambiante.

La durée de vie souhaitée pour l'éprouvette est d'environ 2000 cycles. Ainsi, pour calibrer les

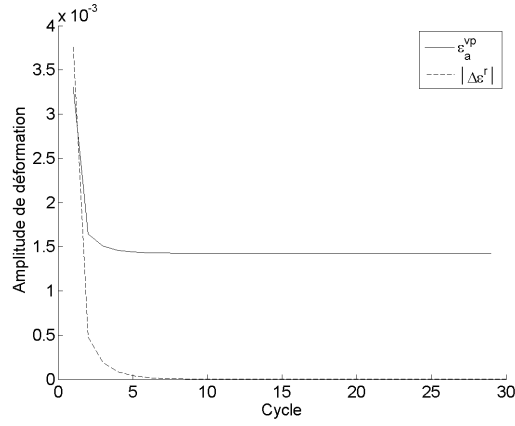


FIGURE 6 – Evolution du taux de rochet $||\Delta\varepsilon^r||$ et de l'amplitude plastique cyclique ε_a^{vp} en fonction du nombre de cycles

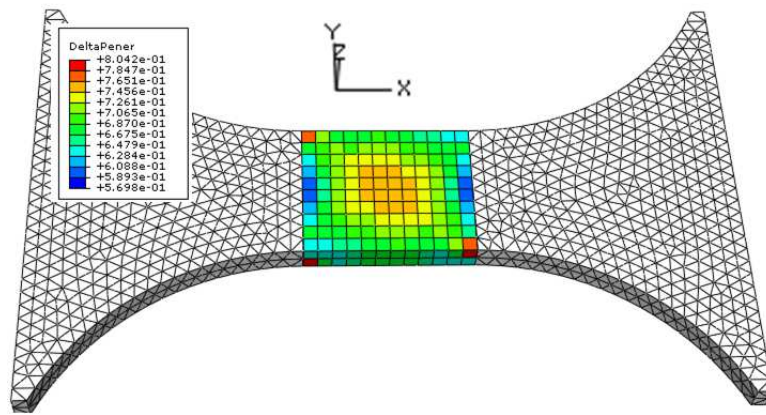


FIGURE 7 – Énergie dissipée au cours du dernier cycle

seuils, $W_d^c limit$ pour l'accommodation et ε_{limit} pour le rochet, on choisit une base de 10000 cycles. $W_d^c limit$ est l'énergie dissipée par cycle correspondant à une durée de vie de 10000 cycles, soit $W_d^c limit = 0.03 \text{ mJ.mm}^{-3}$ et $\varepsilon_{limit} = \frac{1}{10000} \varepsilon_{ult} \sqrt{2/3} = 3.10^{-5}$. Fig. 6 montre que le taux de rochet diminue fortement au cours des premiers cycles et passe sous le seuil ε_{limit} au 6^e cycle. De manière comparable, l'amplitude des déformations cycliques plastiques diminue au cours des premiers cycles et se stabilise à une valeur relativement élevée. Fig. 7 donne le niveau d'énergie dissipée correspondant pour le dernier cycle. Ce niveau est supérieur au seuil $W_d^c limit$ pour tous les éléments de la zone utile. L'éprouvette a donc atteint un état accommodé après 30 cycles de chargement. Ce résultat donne une bonne indication de la tenue de l'éprouvette vis à vis du flambement. En effet, le comportement paraît ici stabilisé à partir du cycle 6. Nous pouvons ainsi supposer que l'éprouvette n'atteindra pas le point d'instabilité au flambement.

4 Conclusions

Cet article présente une nouvelle méthode pour caractériser le comportement asymptotique d'une structure soumise à des chargements thermomécaniques. Le rochet n'est pas évalué uniquement en comparant deux cycles consécutifs. Nous proposons la définition d'une déformation plastique moyenne qui permet de suivre le cumul des déformations inélastiques au cours du cycle et de détecter les phases du cycle qui contribuent le plus à la formation du rochet. De plus, pour les chargement isothermes, nous introduisons une nouvelle norme pour mesurer l'amplitude plastique cyclique, qui permet de mieux prendre en compte les chargements présentant des composantes déphasées. Enfin, pour caractériser correctement le comportement asymptotique de la structure, il est nécessaire de détecter les zones présentant un fort

rochet et une énergie dissipée par cycle élevée. En effet, ces zones seront les plus endommageantes pour la structure.

