



HAL
open science

Modélisation probabiliste de champs d'imperfections géométriques de coques résistantes de sous-marins

Vincent Dubourg, Bruno Sudret, Mikaël Cazuguel

► **To cite this version:**

Vincent Dubourg, Bruno Sudret, Mikaël Cazuguel. Modélisation probabiliste de champs d'imperfections géométriques de coques résistantes de sous-marins. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592933

HAL Id: hal-00592933

<https://hal.science/hal-00592933>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation probabiliste de champs d'imperfections géométriques de coques résistantes de sous-marins

V. Dubourg¹, B. Sudret¹, M. Cazuguel²

¹ PHIMECA Engineering S.A., France, {dubourg,sudret}@phimeca.com

² DCNS Ingénierie Sous-Marins, France, mikael.cazuguel@dcnsgroup.com

Résumé — La problématique du flambement est prépondérante dans le dimensionnement des coques résistantes de sous-marins. Ces instabilités sont pilotées, entre autres, par la présence de défauts de forme dont la variabilité (spatiale et aléatoire) est inhérente au processus de fabrication. Ce papier présente deux méthodes d'identification de champs aléatoires (indexation 1D et 2D), appliquées au traitement de mesures par photogrammétrie numérique réalisées sur des coques de sous-marins de conception DCNS. Ces modèles permettront ensuite de quantifier le niveau de fiabilité en propageant de nouvelles trajectoires de défauts dans un modèle numérique de flambement non linéaire.

Mots clés — imperfections géométriques, champs aléatoires gaussiens homogènes, krigeage, flambement non linéaire, cylindres raidis.

1 Introduction

La coque résistante des sous-marins est soumise aux effets de la pression d'immersion. Cette pression externe induit un état de compression, et par conséquent nécessite d'aborder la problématique du flambement dès le stade de pré-dimensionnement. Une telle structure est particulièrement sensible à la présence de défauts, inhérents au procédé de fabrication. Sont ainsi pris en compte en conception :

- les défauts de circularité favorisant les modes de flambement d'ensemble (Fig. 1);
- les défauts de flèche en maille favorisant les modes de gondolement de bordé (Fig. 1);
- les défauts d'équerrage âme / bordé favorisant les modes de flambement par déversement de raidisseur (non abordés dans ce papier).

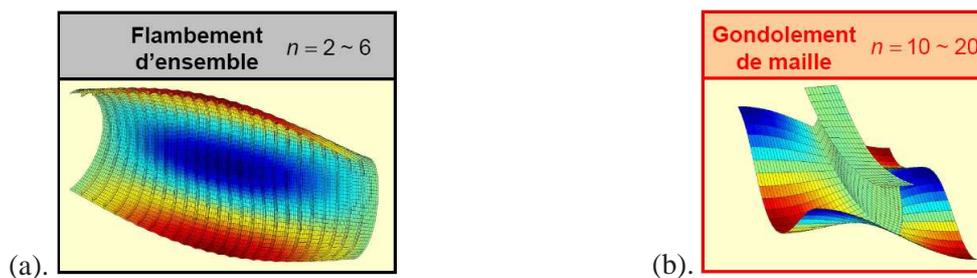


FIG. 1 – Exemples de modes de flambement de coque résistante de sous-marin

La prise en compte de ces imperfections sous l'angle de leur variabilité aléatoire et/ou spatiale est un problème majeur. Dans ce contexte, une conception sous contrainte fiabiliste nécessite de construire un modèle probabiliste de ces imperfections, afin de les prendre en compte dans de futures simulations. Des méthodes récentes ont montré leur aptitude à traiter ce problème de flambement, telle que la méthode ²SMART présentée dans [2]. Il convient maintenant de construire un modèle probabiliste représentatif de la variabilité réelle mesurée.

Si les méthodes de représentation de champs aléatoires ont fait l'objet de nombreux travaux (cf. *e.g.* [7]), l'identification de ce type de champs est quant à lui bien moins documenté. Ce papier présente une méthodologie de traitement de champs de défauts, en proposant deux identifications faisant l'hypothèse de modèles probabilistes gaussiens. Ces méthodologies sont appliquées aux cas de mesures par photogrammétrie numérique sur coque résistante de sous-marins de conception DCNS.