Finalement, l'article améliore l'approche développée dans [12, 13, 14] en prenant mieux en compte le rochet et les chargements déphasés. La caractérisation des états asymptotiques permet de détecter les zones subissant un fort rochet et une dissipation cyclique d'énergie élevée, ces zones étant les plus endommageante pour la structure.

Références

- [1] Johnson K.L. The application of shakedown principles in rolling and sliding contact. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 11 (1992), pp. 155-172 Special issue.
- [2] Kapoor A., Johnson K.L. Plastic ratchetting as a mechanism of erosive wear, *Wear*, Volumes 186-187, Part 1, 8th International Conference on Erosion by Liquid and Solid Impact, July 1995, Pages 86-91. ISSN 0043-1648, DOI : 10.1016/0043-1648(95)07179-2.
- [3] Kapoor A., Johnson K.L., Williams J.A. A model of a mild ratchetting wear of metals, *Wear* 200 (1996), 38-44.
- [4] Williams J.A. The influence of repeated loading, residual stresses and shakedown on the behaviour of tribological contacts, *Tribology International*, Volume 38, Issue 9, September 2005, Pages 786-797.
- [5] Constantinescu, A., Dang Van, K., Maitournam, M.H. A unified approach for high and low cycle fatigue based on shakedown concepts. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 26 (2003), 6 :561-568.
- [6] Jabbado M., Maitournam M.H. A high-cycle fatigue life model for variable amplitude multiaxial loading. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 31 (2008) 67-75.
- [7] Maitournam M.H., Krebs C., Galtier A. A multiscale fatigue life model for complex cyclic multiaxial loading. *International Journal of Fatigue* 33 (2011), 2 :232-240.
- [8] Lesne P.M., Savalle S. An efficient cycles jump technique for viscoplastic structure calculations involving large number of cycles. ONERA, TP no. 1989-138, pp. 13, 1989.
- [9] Chaboche J.L., Cailletaud G. Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 133, pp. 125-155, 1996.
- [10] Maitournam M.H., Pommier B., Thomas J.J. Determination of the asymptotic response of a structure under cyclic thermomechanical loading. *Comptes Rendus Mecanique*, Volume 330, Number 10, pp. 703-708, 2002.
- [11] Nguyen-Tajan T.M.L., Pommier B., Maitournam H., Houari M., Verger L., Du Z.Z., Snyman M. Determination of the stabilized response of a structure undergoing cyclic thermal-mechanical loads by a direct cyclic method, ABAQUS Users' Conference Proceedings, 2003.
- [12] Begley M.R., Hutchinson J.W. Plasticity in fretting of coated substrates, *Engineering Fracture Mechanics* 62 (1999), 145-164.
- [13] Ambrico J.M., Begley M.R. Plasticity in fretting contact, *J. Mech. Phys. Solids*, 48 (2000), 2391-2417.
- [14] Ambrico J.M., Begley M.R. The role of macroscopic plastic deformation in fretting fatigue life predictions, *Int. J. Fatigue*, 23 (2001), 2 :121-128.
- [15] E. Charkaluk, A. Bignonnet, A. Constantinescu and K. Dang Van. Fatigue design of structures under thermo-mechanical loadings. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 25, pp. 1199-1206, 2002.
- [16] S. Amiable, S. Chapuliot, A. Constantinescu and A. Fissolo. A comparison of lifetime prediction methods for a thermal fatigue experiment, *Int. J. Fatigue*, 28 (2006), 7 :692-706.
- [17] Szymyka F., Rémy L., Maitournam H., Köster A., Bourgeois M. New Flow Rules In Elasto-Viscoplastic Constitutive Models For Spheroidal Graphite Cast-iron, *International Journal of Plasticity*, 26 (2009), 6 :905-924.