2 Représentation et identification d'un champ aléatoire

Un champ aléatoire H est une application définie sur $\mathcal{D} \times \Omega$ et à valeurs dans \mathcal{H} , où l'on note Ω l'univers des évènements possibles, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ le domaine d'indexation du champ, et $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ l'espace des réalisations du champ (*i.e.* le support de sa loi de probabilité). Suivant la dimension n de l'espace des réalisations du champ, on dira qu'il est scalaire ($n = 1$) ou vectoriel ($n > 1$). Dans ce papier, on aborde uniquement le cas de champs aléatoires scalaires. De plus, on supposera ces champs gaussiens. Un tel champ est alors complètement défini par :

- son espace d'indexation \mathcal{D} (sa forme, ses bornes et sa dimension) ;

- sa moyenne :
$$\mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[H(\mathbf{x})] \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D} \quad (1)$$

- sa fonction d'autocovariance :

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbb{E}[(H(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}))(H(\mathbf{x}') - \mu(\mathbf{x}'))] \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad (2)$$

En faisant l'hypothèse d'homogénéité faible du champ, la fonction d'autocovariance d'un champ gaussien homogène de variance σ^2 et de fonction d'autocorrélation R s'écrit :

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = C(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \sigma^2 R(\Delta\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad (3)$$

2.1 Représentation en série d'un champ aléatoire

Afin de pouvoir simuler des réalisations d'un champ aléatoire (on parle de *trajectoires*), il est nécessaire de s'en donner une *représentation*. La représentation en série d'un champ aléatoire consiste à scinder sa variabilité *aléatoire* d'une part et *spatiale* d'autre part en l'écrivant sous la forme d'une combinaison linéaire d'une famille de fonctions $\mathcal{F} = \{f_k, k \in \mathbb{N}^*\} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{D})$ judicieusement choisie :

$$H(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \omega \in \Omega \quad (4)$$

dont les coefficients $\{\xi_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ sont des variables aléatoires.

Un certain nombre de représentations en série existe, dont notamment : « *Orthogonal Series Expansion* » (OSE), « *Expansion Optimal Linear Estimation* » (EOLE) ou le développement de Karhunen-Loève (« *Karhunen-Loève Expansion* », KLE). Ces représentations ne sont pas décrites ici. Le lecteur intéressé pourra se référer à [4] et [7].

2.2 Identification d'un champ aléatoire à partir de plusieurs trajectoires

Dans cette section, on cherche à construire une représentation fonctionnelle probabilisée d'un champ aléatoire. On suppose que l'on dispose de $Q > 1$ trajectoires indépendantes $\{h^{(q)}(\mathbf{x}), q = 1, \dots, Q\}$ d'un champ aléatoire scalaire H à identifier, échantillonnées sur un maillage suffisamment conséquent et uniformément réparti sur son domaine de définition \mathcal{D} . La représentation que l'on cherche à construire prend la forme générale :

$$H(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=1}^n C_k(\omega) f_k(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \omega \in \Omega \quad (5)$$

où les $\{C_k, k = 1, \dots, n\}$ sont les composantes d'un vecteur aléatoire \mathbf{C} à identifier et les $\{f_k, k = 1, \dots, n\}$ sont des fonctions déterministes choisies *a priori*.

Le choix de la base fonctionnelle $\mathcal{F} = \{f_k, k = 1, \dots, n\} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{D})$ peut se faire suivant les propriétés connues du champ H à identifier (*e.g.* périodicité). La décomposition fonctionnelle doit être répétée sur toutes les trajectoires $q = 1, \dots, Q$. A partir de l'échantillon de vecteurs de coefficients $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}^{(q)}, q = 1, \dots, Q\}$ ainsi constitué, on doit inférer la densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire \mathbf{C} . En supposant le champ aléatoire H gaussien, alors \mathbf{C} est simplement un vecteur aléatoire

gaussien de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $[\boldsymbol{\Sigma}]$, dont la densité de probabilité s'exprime par :

$$f_{\mathbf{C}}(\mathbf{c} | \boldsymbol{\mu}, [\boldsymbol{\Sigma}]) = (2\pi)^{-n/2} \det([\boldsymbol{\Sigma}])^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})^T [\boldsymbol{\Sigma}]^{-1} (\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})\right] \quad (6)$$

Les deux paramètres de cette distribution peuvent être inférés par la méthode des moments. Dans le cas de la loi gaussienne multivariée, $\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{C}}$ et $[\boldsymbol{\Sigma}] = [\mathbf{S}_{CC}]$, soit respectivement la moyenne empirique des échantillons de coefficients et leur matrice de covariance empirique. Pour la simulation ultérieure d'un vecteur gaussien $\mathbf{C} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, [\boldsymbol{\Sigma}])$, on peut se ramener à la simulation d'un vecteur aléatoire gaussien standard $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, [\mathbf{I}])$, par la transformation suivante :

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}^T [\boldsymbol{\Lambda}]^{1/2} [\boldsymbol{\Phi}] \quad (7)$$

où $[\boldsymbol{\Lambda}]^{1/2}$ est la matrice contenant la racine carrée des valeurs propres de la matrice de covariance $[\boldsymbol{\Sigma}]$ rangées par ordre décroissant sur la diagonale et $[\boldsymbol{\Phi}]$ est la matrice des vecteurs propres rangés en colonnes (dans l'ordre associé aux valeurs propres). En présence de valeurs propres nulles (à la précision numérique près, certaines pouvant être faiblement négatives), l'approximation proposée ici consiste à supprimer les couples associés, pour aboutir à une nouvelle formule de simulation :

$$\mathbf{C} \approx \boldsymbol{\mu} + \sum_{\{i | \lambda_i > 0\}} \xi_i \sqrt{\lambda_i} \boldsymbol{\phi}_i \quad (8)$$

2.3 Identification d'un champ aléatoire à partir d'une seule trajectoire

L'identification d'une variable aléatoire à partir d'une seule et unique réalisation est impossible. En revanche, lorsque l'on dispose d'une trajectoire d'un champ aléatoire échantillonnée sur un ensemble $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ suffisamment grand et uniformément réparti sur son domaine de définition \mathcal{D} , on peut proposer un modèle de champ aléatoire en s'appuyant sur la théorie de la géostatistique. Cette théorie est notamment connue pour son concept de « krigeage » introduit par Matheron en 1962 [6], sur la base des travaux de l'ingénieur sud-africain Krige [5]. En géostatistique, le champ aléatoire ayant engendré la trajectoire dont on dispose est couramment supposé [1] :

- gaussien ;
- de moyenne connue (ou supposée) *a priori* ;
- de fonction d'autocovariance homogène et éventuellement anisotrope, mais dont les directions principales d'anisotropie sont connues (ou supposées) *a priori*.

Sous ces hypothèses (qu'il est impossible de valider *a posteriori*), on peut évaluer les paramètres d'un modèle de fonction d'autocovariance homogène anisotrope proposé *a priori* en fonction de l'allure du semi-variogramme empirique.

Le semi-variogramme est une mesure du degré de variabilité « moyen » d'un champ. La « moyenne » dont il est question ici est faite en suivant l'hypothèse d'*ergodicité* selon laquelle la moyenne *spatiale* coïncide avec la moyenne *expérimentale* (i.e. la moyenne au sens probabiliste que l'on pourrait calculer si on disposait de plusieurs trajectoires). Cette hypothèse s'avère d'autant plus valide que la trajectoire du champ à identifier est longue par rapport à sa *longueur de corrélation*. Le semi-variogramme est défini comme la demi-variance d'un groupe de points distants de \mathbf{h} :

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{Var}[H(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - H(\mathbf{x})] \quad (9)$$

Si le semi-variogramme empirique présente une asymptote horizontale, on peut établir un lien entre le semi-variogramme et la fonction d'autocovariance C du champ (en géostatistique, on parle de *covariogramme*) :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2} (\text{Var}[H(\mathbf{x} + \mathbf{h})] + \text{Var}[H(\mathbf{x})] - 2 \text{Cov}[H(\mathbf{x}), H(\mathbf{x} + \mathbf{h})]) \\ &= \text{Var}[H(\mathbf{x})] - \text{Cov}[H(\mathbf{x}), H(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = C(0) - C(\mathbf{h}) \\ &= \sigma^2 - C(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (10)$$

L'estimation du semi-variogramme empirique fait toujours l'objet de recherches [1]. Néanmoins, l'estimateur empirique le plus courant en géostatistique est l'estimateur statistique classique :

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2 \text{Card}(\mathcal{N}(\mathbf{h}))} \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}(\mathbf{h})} (H(\mathbf{x}_i) - H(\mathbf{x}_j))^2 \quad (11)$$

où $\mathcal{N}(\mathbf{h})$ définit l'ensemble des points de même voisinage \mathbf{h} (en module et éventuellement en direction) et $\text{Card}(\bullet)$ est l'opérateur « cardinal » qui correspond au nombre d'éléments dans l'ensemble \bullet . En géostatistique, le semi-variogramme empirique est ensuite modélisé par régression aux moindres carrés en un semi-variogramme théorique. Ce semi-variogramme est associé par la relation (10) à un modèle de fonction d'autocovariance homogène (*i.e.* de covariogramme).

Finalement, en utilisant la moyenne connue et le modèle de fonction d'autocovariance déterminé à partir du semi-variogramme empirique, on peut construire le *meilleur estimateur linéaire sans biais* (voir [7], pp. 11-13) de n'importe quelle trajectoire, et en particulier celui de la trajectoire mesurée :

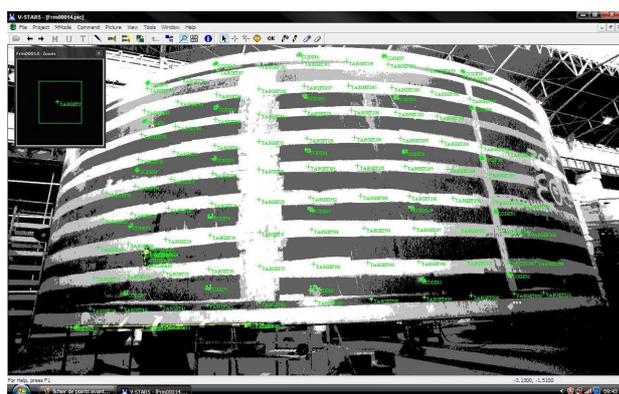
$$h_{\text{mesurée}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{x})^T [\boldsymbol{\Sigma}_{\chi\chi}]^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu}_{\chi}) \quad (12)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\chi}$ le vecteur contenant les valeurs observées de la trajectoire mesurée ;
- $\boldsymbol{\mu}_{\chi}$ le vecteur contenant les valeurs de la fonction moyenne aux points observés ;
- $[\boldsymbol{\Sigma}_{\chi\chi}]$ la matrice contenant les valeurs de la fonction d'autocovariance évaluée aux distances relatives entre les points observés de la trajectoire mesurée ;
- $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ le vecteur contenant les valeurs de la fonction d'autocovariance évaluée aux distances entre les points observés de la trajectoire mesurée et le point à interpoler \mathbf{x} .

3 Applications aux défauts de forme de coques de sous-marins

Afin de quantifier à la fois l'amplitude et la périodicité des défauts de forme sur une coque résistante de sous-marins, des mesures par photogrammétrie numérique ont été réalisées sur deux coques différentes, l'une en début de fabrication (fin de phase tronçon), l'autre en fin de fabrication (fermeture de la coque), FIG. 2. Ces coques sont des cylindres raidis, pour lesquels les cibles de photogrammétrie sont placées à mi-maille et au droit des couples (représentation schématique de ces zones en FIG. 3). Les défauts de circularité à mi-maille sont corrigés afin de ne retenir que la part locale du défaut, qu'on nomme la flèche en maille (FIG. 4).



(a). Fin de phase tronçon (coque nue)



(b). Après fermeture de la coque

FIG. 2 – Coques de sous-marins ayant fait l'objet de mesures par photogrammétrie

Pour des raisons de confidentialité, aucune dimension ni amplitude de défauts ne sont fournies dans ce papier. Les ordres de grandeur sont respectivement de plusieurs mètres et quelques millimètres respectivement pour le rayon des sous-marins et les défauts de circularité mesurés.

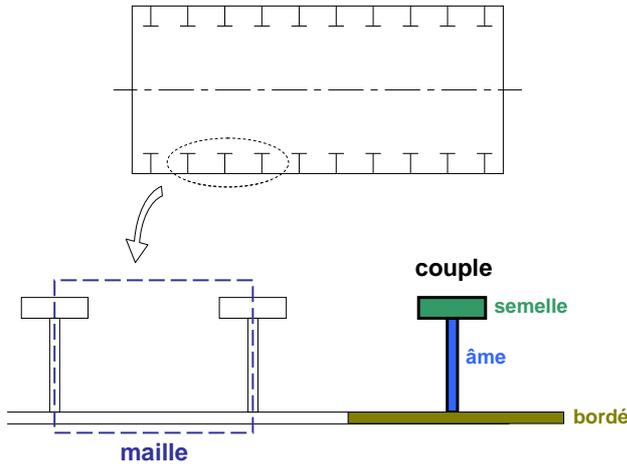


FIG. 3 – Schématisation d'une coque de sous-marins

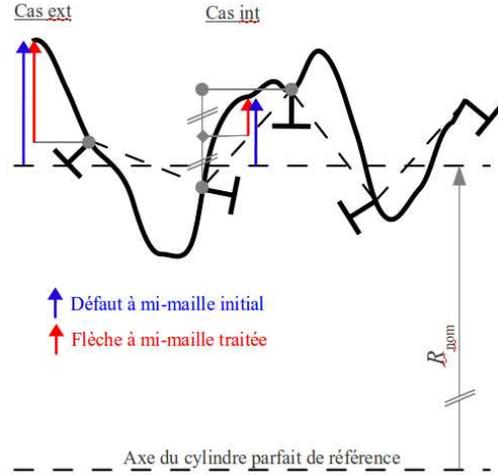


FIG. 4 – Correction des défauts de circularité pour obtention d'une flèche en maille

3.1 Calibration du cylindre parfait de référence

Les données obtenues par photogrammétrie numérique se présentent sous la forme d'un nuage de m points en 3 dimensions dont les coordonnées $\{(X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)}), i = 1, \dots, m\}$ ont été exprimées dans le repère cartésien de la mesure. L'étape préliminaire à toute identification consiste à définir le champ de défaut dans un repère adéquat. On choisit de définir le champ de défaut comme les écarts $\{\zeta^{(i)}, i = 1, \dots, m\}$ entre le rayon du cylindre parfait de référence \mathcal{C} et la surface réelle mesurée. On choisit également d'indexer la variabilité spatiale de ce défaut sur la position (x, θ) exprimée dans le repère cylindrique associé à ce cylindre parfait de référence.

Pour ce faire, il faut définir le cylindre parfait de référence \mathcal{C} dans le repère cartésien de la mesure. Un cylindre est défini par son axe $\Delta(a, b, e, f)$ et son rayon R_0 tel qu'illustré sur la Fig. 5.

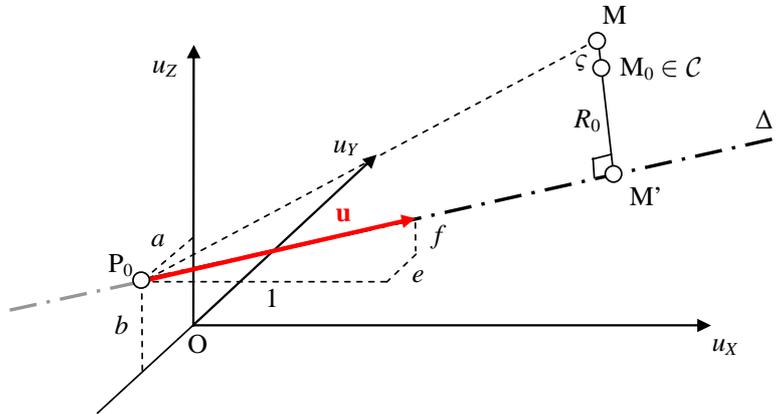


FIG. 5 – Paramétrage du cylindre parfait de référence dans le repère cartésien de la mesure

Soit $d(X, Y, Z)$ la distance MM' . Cette distance d peut être explicitée en fonction des paramètres définissant l'axe Δ :

$$\begin{aligned}
 d(X, Y, Z) &= \sqrt{P_0M^2 - P_0M'^2} = \sqrt{\left(\frac{P_0M \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right)^2 - P_0M'^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+f^2}} \sqrt{(Y-(a+eX))^2 + (Z-(b+fX))^2 + (e(Y-a)+f(Z-b))^2}
 \end{aligned} \tag{13}$$

On définit le cylindre parfait de référence \mathcal{C} comme le cylindre dont les paramètres a, b, e, f et R_0

minimisent la somme des écarts quadratiques :

$$SSE(a, b, e, f, R_0) = \sum_{i=1}^m \left[d \left((X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)}), (a, b, e, f) \right) - R_0 \right]^2 = \sum_{i=1}^m \zeta^{(i)2} \quad (14)$$

3.2 Identification d'un champ de défaut 1D

Afin de se constituer des échantillons d'individus indépendants et identiquement distribués, on considère deux échantillons distincts représentatifs de deux populations :

- les trajectoires de défaut de circularité au droit des couples d'une part ;
- les trajectoires de défaut de circularité à mi-maille « corrigés » d'autre part.

Etant donnée la propriété de 2π -périodicité du défaut de circularité, on a naturellement choisi de décomposer les trajectoires sur la base de Fourier :

$$\zeta_{mes}(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta)) \quad (15)$$

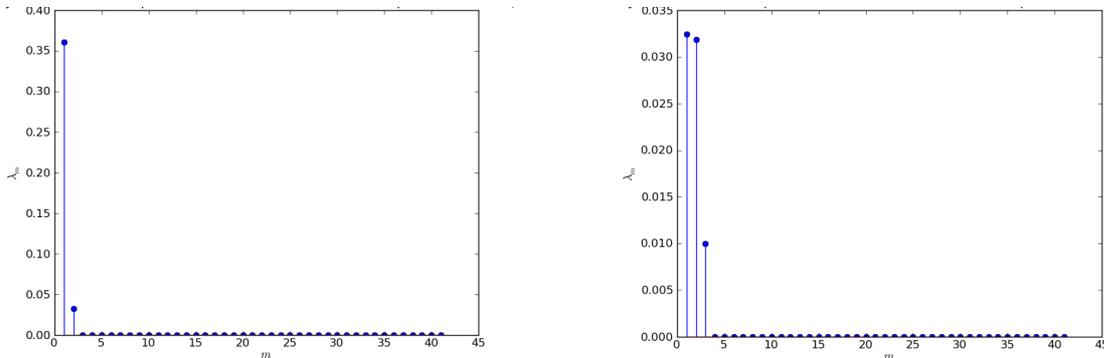
Les intégrales permettant d'obtenir les composantes harmoniques ont été calculées pour chaque trajectoire mesurée ζ_{mes} par la méthode des trapèzes en tronquant la série de Fourier à $K = 20$ (*i.e.* $2K+1 = 41$ coefficients). Ces trajectoires sont uniquement indexées par la position angulaire θ , d'où la notion de champ aléatoire 1D.

On rappelle qu'en ayant fait l'hypothèse que le champ de défaut est gaussien, la densité conjointe du vecteur des composantes harmoniques est complètement déterminée par sa moyenne et sa matrice de covariance. Ces matrices sont simplement déterminées à partir de leurs estimateurs empiriques. Plus précisément, pour calculer ces estimateurs, on a d'abord regroupé les vecteurs de coefficients comme suit :

$$\mathbf{C} = \langle A_0, A_1, \dots, A_K, B_1, \dots, B_K \rangle \equiv \langle C_k, k = 1, \dots, 2K+1 \rangle \quad (16)$$

On obtient ainsi un vecteur $\mathbf{C}^{(q)}$ par trajectoire de défaut de circularité projetée sur la base de Fourier. Le modèle de vecteur de coefficients \mathbf{C} identifié à partir des Q trajectoires est un vecteur gaussien de moyenne $\bar{\mathbf{C}}$ et de matrice de covariance \mathbf{S}_{CC} : $\mathbf{C} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{S}_{CC})$.

Les matrices de covariance empiriques ne sont pas définies positives et on ne peut pas les simuler simplement par un algorithme classique basé sur la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance. On propose donc de recourir à un algorithme alternatif basé sur la décomposition aux valeurs propres de la matrice de covariance. Sur l'ensemble des $(2K+1)$ valeurs propres, seules les M premières sont non nulles et méritent d'être retenues. Les autres étant nulles à la précision numérique près, on n'introduit aucune erreur en utilisant la procédure de simulation proposée en section 2.2 (équation (8)). Pour le cas du tronçon présenté en FIG. 2.(a), seules $M = 2$ et $M = 3$ valeurs propres sont nécessaires à la représentation du contenu probabiliste des trajectoires au droit des couples et à mi-maille respectivement (FIG. 6).



(a). Au droit des couples ($M = 2$)

(b). À mi-maille corrigé ($M = 3$)

FIG. 6 – Spectres des valeurs propres des matrices de covariance empirique des composantes harmoniques des trajectoires de défaut de circularité sur un tronçon (coque nue)

La simulation de 1000 trajectoires permet de calculer les bornes des intervalles de confiance à 95% sur les trajectoires de défaut de circularité (FIG. 7), dans lesquels sont bien inclus les points mesurés. On remarque, FIG. 7(a), qu'un harmonique 4 est prédominant. Ceci s'explique de façon déterministe par la présence de joints soudés longitudinaux sur le bordé (joints de virure) tous les $\theta = \pi/2$. On pouvait s'attendre *a priori* à des défauts également importants à mi-maille, en raison des contraintes résiduelles de soudage des couples au bordé. Les échelles de défaut étant identiques en FIG. 7, on constate que la majeure partie du défaut de circularité semble issue des retraits de soudage au niveau des joints de virure.

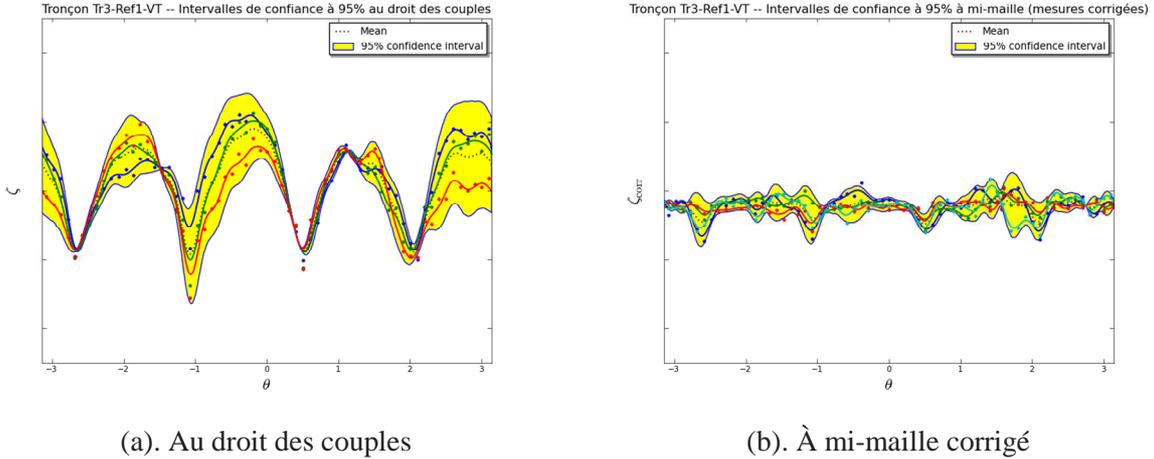


FIG. 7 – Représentation développée des intervalles de confiance à 95% obtenus à partir de la simulation de 1000 nouvelles trajectoires de défaut de circularité sur un tronçon (coque nue), avec superposition des trajectoires utilisées pour l'identification.

3.3 Identification d'un champ de défaut 2D

La méthode d'identification de champ à partir d'une seule trajectoire exposée en section 2.3 n'a pas donné satisfaction sur le tronçon en FIG. 2.(a), en raison d'un échantillonnage longitudinal trop faible. Seul le cas d'application de la FIG. 2.(b) est donc présenté dans ce papier. Pour appliquer la méthode d'identification de la section 2.3, on a supposé que le défaut global est un champ aléatoire gaussien, de moyenne nulle (i.e. le défaut est centré autour du cylindre parfait), homogène et anisotrope de directions principales d'anisotropie, les directions longitudinales et circonférentielles (le champ est donc ici indexé en 2D, suivant les distances Δx et $\Delta \theta$).

A partir de la forme des semi-variogrammes empiriques, deux modèles de semi-variogrammes théoriques sont proposés :

- le modèle *exponentiel généralisé* de paramètres a_{long} , p_{long} et σ^2 dans la direction longitudinale ;
- le modèle *exponentiel cosinus circulaire* de paramètres $p = 1$ (*a priori*), a_{circ} et σ^2 dans la direction circonférentielle. Ce n'est pas un modèle classique en géostatistique. Il a été construit d'après les propriétés de périodicité du champ de défaut dans la direction circonférentielle.

La fonction d'autocovariance du champ est finalement obtenue en multipliant les deux modèles de fonctions d'autocorrélation et la variance σ^2 :

$$C(\Delta x, \Delta \theta) = \sigma^2 \times \exp\left(-\left|\Delta x / a_{long}\right|^{p_{long}}\right) \times \cos(2\Delta \theta) \frac{\text{ch}\left(\frac{(\Delta \theta - \pi)}{a_{circ}}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\pi}{a_{circ}}\right)} \quad (16)$$

Une représentation graphique du modèle de fonction d'autocovariance ainsi construit est fournie en FIG. 8. Le champ aléatoire de défaut étant complètement déterminé, il a ensuite été possible de reconstituer l'intégralité de la trajectoire mesurée en utilisant le meilleur estimateur linéaire sans biais donné par l'équation (12). Cette trajectoire est représentée en FIG. 9 et peut être utilisée directement pour introduire une déformée dans un maillage éléments finis dans le cadre d'expertises. L'utilisation du contenu probabiliste dans un calcul fiabiliste passe par une représentation en série telle qu'EOLE, en tronquant la discrétisation en fonction de l'erreur souhaitée sur l'estimation de la variance.

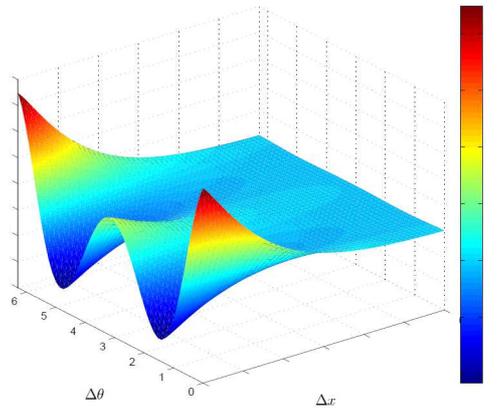


FIG. 8 - Représentation du modèle de fonction d'autocovariance du champ de défaut

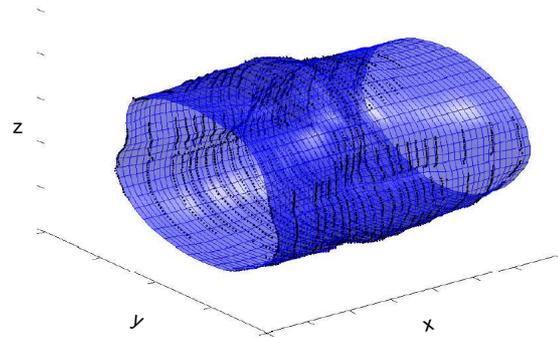


FIG. 9 - Représentation du meilleur estimateur linéaire sans biais du champ de défaut global (amplifié) avec superposition des valeurs mesurées

4 Conclusion

Deux stratégies d'identification de champs aléatoires sont présentées dans ce papier. D'abord, moyennant une hypothèse d'indépendance entre les mesures effectuées au droit des couples d'une part, et à mi-maille d'autre part, il a été possible de construire deux échantillons représentatifs de deux populations du défaut de circularité. Chacun des individus de ces 2 populations a été décomposé sur la base de Fourier, et les vecteurs de composantes harmoniques ont pu être modélisés comme des vecteurs aléatoires gaussiens.

Ensuite, en supposant le champ de défaut global homogène, anisotrope et centré autour du rayon du cylindre parfait de référence, il a été possible de construire un modèle de champ aléatoire bidimensionnel indexé à la fois sur la circonférence et sur la longueur du cylindre. Il est essentiel de rappeler que ces hypothèses sont fortes. Leur vérification passe par la réalisation de mesures sur tronçons indépendants, afin de disposer de plusieurs (*e.g.* $Q > 10$) trajectoires du défaut global. Avec un échantillonnage sur un même ensemble, il serait alors possible d'appliquer une méthode de type Karhunen-Loève pour confirmer ou mettre en défaut l'hypothèse d'homogénéité du champ réel.

A partir des trajectoires simulées *a posteriori*, les modèles construits apparaissent, malgré les hypothèses qui se sont avérées nécessaires, comme représentatifs des mesures par photogrammétrie numérique. D'autres campagnes de mesures permettraient de les affiner. L'objectif est, *in fine*, d'intégrer des champs aléatoires de défaut en phase de conception, à travers une méthode d'optimisation sous contrainte fiabiliste telle que celle présentée dans [3].

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier la Direction Générale de l'Armement pour le financement de ces travaux par le Programme d'Etude Amont COMECNAV (marché n°2007 90 0907).

Références

- [1] N.A.C. Cressie. *Statistics for spatial data*. John Wiley & Sons Inc., New-York. 1993.
- [2] F. Deheeger, M. Cazuguel, P. Willaume & M. Pendola. *Application de la méthode ²SMART au flambement de coques résistantes de sous-marins*. Proceedings du 9ème Colloque National en Calcul de Structures CSMA, Giens – France, 2009.
- [3] V. Dubourg, J.M. Bourinet, B. Sudret & M. Cazuguel. *Reliability-based design optimization of an imperfect submarine pressure hull*. Proceedings ICASP 11, à paraître, 2011.
- [4] R. Ghanem & P. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Courier Dover Publication, 2003.
- [5] D. Krige. *A statistical approach to some basic mine valuation problem on the Witwatersrand*. J. Chem., Metal Mining Soc. South Africa 52 (6), 119–139, 1951.
- [6] G. Matheron. *Traité de Géostatistique appliquée*. Paris : Editions Technip, 1962.
- [7] B. Sudret & A. Der Kiureghian. *Stochastic finite elements and reliability: a state-of-the-art report*. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley, 2000.